

Correction des exercices du livre La Gestion d'Actifs Quantitative

Thierry Roncalli

15 Novembre 2011

Ce document présente les corrections¹ des exercices du livre : Thierry Roncalli, *La Gestion d'Actifs Quantitative*, Economica, 2010 (ce livre est cité sous la référence [TR-QAM] par la suite).

Table des matières

1. L'indexation alternative	2
2. Filtre de Kalman lorsque le bruit de l'équation de mesure est corrélé avec le bruit de l'équation d'état	4
3. Régression linéaire sans constante	5
4. Méthode généralisée des moments	8
5. Modèles structurels à composantes inobservables	15
6. Méthode de Whittle	19
7. Calcul de PnL et de MtM d'un swap de variance	21
8. Les stratégies optionnelles	23
9. Construction d'un backtest	24
10. Construction de portefeuilles diversifiés	25
11. Construction de portefeuilles efficients	27
12. Dérivation des équations de récursion du filtre de Kalman	30
13. Construction d'une position de carry trade	32
14. Bêta d'un portefeuille	34
15. Maximum de vraisemblance des modèles Probit et Logit	36
16. Construction de portefeuilles tiltés	39
17. Identification d'un modèle espace-état	41
18. Calcul d'un indice d'actions	43
19. Roll d'une position de futures	46
20. Processus fractionnaire et stratégie d'investissement long/short	49
21. Stratégie <i>volatility target</i> et indice propriétaire	53
22. Calcul du ratio de Sharpe	54
23. Détermination d'un portefeuille de marché	56
24. Allocation stratégique, allocation tactique et modèle de Black-Litterman	59
25. Gap risk et méthode CPPI	61
26. Comparaison du filtre de covariance de Kalman et du filtre d'information	66
27. Le coefficient bêta	69
28. Le ratio de Sharpe	72
29. Variations autour de la frontière efficiente	74
30. Les stratégies de taux	79
31. Concentration et diversification d'un portefeuille	83
32. La régression linéaire sous contraintes	86
33. Risk budgeting et modèles factoriels	91

1. Les programmes Gauss qui ont servi à résoudre numériquement ces exercices sont disponibles à l'adresse suivante : www.thierry-roncalli.com/download/gauss-qam-exercices.zip.

1. L'indexation alternative

1. Les indices de pondération alternative sont des indices dont les poids sont différents de ceux définis par la capitalisation boursière. On distingue généralement deux familles d'indices alternatifs. La première concerne l'indexation fondamentale (fundamental indexation) alors que la seconde correspond à l'indexation basée sur le risque (risk-based indexation). Ces indices sont apparus dans les années 2000 à la suite des fortes critiques concernant les indices *market-cap* : biais momentum, forte exposition aux bulles, concentration du portefeuille, absence de règles d'allocation pour diversifier le risque.
2. L'indexation fondamentale considère que la bonne métrique pour pondérer les actions est leur valeur économique et non leur capitalisation boursière. C'est donc une stratégie dite *value*. Les poids dans l'indice sont donc proportionnels à des ratios financiers qui portent sur la valeur comptable des capitaux propres (book value), l'excédent brut d'exploitation (ebitda), la valeur du dividende (dividend yield), etc. (TR-QAM, page 582).
3. Les stratégies mv, erc, mdp et $1/n$ sont définies aux pages 90-91 et 130-135 de TR-QAM.
4. On montre que le portefeuille ERC est solution du problème d'optimisation suivant :

$$x^*(c) = \arg \min \sqrt{x^\top \Sigma x}$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n \ln x_i \geq c \\ \mathbf{1}^\top x = 1 \\ \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1} \end{cases}$$

avec Σ la matrice de covariance et c une constante défini *a posteriori*. C'est donc un problème de variance minimale sous une contrainte supplémentaire $\sum_{i=1}^n \ln x_i \geq c$. Celle-ci s'interprète comme une contrainte de diversification. Si $c = -n \ln n$, on obtient le portefeuille équipondéré, c'est-à-dire le portefeuille le moins concentré en terme de poids. Le portefeuille ERC est donc un portefeuille de variance minimale en imposant une diversification minimale.

5. On en déduit que la matrice de covariance est :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1,000 & 1,000 & 0,750 & 0,000 \\ 1,000 & 4,000 & 1,500 & 0,000 \\ 0,750 & 1,500 & 2,250 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 6,250 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

Pour chaque portefeuille, on calcule le poids x_i de l'actif i , la volatilité marginale associée $\partial_{x_i} \sigma(x)$, la contribution en risque absolue $\sigma_i(x) = x_i \times \partial_{x_i} \sigma(x)$ et relative $\sigma_i(x) / \sigma(x)$. Toutes ces quantités sont exprimées en pourcentage. Voici les résultats pour le portefeuille mv :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	$\sigma_i(x)$	$\sigma_i(x) / \sigma(x)$
1	74,26	9,14	6,79	74,26
2	0,00	10,16	0,00	0,00
3	12,38	9,14	1,13	12,38
4	13,37	9,14	1,22	13,37

On vérifie que la volatilité marginale est la même pour tous les actifs qui ont un poids strictement positifs (TR-QAM, page 134). Pour le portefeuille erc, on obtient :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	$\sigma_i(x)$	$\sigma_i(x) / \sigma(x)$
1	36,60	7,07	2,59	25,00
2	18,30	14,14	2,59	25,00
3	24,40	10,61	2,59	25,00
4	20,70	12,50	2,59	25,00

Les résultats pour le portefeuille mdp sont :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	$\sigma_i(x)$	$\sigma_i(x)/\sigma(x)$
1	33,71	6,32	2,13	20,00
2	16,85	12,65	2,13	20,00
3	22,47	9,49	2,13	20,00
4	26,97	15,81	4,26	40,00

Pour le portefeuille 1/n, on obtient finalement :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	$\sigma_i(x)$	$\sigma_i(x)/\sigma(x)$
1	25,00	6,15	1,54	13,75
2	25,00	14,53	3,63	32,50
3	25,00	10,06	2,52	22,50
4	25,00	13,98	3,49	31,25

Encadré 1 (Détermination des portefeuilles 1/n, mv, erc et mdp)

```

let sigma = 0.10 0.20 0.15 0.25;
let rho =   1.0
           0.5 1.0
           0.5 0.5 1.0
           0.0 0.0 0.0 1.0;

rho = xpnd(rho);
cov = rho .* sigma .* sigma';
nAssets = rows(cov);

Bounds = 0~1;

{x,vol,retcode} = Qprog_Min_Variance(cov,ones(1,nAssets),1,0,0,
                                   Bounds .* ones(nAssets,1));
{vol,mr,tr,rc} = Compute_Risk_Contribution(x,cov);
result_mv = 100*(x~mr~tr~rc);

{x,vol,mr,tr,rc} = Compute_ERC_Portfolio(0,cov);
result_erc = 100*(x~mr~tr~rc);

{x,vol,mr,tr,rc} = Compute_MDP_Portfolio(0,cov);
result_mdp = 100*(x~mr~tr~rc);

x = ones(nAssets,1)/nAssets;
{vol,mr,tr,rc} = Compute_Risk_Contribution(x,cov);
result_ew = 100*(x~mr~tr~rc);

print ftosa(100*cov,"%lf",3,3);
print ftosa(result_mv,"%lf",3,2);
print ftosa(result_erc,"%lf",3,2);
print ftosa(result_mdp,"%lf",3,2);
print ftosa(result_ew,"%lf",3,2);

```

2. Filtre de Kalman lorsque le bruit de l'équation de mesure est corrélé avec le bruit de l'équation d'état

1. On introduit le processus $\gamma_t = \gamma_{t-1}$ avec $\gamma_0 = 1$. Une autre écriture du modèle espace-état est :

$$\begin{cases} y_t = Z_t \alpha_t + d_t \gamma_t + \epsilon_t \\ \alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t \gamma_t + R_t \eta_t \\ \gamma_t = \gamma_{t-1} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} y_t = Z_t^* \alpha_t^* \\ \alpha_t^* = T_t^* \alpha_{t-1}^* + R_t^* \eta_t^* \end{cases} \quad (1)$$

avec :

$$\begin{aligned} Z_t^* &= \begin{pmatrix} Z_t & d_t & I \end{pmatrix} \\ \alpha_t^* &= \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \gamma_t \\ \epsilon_t \end{pmatrix}, \quad T_t^* = \begin{pmatrix} T_t & c_t & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad R_t^* = \begin{pmatrix} R_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \\ \eta_t^* &= \begin{pmatrix} \eta_t \\ \epsilon_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. On reprend les notations de TR-QAM page 349. Les équations de récursion du filtre de Kalman sont données à la page 350 de TR-QAM. Si on applique celles-ci au modèle (1), on a :

$$\begin{cases} a_{t|t-1}^* = T_t^* a_{t-1}^* \\ P_{t|t-1}^* = T_t^* P_{t-1}^* T_t^{*\top} + R_t^* Q_t^* R_t^{*\top} \\ y_{t|t-1} = Z_t^* a_{t|t-1}^* \\ v_t^* = y_t - y_{t|t-1} \\ F_t^* = Z_t^* P_{t|t-1}^* Z_t^{*\top} \\ a_t^* = a_{t|t-1}^* + P_{t|t-1}^* Z_t^{*\top} F_t^{*-1} v_t^* \\ P_t^* = \left(I_m - P_{t|t-1}^* Z_t^{*\top} F_t^{*-1} Z_t^* \right) P_{t|t-1}^* \end{cases}$$

avec :

$$Q_t^* = \begin{pmatrix} Q_t & C_t^\top \\ C_t & H_t \end{pmatrix}$$

On pose :

$$a_0^* = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0^* = \begin{pmatrix} P_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

On suppose que la matrice P_{t-1}^* est de la forme :

$$P_t^* = \begin{pmatrix} P_t & \mathbf{0} & V_t \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ V_t^\top & \mathbf{0} & W_t \end{pmatrix}$$

On en déduit que $V_t = R_t C_t^\top$ et $W_t = H_t$. On obtient donc :

$$\begin{cases} a_{t|t-1} = T_t a_{t-1} + c_t \\ P_{t|t-1} = T_t P_{t-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top \\ y_{t|t-1} = Z_t a_{t|t-1} + d_t \\ v_t = y_t - y_{t|t-1} \\ F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + 2Z_t R_t C_t^\top + H_t \\ a_t = a_{t|t-1} + (P_{t|t-1} Z_t^\top + R_t C_t^\top) F_t^{-1} v_t \\ P_t = P_{t|t-1} - (P_{t|t-1} Z_t^\top + R_t C_t^\top) F_t^{-1} (Z_t P_{t|t-1} + C_t R_t^\top) \end{cases}$$

3. Régression linéaire sans constante

1. On a :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,K} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

et :

$$\epsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$$

La somme des carrés des résidus $\epsilon^\top \epsilon$ est² :

$$\begin{aligned} \epsilon^\top \epsilon &= (Y - X\beta)^\top (Y - X\beta) \\ &= (Y^\top - \beta^\top X^\top)(Y - X\beta) \\ &= Y^\top Y - \beta^\top X^\top Y - Y^\top X\beta + \beta^\top X^\top X\beta \\ &= Y^\top Y - 2\beta^\top X^\top Y + \beta^\top X^\top X\beta \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{\text{OLS}} &= \arg \min \epsilon^\top \epsilon \\ &= \arg \min Y^\top Y - 2\beta^\top X^\top Y + \beta^\top X^\top X\beta \\ &= \arg \min \frac{1}{2} \beta^\top (X^\top X) \beta - \beta^\top (X^\top Y) \end{aligned}$$

$\hat{\beta}_{\text{OLS}}$ est donc la solution du programme quadratique avec $Q = X^\top X$ et $R = X^\top Y$ (TR-QAM, page 86).

2. (a) On considère qu'il y a une constante dans les variables explicatives. On note $X = (\mathbf{1} \quad X_\star)$ avec X_\star la matrice des exogènes qui ne contient pas de constante. On pose aussi :

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_\star \end{pmatrix}$$

La condition de premier ordre du programme quadratique précédent est :

$$Q\hat{\beta} = R \Leftrightarrow X^\top X\hat{\beta} = X^\top Y$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \mathbf{1}^\top \mathbf{1} \hat{\beta}_0 + \mathbf{1}^\top X_\star \hat{\beta}_\star &= \mathbf{1}^\top Y \\ X_\star^\top \mathbf{1} \hat{\beta}_0 + X_\star^\top X_\star \hat{\beta}_\star &= X_\star^\top Y \end{cases}$$

Si les résidus sont centrés, on doit vérifier que $\mathbf{1}^\top \hat{\epsilon} = 0$ ou encore :

$$\mathbf{1}^\top (Y - \hat{\beta}_0 \mathbf{1} - \hat{\beta}_\star X_\star) = 0$$

Or on a³ :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^\top (Y - \hat{\beta}_0 \mathbf{1} - \hat{\beta}_\star X_\star) &= \mathbf{1}^\top Y - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_0 \mathbf{1} - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_\star X_\star \\ &= \mathbf{1}^\top \mathbf{1} \hat{\beta}_0 + \mathbf{1}^\top X_\star \hat{\beta}_\star - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_0 \mathbf{1} - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_\star X_\star \\ &= \text{trace}(\mathbf{1}^\top \mathbf{1} \hat{\beta}_0) + \text{trace}(\mathbf{1}^\top X_\star \hat{\beta}_\star) - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_0 \mathbf{1} - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_\star X_\star \\ &= \text{trace}(\mathbf{1}^\top \hat{\beta}_0 \mathbf{1}) + \text{trace}(\mathbf{1}^\top \hat{\beta}_\star X_\star) - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_0 \mathbf{1} - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_\star X_\star \\ &= \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_0 \mathbf{1} + \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_\star X_\star - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_0 \mathbf{1} - \mathbf{1}^\top \hat{\beta}_\star X_\star \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Comme $Y^\top X\beta$ est un scalaire, on a $Y^\top X\beta = (Y^\top X\beta)^\top = \beta^\top X^\top Y$.

3. On utilise ici le fait que $\text{trace}(a) = a$ si a est un scalaire et que $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ si la multiplication matricielle BA est définie.

L'inclusion d'une constante dans X permet donc de centrer les résidus. En revanche, s'il n'y a pas de constante dans X , il n'y a aucune raison que les résidus soient centrés.

- (b) Pour que les résidus soient centrés, il faut ajouter la contrainte $\mathbf{1}^\top \epsilon = 0$. On a :

$$\mathbf{1}^\top \epsilon = \mathbf{1}^\top Y - \mathbf{1}^\top X\beta$$

La contrainte s'exprime donc de la façon suivante :

$$\mathbf{1}^\top X\beta = \mathbf{1}^\top Y$$

Le programme d'optimisation devient :

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \arg \min \frac{1}{2} \beta^\top (X^\top X) \beta - \beta^\top (X^\top Y) \\ \text{s.c. } &(\mathbf{1}^\top X) \beta = (\mathbf{1}^\top Y) \end{aligned}$$

On a encore un programme quadratique avec $Q = X^\top X$, $R = X^\top Y$, $A = \mathbf{1}^\top X$ et $B = \mathbf{1}^\top Y$ (TR-QAM, page 79).

- (c) Pour transformer le problème implicite précédent en problème explicite, on considère la paramétrisation (TR-QAM, page 126) :

$$\beta = C\gamma + D$$

avec C la base orthonormale associée au noyau de la matrice $A = \mathbf{1}^\top X$ et :

$$\begin{aligned} D &= (A^\top A)^* A^\top B \\ &= (X^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top X)^* X^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top Y \end{aligned}$$

avec $(A^\top A)^*$ l'inverse de Moore-Penrose de la matrice $A^\top A$. Comme β est de dimension $K \times 1$, les matrices C , γ et D sont de dimensions respectives $K \times (K - 1)$, $(K - 1) \times 1$ et $K \times 1$. La fonction objectif devient :

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \frac{1}{2} \beta^\top (X^\top X) \beta - \beta^\top (X^\top Y) \\ &= \frac{1}{2} (C\gamma + D)^\top (X^\top X) (C\gamma + D) - (C\gamma + D)^\top (X^\top Y) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^\top C^\top X^\top X C \gamma + D^\top X^\top X C \gamma + \gamma^\top C^\top X^\top X D + D^\top X^\top X D) - \\ &\quad \gamma^\top C^\top X^\top Y - D^\top X^\top Y \\ &= \frac{1}{2} \gamma^\top (C^\top X^\top X C) \gamma + \gamma^\top (C^\top X^\top X D - C^\top X^\top Y) + \left(\frac{1}{2} D^\top X^\top X D - D^\top X^\top Y \right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\hat{\gamma} = (C^\top X^\top X C)^{-1} C^\top X^\top (Y - XD)$$

et :

$$\hat{\beta} = C (C^\top X^\top X C)^{-1} C^\top X^\top (Y - XD) + D$$

La solution analytique des moindres carrés ordinaires pour centrer les résidus lorsqu'il n'y a pas de constante consiste donc à :

- i. calculer C la base orthonormale associée au noyau de la matrice $\mathbf{1}^\top X$;
- ii. calculer $D = (X^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top X)^* X^\top \mathbf{1} \mathbf{1}^\top Y$;
- iii. en déduire $\hat{\beta} = C (C^\top X^\top X C)^{-1} C^\top X^\top (Y - XD) + D$.

3. (a) Si on inclut une constante dans la régression, cela revient à modéliser le rendement des hedge funds comme la somme d'une composante α et d'une composante β (TR-QAM, page 361). D'un point de vue de la réplication des hedges funds, il n'est pas possible cependant de répliquer la composante α . On peut donc envisager d'omettre la constante dans la régression. Dans ce cas, cela revient à expliquer une partie de l'alpha par du bêta. Dans ce dernier cas, on aura donc des positions *léveragées* par rapport à celles obtenues avec le modèle de régression avec constante.
- (b) Pour satisfaire les contraintes UCITS, il ne faut pas excéder un levier de 2, c'est-à-dire que la somme des valeurs absolues des expositions ne doit pas dépasser 200%. Le programme d'optimisation devient⁴ :

$$\hat{\beta} = \arg \min \frac{1}{2} \beta^\top (X^\top X) \beta - \beta^\top (X^\top Y)$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \mathbf{1}^\top X \beta = \mathbf{1}^\top Y \\ \sum_{k=1}^K |\beta_k| \leq 2 \end{cases}$$

On n'a plus un programme quadratique puisque l'on a une contrainte fortement non-linéaire $\sum_{k=1}^K |\beta_k| \leq 2$. On considère donc un programme augmenté avec (TR-QAM, pages 115-116) :

$$\beta_k = \beta_k^+ - \beta_k^-$$

avec $\beta_k^+ \geq 0$ et $\beta_k^- \geq 0$. On note :

$$\beta = \begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^+ \\ \beta^- \end{pmatrix}$$

$$= \Gamma \beta_\star$$

Sous cette forme, la contrainte UCITS s'exprime facilement : $\mathbf{1}^\top \beta_\star \leq 2$. On obtient donc un programme quadratique en β_\star :

$$\hat{\beta}_\star = \arg \min \frac{1}{2} \beta_\star^\top Q \beta_\star - \beta_\star^\top R$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} A \beta_\star = \mathbf{1}^\top Y \\ \mathbf{1}^\top \beta_\star \leq 2 \\ \mathbf{0} \leq \beta_\star \end{cases}$$

avec :

$$Q = \begin{pmatrix} X^\top X & -X^\top X \\ -X^\top X & X^\top X \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} X^\top Y \\ -X^\top Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top X & -\mathbf{1}^\top X \end{pmatrix}$$

On en déduit que la solution satisfaisant la contrainte UCITS est :

$$\hat{\beta} = \Gamma \hat{\beta}_\star$$

4. On peut omettre la contrainte portant sur les résidus centrés.

4. Méthode généralisée des moments

1. Soit $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$. Pour $m \geq 1$, on a :

$$\mathbb{E}[X^m] = \int_0^\infty x^m \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dx$$

On considère les changements de variable $y = \sigma^{-1}(\ln x - \mu)$ et $z = y - \sigma$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^m] &= \int_{-\infty}^\infty \exp(m\mu + m\sigma y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \\ &= \exp(m\mu) [\Phi(y)]_{-\infty}^\infty + \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2 + m\sigma y\right) dy \\ &= \exp(m\mu) + \exp\left(\frac{1}{2}m^2\sigma^2\right) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - m\sigma)^2\right) dy \\ &= \exp(m\mu) + \exp\left(\frac{1}{2}m^2\sigma^2\right) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ &= \exp(m\mu) + \exp\left(\frac{1}{2}m^2\sigma^2\right) [\Phi(z)]_{-\infty}^\infty \\ &= \exp\left(m\mu + \frac{1}{2}m^2\sigma^2\right) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)} \\ \mathbb{E}[X^2] &= e^{(2\mu + 2\sigma^2)} \\ \text{var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] \\ &= e^{(2\mu + 2\sigma^2)} - e^{(2\mu + \sigma^2)} \\ &= e^{(2\mu + \sigma^2)} (e^{\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

Pour utiliser la méthode GMM, on doit donc spécifier les moments empiriques suivants (TR-QAM, pages 278) :

$$\begin{aligned} h_{t,1}(\mu, \sigma) &= x_t - e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)} \\ h_{t,2}(\mu, \sigma) &= \left(x_t - e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}\right)^2 - e^{(2\mu + \sigma^2)} (e^{\sigma^2} - 1) \end{aligned}$$

Le programme Gauss correspondant est donné dans l'encadré 2, alors que l'encadré 3 présente les résultats. Sur cet exemple, on a $\hat{\mu}_{\text{GMM}} = 5,06$ et $\hat{\sigma}_{\text{GMM}} = 0,92$.

2. On a $u_t = y_t - x_t^\top \beta$ et :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[u_t] = 0 \\ \mathbb{E}[u_t^2] = \sigma^2 \\ \mathbb{E}[u_t x_t] = 0 \end{cases}$$

Les deux premiers moments centrés sont donc (TR-QAM, page 279) :

$$\begin{aligned} h_{t,1}(\theta) &= y_t - x_t^\top \beta \\ h_{t,2}(\theta) &= (y_t - x_t^\top \beta)^2 - \sigma^2 \end{aligned}$$

Encadré 2 (Programme d'estimation GMM d'une loi-lognormale)

```

n = 1000;
x_ln = exp(5 + rndn(n,1));
sv = 1|2;

proc H_LN(theta);
  local mu,sigma,m1,m2,M;

  mu = theta[1];
  sigma = sqrt(theta[2]^2);

  m1 = exp(mu + 0.5 * sigma^2);
  m2 = exp(2 * mu + sigma^2) * (exp(sigma^2) - 1);

  M = zeros(n,2);
  M[.,1] = x_ln - m1;
  M[.,2] = (x_ln - m1)^2 - m2;

  retp(M);
endp;

{theta,stderr,Mcov,Qmin} = regGMM(0,0,&H_LN,sv,0,0);

```

Encadré 3 (Résultats du programme d'estimation GMM d'une loi-lognormale)

```

=====
regGMM - Generalized Method of Moments                      10/12/2011  11:10 am
=====

Total observations:                                1000
Missing observations:                               0
Usable observations:                               1000
Valid cases:                                       1000

Number of parameters:                              2
Number of unrestricted parameters:                 2
Number of moments:                                 2
Degrees of freedom:                                998

Value of the criterion function:                    0.00000

Parameters      estimates      std.err.      t-statistic      p-value
-----
P01              5.057032      0.038121      132.657837      0.000000
P02              0.917197      0.036394      25.201840       0.000000

Covariance matrix: inverse of the negative Hessian.

```

Le vecteur des paramètres $\theta = (\beta, \sigma)$ étant de dimension $K \times 1$, on doit utiliser d'autres moments pour identifier le modèle si $K > 2$. On utilise donc les conditions d'orthogonalité et on a (TR-QAM, page 280) :

$$h_{t,k+2}(\theta) = (y_t - x_t^\top \beta) x_{t,k}$$

Si les résidus sont hétéroscédastiques $\text{var}(u_t) = \sigma^2(1 + \alpha z_t)$, le deuxième moment devient :

$$h_{t,2}(\theta) = (y_t - x_t^\top \beta)^2 - \sigma^2(1 + \alpha z_t)$$

Contrairement au modèle précédent qui est sur-identifié⁵, celui-ci est juste identifié puisque la dimension de $\theta = (\beta, \sigma, \alpha)$ est $K + 2$.

3. (a) Avant de donner les deux premiers moments centrés du modèle tobit, on va étudier les moments de la distribution normale tronquée et censurée.

- i. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et $\tilde{X} = X | X \geq x_*$ la variable aléatoire tronquée à gauche. L'expression de la densité de \tilde{X} est :

$$f_{\tilde{X}}(x) = \frac{\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left(1 - \Phi\left(\frac{x_*-\mu}{\sigma}\right)\right)}$$

On pose $\alpha = \sigma^{-1}(x_* - \mu)$. On a⁶ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{X}] &= \frac{1}{1 - \Phi(\alpha)} \int_{x_*}^{\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx \\ &= \frac{1}{1 - \Phi(\alpha)} \int_{\alpha}^{\infty} (\mu + \sigma y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \\ &= \frac{1}{1 - \Phi(\alpha)} \left(\mu \int_{\alpha}^{\infty} \phi(y) dy + \sigma [-\phi(y)]_{\alpha}^{\infty} \right) \\ &= \mu + \sigma\lambda(\alpha) \end{aligned}$$

avec $\lambda(\alpha)$ l'inverse du ratio de Mills :

$$\lambda(\alpha) = \frac{\phi(\alpha)}{1 - \Phi(\alpha)}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{X}^2] &= \frac{1}{1 - \Phi(\alpha)} \int_{x_*}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dx \\ &= \frac{1}{1 - \Phi(\alpha)} \int_{\alpha}^{\infty} (\mu + \sigma y)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy \\ &= \frac{1}{1 - \Phi(\alpha)} \left(\mu^2 \int_{\alpha}^{\infty} \phi(y) dy + 2\mu\sigma [-\phi(y)]_{\alpha}^{\infty} + \sigma^2 \int_{\alpha}^{\infty} y^2 \phi(y) dy \right) \\ &= \mu^2 + 2\mu\sigma\lambda(\alpha) + \frac{\sigma^2}{1 - \Phi(\alpha)} \left([-y\phi(y)]_{\alpha}^{\infty} + \int_{\alpha}^{\infty} \phi(y) dy \right) \\ &= \mu^2 + 2\mu\sigma\lambda(\alpha) + \sigma^2(1 + \alpha\lambda(\alpha)) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{var}(\tilde{X}) &= \mathbb{E}[\tilde{X}^2] - \mathbb{E}^2[\tilde{X}] \\ &= \mu^2 + 2\mu\sigma\lambda(\alpha) + \sigma^2(1 + \alpha\lambda(\alpha)) - \mu^2 - 2\mu\sigma\lambda(\alpha) - \sigma^2\lambda^2(\alpha) \\ &= \sigma^2(1 - \delta(\alpha)) \end{aligned}$$

5. On a $K + 2$ moments pour $K + 1$ paramètres.

6. On considère le changement de variable $y = \sigma^{-1}(x - \mu)$.

avec :

$$\delta(\alpha) = \lambda(\alpha)(\lambda(\alpha) - \alpha)$$

ii. On note maintenant :

$$\tilde{Y} = \begin{cases} X & \text{si } X \geq x_\star \\ y_\star & \text{si } X < x_\star \end{cases}$$

\tilde{Y} est une aléatoire censurée à gauche. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{Y}] &= \Pr\{Y = y_\star\} \times \mathbb{E}[\tilde{Y} | X < x_\star] + \Pr\{Y \neq y_\star\} \times \mathbb{E}[X | X \geq x_\star] \\ &= \Phi(\alpha) y_\star + (1 - \Phi(\alpha)) \mathbb{E}[\tilde{X}] \\ &= \Phi(\alpha) y_\star + (1 - \Phi(\alpha)) (\mu + \sigma \lambda(\alpha)) \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{Y}^2] &= \Pr\{Y = y_\star\} \times \mathbb{E}[\tilde{Y}^2 | X < x_\star] + \Pr\{Y \neq y_\star\} \times \mathbb{E}[X^2 | X \geq x_\star] \\ &= \Phi(\alpha) y_\star^2 + (1 - \Phi(\alpha)) \mathbb{E}[\tilde{X}^2] \\ &= \Phi(\alpha) y_\star^2 + (1 - \Phi(\alpha)) (\mu^2 + 2\mu\sigma\lambda(\alpha) + \sigma^2(1 + \alpha\lambda(\alpha))) \end{aligned}$$

On note $\beta = \sigma^{-1}(y_\star - \mu)$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{var}(\tilde{Y}) &= \mathbb{E}[\tilde{Y}^2] - \mathbb{E}[\tilde{Y}]^2 \\ &= \Phi(\alpha) y_\star^2 + (1 - \Phi(\alpha)) (\mu^2 + 2\mu\sigma\lambda(\alpha) + \sigma^2(1 + \alpha\lambda(\alpha))) - \\ &\quad \Phi^2(\alpha) y_\star^2 - 2\Phi(\alpha)(1 - \Phi(\alpha))(\mu y_\star + \sigma y_\star \lambda(\alpha)) - \\ &\quad (1 - \Phi(\alpha))^2 (\mu^2 + 2\mu\sigma\lambda(\alpha) + \sigma^2 \lambda^2(\alpha)) \\ &= \Phi(\alpha)(1 - \Phi(\alpha)) y_\star^2 + \Phi(\alpha)(1 - \Phi(\alpha)) \mu^2 + \\ &\quad 2\Phi(\alpha)\phi(\alpha)\mu\sigma + (\phi(\alpha)(\alpha - \phi(\alpha)) + 1 - \Phi(\alpha))\sigma^2 - \\ &\quad 2\Phi(\alpha)(1 - \Phi(\alpha))\mu y_\star - 2\Phi(\alpha)\phi(\alpha)\sigma y_\star \\ &= \Phi(\alpha)(1 - \Phi(\alpha))(y_\star - \mu)^2 - 2\Phi(\alpha)\phi(\alpha)(y_\star - \mu)\sigma + \\ &\quad (1 - \Phi(\alpha))(1 + \lambda(\alpha)(\alpha - \phi(\alpha)))\sigma^2 \\ &= \Phi(\alpha)(1 - \Phi(\alpha))\beta^2\sigma^2 - 2\Phi(\alpha)\phi(\alpha)\beta\sigma^2 + \\ &\quad (1 - \Phi(\alpha))(1 - \delta(\alpha) - \lambda(\alpha)\phi(\alpha) + \lambda^2(\alpha))\sigma^2 \\ &= \sigma^2(1 - \Phi(\alpha))(\Phi(\alpha)\beta^2 - 2\Phi(\alpha)\lambda(\alpha)\beta + 1 - \delta(\alpha) - \lambda(\alpha)\phi(\alpha) + \lambda^2(\alpha)) \\ &= \sigma^2(1 - \Phi(\alpha))\left((1 - \delta(\alpha)) + (\beta - \lambda(\alpha))^2\Phi(\alpha)\right) \end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned} -\Phi(\alpha)\lambda^2(\alpha) - \lambda(\alpha)\phi(\alpha) + \lambda^2(\alpha) &= \lambda^2(\alpha)(-\Phi(\alpha) - (1 - \Phi(\alpha)) + 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

iii. Afin de bien illustrer la différence entre la troncature et la censure, on a reporté sur les graphiques 1 et 2 les densités correspondantes de \tilde{X} et \tilde{Y} lorsque $\mu = 2$, $\sigma = 3$ et $y_\star = x_\star = 1$. À titre d'illustration, on a $\mathbb{E}[\tilde{X}] = 3,7955$, $\mathbb{E}[\tilde{X}^2] = 18,3864$, $\sigma(\tilde{X}) = 1,9952$, $\mathbb{E}[\tilde{Y}] = 2,7627$, $\mathbb{E}[\tilde{Y}^2] = 11,9632$, et $\sigma(\tilde{Y}) = 2,0810$.

iv. On peut donc maintenant donner les deux premiers moments centrés du modèle tobit $y_t = \max(0, x_t\beta + u_t)$ avec $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On a $\mu = x_t\beta$ et $y_\star = 0$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} h_{t,1}(\beta, \sigma) &= y_t - (1 - \Phi(\alpha))(x_t\beta + \sigma\lambda(\alpha)) \\ h_{t,2}(\beta, \sigma) &= h_{t,1}^2(\beta, \sigma) - \sigma^2(1 - \Phi(\alpha))\left((1 - \delta(\alpha)) + (\alpha - \lambda(\alpha))^2\Phi(\alpha)\right) \end{aligned}$$

avec $\alpha = -(x_t\beta)/\sigma$, $\lambda(\alpha) = \phi(\alpha)/(1 - \Phi(\alpha))$ et $\delta(\alpha) = \lambda(\alpha)(\lambda(\alpha) - \alpha)$.

FIGURE 1 – Densité de la variable aléatoire tronquée \tilde{X}

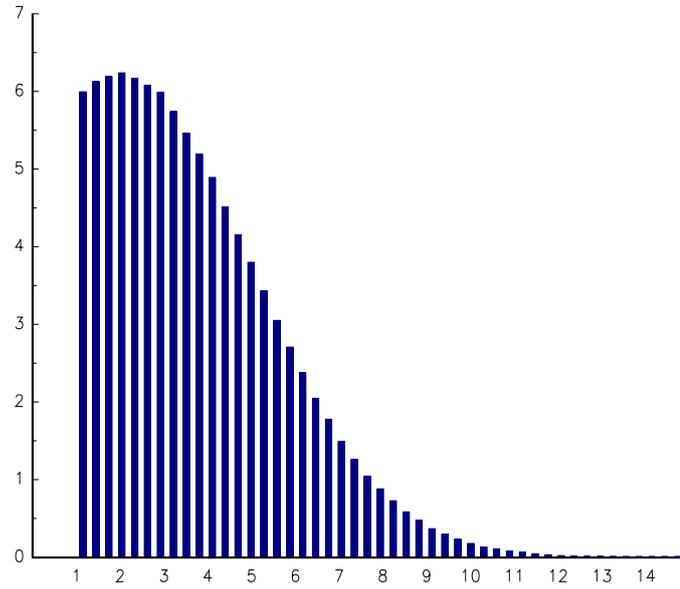
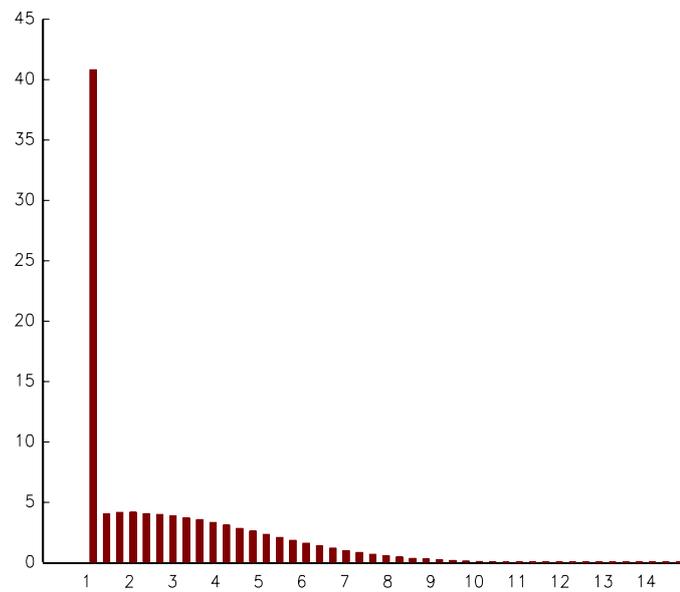


FIGURE 2 – Densité de la variable aléatoire censurée \tilde{Y}



- (b) Les encadrés 5 et 6 présentent le programme de la méthode simulée des moments (TR-QAM, page 283), ainsi que les résultats. À titre de comparaison, on reporte le programme GMM dans l'encadré 4. Avec la méthode GMM, on obtient $\hat{\beta}_{\text{GMM}} = 1,06$ et $\hat{\sigma}_{\text{GMM}} = 0,48$. Avec la méthode simulée des moments, on a des estimations proches puisque $\hat{\beta}_{\text{SMM}} = 1,01$ et $\hat{\sigma}_{\text{SMM}} = 0,53$.

Encadré 4 (Programme d'estimation GMM du modèle Tobit)

```

rndseed 123456;

n = 1000;

x_tobit = rndu(n,1);
beta = 1;
u = 0.5 * rndn(n,1);
y = beta * x_tobit + u;
y_tobit = y .* (y .> 0);

sv = 1|1;

proc H_TOBIT_GMM(theta);
  local beta,sigma,alpha,mu,Phi,lambda,delta,m1,m2,M;

  beta = theta[1];
  sigma = sqrt(theta[2]^2);

  mu = beta .* x_tobit;
  alpha = - mu ./ sigma;
  Phi = cdfn(alpha);
  lambda = pdfn(alpha) ./ (1 - Phi);
  delta = lambda .* (lambda - alpha);

  m1 = Phi .* 0 + (1 - Phi) .* (mu + sigma .* lambda);
  m2 = sigma^2 .* (1 - Phi) .* ( (1 - delta) + (alpha - lambda)^2 .* Phi );

  M = zeros(n,2);
  M[.,1] = y_tobit - m1;
  M[.,2] = (y_tobit - m1)^2 - m2;

  retp(M);
endp;

{theta,stderr,Mcov,Qmin} = regGMM(0,0,&H_TOBIT_GMM,sv,0,0);

```

Encadré 5 (Programme d'estimation SMM du modèle Tobit)

```

proc H_TOBIT_SMM(theta);
  local beta,sigma,y_smm,y_tobit_smm,m1,m2,M;

  beta = theta[1];
  sigma = sqrt(theta[2]^2);

  rndseed 123;
  y_smm = beta .* x_tobit + sigma * rndn(n,1);
  y_tobit_smm = y_smm .* (y_smm .> 0);

  m1 = meanc(y_tobit_smm);
  m2 = stdc(y_tobit_smm)^2;

  M = zeros(n,2);
  M[.,1] = y_tobit - m1;
  M[.,2] = (y_tobit - m1)^2 - m2;

  retp(M);
endp;

{theta,stderr,Mcov,Qmin} = regGMM(0,0,&H_TOBIT_SMM,sv,0,0);

```

Encadré 6 (Résultats de l'estimation SMM du modèle Tobit)

```

=====
regGMM - Generalized Method of Moments                                10/12/2011  11:07 am
=====

Total observations:                                                1000
Missing observations:                                             0
Usable observations:                                             1000
Valid cases:                                                     1000

Number of parameters:                                             2
Number of unrestricted parameters:                               2
Number of moments:                                               2
Degrees of freedom:                                              998

Value of the criterion function:                                  0.00000

Parameters      estimates      std.err.      t-statistic      p-value
-----
P01              1.013257      0.037996      26.667744      0.000000
P02              0.533073      0.020113      26.503564      0.000000

Covariance matrix: inverse of the negative Hessian.

```

5. Modèles structurels à composantes inobservables

1. (a) On utilise la représentation espace-état canonique donnée à la page 349 de TR-QAM. Pour le modèle M1, on a $Z_t = 1$, $\alpha_t = \mu_t$, $d_t = 0$, $H_t = \sigma_\varepsilon^2$, $T_t = 1$, $c_t = 0$, $R_t = 1$ et $Q_t = \sigma_\eta^2$. Pour le modèle M2, on obtient $Z_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix}$, $d_t = 0$, $H_t = \sigma_\varepsilon^2$, $T_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $R_t = I$ et $Q_t = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\zeta^2 \end{pmatrix}$. L'écriture espace-état est donc la suivante (TR-QAM, page 355) :

$$\begin{cases} y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_t \\ \begin{pmatrix} \mu_t \\ \beta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t \\ \zeta_t \end{pmatrix} \end{cases}$$

- (b) Ces processus sont intégrés d'ordre 1. On doit donc trouver leur forme stationnaire pour en déduire leur densité spectrale. Pour le modèle M1, on a (TR-QAM, page 401) :

$$\begin{aligned} (1-L)y_t &= (\mu_t + \varepsilon_t) - (\mu_{t-1} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= (\mu_t - \mu_{t-1}) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \\ &= \eta_t + (1-L)\varepsilon_t \end{aligned}$$

Il est évident que $\eta_t + (1-L)\varepsilon_t$ est stationnaire, on en déduit donc que la forme stationnaire de y_t est $S(y_t) = (1-L)y_t$. Comme les processus η_t et ε_t sont indépendants, la densité spectrale associée est donc⁷ :

$$\begin{aligned} 2\pi f_{S(y_t)}(\lambda) &= \sigma_\eta^2 + |1 - e^{-i\lambda}|^2 \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\eta^2 + |1 - (\cos(-\lambda) + i \sin(-\lambda))|^2 \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\eta^2 + |1 - (\cos \lambda - i \sin \lambda)|^2 \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\eta^2 + |(1 - \cos \lambda) + i \sin \lambda|^2 \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\eta^2 + \left((1 - \cos \lambda)^2 + \sin^2 \lambda \right) \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\eta^2 + (1 - 2 \cos \lambda + \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\eta^2 + 2(1 - \cos \lambda) \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Pour le modèle M2, on a :

$$\begin{aligned} (1-L)y_t &= (\mu_t + \varepsilon_t) - (\mu_{t-1} + \varepsilon_{t-1}) \\ &= (\mu_t - \mu_{t-1}) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \\ &= \beta_{t-1} + \eta_t + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \end{aligned}$$

$(1-L)y_t$ n'est pas stationnaire puisque le processus β_t est intégré d'ordre 1. On a :

$$\begin{aligned} (1-L)^2 y_t &= (1-L)(\beta_{t-1} + \eta_t + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})) \\ &= (\beta_{t-1} - \beta_{t-2}) + (\eta_t - \eta_{t-1}) + (1-L)^2 \varepsilon_t \\ &= \zeta_{t-1} + (1-L)\eta_t + (1-L)^2 \varepsilon_t \end{aligned}$$

C'est donc la somme de trois processus stationnaires indépendants, on en déduit que la forme

7. On utilise le fait que les fonctions \cos et \sin sont respectivement paire et impaire, que $\cos^2 x + \sin^2 x$ est égal à 1 et que le module du nombre complexe $a + ib$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$.

stationnaire de y_t est $S(y_t) = (1 - L)^2 y_t$. On remarque que⁸ :

$$\begin{aligned} g_\lambda \left((1 - L)^2 \right) &= 2(1 - \cos \lambda) g_\lambda (1 - L) \\ &= 4(1 - \cos \lambda)^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que (TR-QAM, page 401) :

$$f_{S(y_t)}(\lambda) = \frac{\sigma_\zeta^2 + 2(1 - \cos \lambda) \sigma_\eta^2 + 4(1 - \cos \lambda)^2 \sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$$

- (c) On a représenté des densités spectrales des modèles M1 et M2 sur le graphique 3 lorsque $\sigma_\varepsilon = \sigma_\eta = \sigma_\zeta = 1$. On voit que celles-ci sont confondues pour les basses fréquences et que la différence entre les deux processus vient de la dynamique sur les hautes fréquences.
2. (a) μ_t est une tendance stochastique, β_t est une composante AR(1) que l'on peut assimiler à une composante de retour à la moyenne si $\phi < 0$ et γ_t est une composante saisonnière stochastique. Si $\sigma_\omega = 0$, on a :

$$\gamma_{t-s+1} + \dots + \gamma_{t-1} + \gamma_t = 0$$

Comme $\gamma_{t-s+2} + \dots + \gamma_t + \gamma_{t+1} = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \gamma_{t+1} &= -(\gamma_{t-s+2} + \dots + \gamma_t) \\ &= \gamma_{t-s+1} \end{aligned}$$

On a donc une composante saisonnière déterministe de période s . Par exemple, si $s = 4$, on obtient :

$$\begin{cases} \gamma_{t+1} = \gamma_{t-3} = \gamma_{t-7} = \dots \\ \gamma_{t+2} = \gamma_{t-2} = \gamma_{t-6} = \dots \\ \gamma_{t+3} = \gamma_{t-1} = \gamma_{t-5} = \dots \\ \gamma_{t+4} = \gamma_t = \gamma_{t-4} = \dots \end{cases}$$

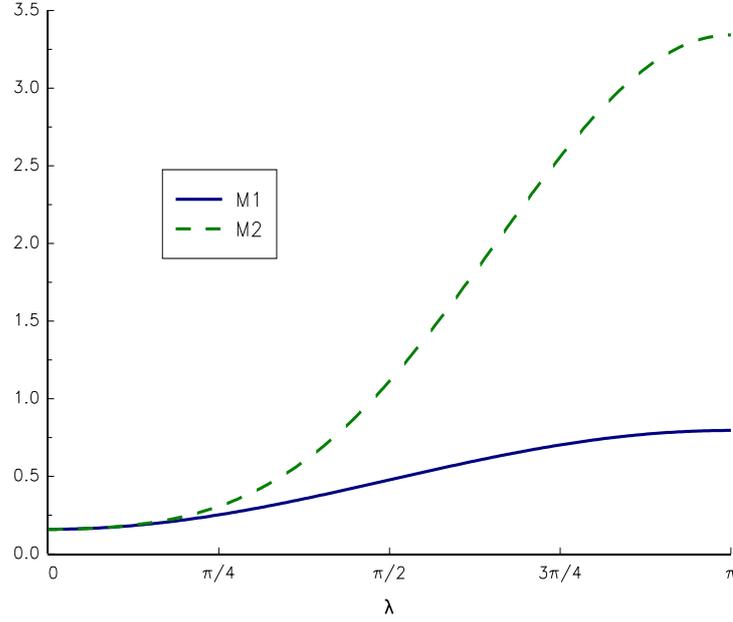
Le processus se répète donc toutes les quatre périodes. Si $\sigma_\omega \neq 0$, on a $\gamma_{t-s+1} + \dots + \gamma_{t-1} + \gamma_t = \omega_t$ et $\gamma_{t-s+2} + \dots + \gamma_t + \gamma_{t+1} = \omega_{t+1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \gamma_{t+1} &= \omega_{t+1} - (\gamma_{t-s+2} + \dots + \gamma_t) \\ &= \omega_{t+1} - (\omega_t - \gamma_{t-s+1}) \\ &= \gamma_{t-s+1} + \omega_{t+1} - \omega_t \end{aligned}$$

8. Une autre façon de trouver ce résultat est de remarquer que $(1 - L)^2 = 1 - 2L + L^2$. On a donc :

$$\begin{aligned} g_\lambda \left((1 - L)^2 \right) &= \left| 1 - 2e^{-i\lambda} + (e^{-i\lambda})^2 \right|^2 \\ &= \left| 1 - 2e^{-i\lambda} + e^{-2i\lambda} \right|^2 \\ &= |(1 - 2\cos \lambda + \cos 2\lambda) + i(2\sin \lambda - \sin 2\lambda)|^2 \\ &= (1 - 2\cos \lambda + \cos 2\lambda)^2 + (2\sin \lambda - \sin 2\lambda)^2 \\ &= 1 - 4\cos \lambda + 4\cos^2 \lambda + 2\cos 2\lambda - 4\cos \lambda \cos 2\lambda + \cos^2 2\lambda + \\ &\quad 4\sin^2 \lambda - 4\sin \lambda \sin 2\lambda + \sin^2 2\lambda \\ &= 6 - 4\cos \lambda + 2\cos 2\lambda - 4(\cos \lambda \cos 2\lambda + \sin \lambda \sin 2\lambda) \\ &= 6 - 4\cos \lambda + 2\cos 2\lambda - 4\cos(\lambda - 2\lambda) \\ &= 6 - 8\cos \lambda + 2\cos 2\lambda \\ &= 4 - 8\cos \lambda + 2(1 + \cos 2\lambda) \\ &= 4 - 8\cos \lambda + 2(1 + \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) \\ &= 4 - 8\cos \lambda + 4\cos^2 \lambda \\ &= 4(1 - \cos \lambda)^2 \end{aligned}$$

FIGURE 3 – Densité spectrale des modèles M1 et M2



On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t-s+1} [\gamma_{t+1}] &= \mathbb{E}_{t-s+1} [\gamma_{t-s+1} + \omega_{t+1} - \omega_t] \\ &= \gamma_{t-s+1}\end{aligned}$$

On a donc montré que γ_t est une composante saisonnière stochastique.

(b) On a :

$$\begin{aligned}z_t &= (1-L)(1-L^s)y_t \\ &= (1-L^s)\eta_t + (1-L)(1-L^s)\beta_t + (1-L)(1-L^s)\varepsilon_t + \\ &\quad (1-L)(1-L^s)\gamma_t\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}(1-L)(1-L^s)\gamma_t &= (\gamma_t - \gamma_{t-1}) - (\gamma_{t-s} - \gamma_{t-s-1}) \\ &= (\gamma_t - \gamma_{t-s}) - (\gamma_{t-1} - \gamma_{t-s-1}) \\ &= (\omega_t - \omega_{t-1}) - (\omega_{t-1} - \omega_{t-2}) \\ &= \omega_t - 2\omega_{t-1} + \omega_{t-2} \\ &= (1-L)^2\omega_t\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(1-L)(1-L^s)y_t = (1-L^s)\eta_t + (1-L)(1-L^s)\beta_t + (1-L)(1-L^s)\varepsilon_t + (1-L)^2\omega_t$$

Si on suppose que $|\phi| < 1$, alors β_t est stationnaire. Dans ce cas, z_t est stationnaire et on a vérifié que $(1-L)(1-L^s)y_t$ est la forme stationnaire du processus⁹.

9. Pour être parfaitement rigoureux, il faudrait aussi montrer que $(1-L^s)y_t$ n'est pas stationnaire, ce qui est évident.

(c) On note g_λ la fonction génératrice spectrale (TR-QAM, pages 402-403). On a :

$$\begin{aligned} g_\lambda(1 - L^s) &= \left| 1 - (e^{-i\lambda})^s \right|^2 \\ &= |1 - e^{-is\lambda}|^2 \\ &= (1 - \cos s\lambda)^2 + \sin^2 s\lambda \\ &= 2(1 - \cos s\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_\lambda((1 - L)(1 - L^s)) &= g_\lambda(1 - L) g_\lambda(1 - L^s) \\ &= 4(1 - \cos \lambda)(1 - \cos s\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_\lambda\left((1 - \phi L)^{-1}\right) &= \frac{1}{|1 - \phi e^{-i\lambda}|^2} \\ &= \frac{1}{(1 - \phi \cos \lambda)^2 + \phi^2 \sin^2 \lambda} \\ &= \frac{1}{1 - 2\phi \cos \lambda + \phi^2} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} 2\pi f_{S(y_t)}(\lambda) &= g_\lambda(1 - L^s) \sigma_\eta^2 + g_\lambda\left(\frac{(1 - L)(1 - L^s)}{1 - \phi L}\right) \sigma_\zeta^2 + \\ &g_\lambda((1 - L)(1 - L^s)) \sigma_\varepsilon^2 + g_\lambda((1 - L)^2) \sigma_\omega^2 \\ &= 2(1 - \cos s\lambda) \sigma_\eta^2 + \\ &\left(\frac{4(1 - \cos \lambda)(1 - \cos s\lambda)}{1 - 2\phi \cos \lambda + \phi^2}\right) \sigma_\zeta^2 + \\ &4(1 - \cos \lambda)(1 - \cos s\lambda) \sigma_\varepsilon^2 \\ &(4 - 8 \cos \lambda + 4 \cos^2 \lambda) \sigma_\omega^2 \end{aligned}$$

Dans TR-QAM page 403, il est indiqué que :

$$\begin{aligned} g_\lambda((1 - L)(1 - L^s)) &= g_\lambda(1 - L - L^s + L^{s+1}) \\ &= 4 - 4 \cos \lambda - 4 \cos s\lambda + \\ &2 \cos(s - 1)\lambda + 2 \cos(s - 1)\lambda \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, on obtient :

$$\begin{aligned} g_\lambda((1 - L)(1 - L^s)) &= 4 - 4 \cos \lambda - 4 \cos s\lambda + \\ &2(\cos s\lambda \cos \lambda - \sin s\lambda \sin \lambda) + \\ &2(\cos s\lambda \cos \lambda + \sin s\lambda \sin \lambda) \\ &= 4 - 4 \cos \lambda - 4 \cos s\lambda + 4 \cos s\lambda \cos \lambda \\ &= 4(1 - \cos \lambda)(1 - \cos s\lambda) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} 2\pi f_{S(y_t)}(\lambda) &= 2(1 - \cos s\lambda) \sigma_\eta^2 + \\ &\left(\frac{4 - 4 \cos \lambda + \sum_{j=-1}^1 (6|j| - 4) \cos(s + j)\lambda}{1 - 2\phi \cos \lambda + \phi^2}\right) \sigma_\zeta^2 + \\ &4(1 - \cos \lambda)(1 - \cos s\lambda) \sigma_\varepsilon^2 \\ &(4 - 8 \cos \lambda + 4 \cos^2 \lambda) \sigma_\omega^2 \end{aligned}$$

6. Méthode de Whittle

1. Comme u_t et v_t sont indépendants, alors x_t et y_t sont deux processus indépendants. Si on suppose que $|\phi_1| < 1$ et $|\theta_1| < 1$, alors x_t et y_t sont deux processus stationnaires. On en déduit que la densité spectrale de z_t est (TR-QAM, page 399) :

$$\begin{aligned} f_z(\lambda) &= f_x(\lambda) + f_y(\lambda) \\ &= \frac{\sigma_u^2}{2\pi |1 - \phi_1 e^{-i\lambda}|^2} + \frac{\sigma_v^2}{2\pi} |1 - \theta_1 e^{-i\lambda}|^2 \\ &= \frac{\sigma_u^2}{2\pi (1 - 2\phi_1 \cos \lambda + \phi_1^2)} + \frac{\sigma_v^2}{2\pi} (1 - 2\theta_1 \cos \lambda + \theta_1^2) \end{aligned}$$

2. On a représenté la trajectoire simulée sur le graphique 4.
3. Le périodogramme de z_t se calcule à partir de la transformée de Fourier discrète $d(\lambda) = \sum_{t=1}^n z_t e^{-i\lambda t}$. On a (TR-QAM, page 405) :

$$I(\lambda) = \frac{|d(\lambda)|^2}{2\pi n}$$

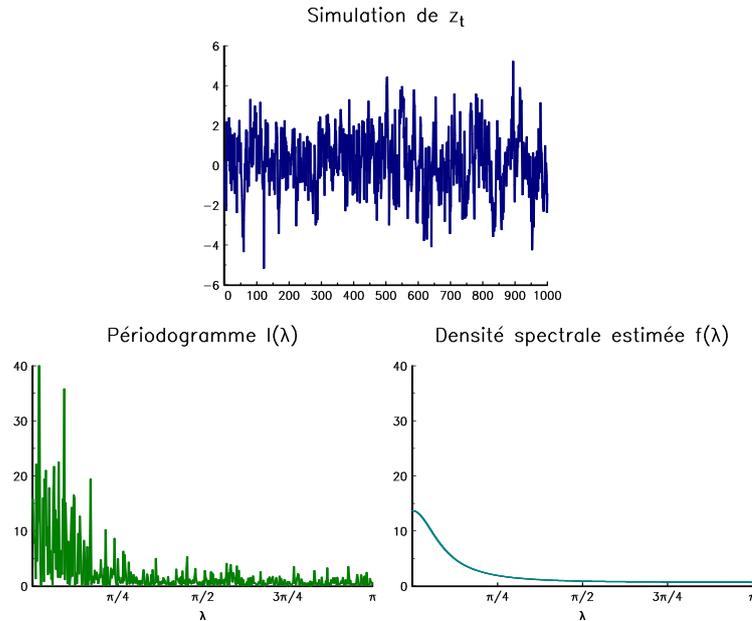
4. La méthode de Whittle consiste à maximiser la log-vraisemblance d'un processus gaussien dans le domaine spectral (TR-QAM, page 406). On a (TR-QAM, page 408) :

$$\ell \simeq -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \ln f(\lambda_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{I(\lambda_j)}{f(\lambda_j)}$$

avec $\lambda_j = 2\pi j/n$ et $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Avec la simulation du graphique 4, on obtient les résultats suivants : $\hat{\phi}_1 = 0,755$, $\hat{\theta}_1 = 0,120$, $\hat{\sigma}_u = 0,896$ et $\hat{\sigma}_v = 0,595$.

5. Le périodogramme et la densité spectrale estimée de z_t sont représentés sur le graphique 4.

FIGURE 4 – Simulation, périodogramme et densité spectrale estimée de z_t



Encadré 7 (Programme d'estimation d'un processus dans le domaine spectral)

```
rndseed 123;

phi1 = 0.75; theta1 = 0.2; sigma_u = 1; sigma_v = 0.5;

n = 1000;
u = rndn(n,1)*sigma_u; x = recserar(u,0,phi1);
v = rndn(n,1)*sigma_v; y = v - theta1*lag1(v); y[1] = v[1];
z = x + y;

{lambda,I} = PDGM(z);

proc sgf(coeff,lambda);
  local phi1,theta1,sigma_u,sigma_v;
  local w,g;
  phi1 = coeff[1]; sigma_u = coeff[2]; theta1 = coeff[3]; sigma_v = coeff[4];
  w = cos(lambda);
  g = (sigma_u^2)/(1-2*phi1*w+phi1^2) +
      (sigma_v^2).*(1-2*theta1*w+theta1^2);
  retp(g);
endp;

sv = 0.75|1|0.2|0.5;
{coeff,stderr,Mcov,Logl} = FD_ml(z,&sgf,sv);
g = sgf(coeff,lambda); q = trunc(rows(lambda)/2);

graphset;
  window3u;
  fonts("simplex simgrma");
  _pdate = ""; _pframe = 0; _pnum = 2;
  _pltype = 6; _plwidth = 8; _paxht = 0.18; _pnumht = 0.18; _ptitlht = 0.30;

setwind(1);
  title("\216Simulation de z]t[");
  xtics(0,1000,100,2);
  ytics(-6,6,2,2);
  xy(0,z);

setwind(2);
  title("\216Periodogramme I(\2021\201)");
  xlabel("\216\2021\201");
  xtics(0,pi,pi/4,0);
  ytics(0,40,10,2);
  lab = " 0 \202p\201/4 \202p\201/2 \2013\202p\201/4 \202p\201";
  asclabel(lab,0);
  xy(lambda[1:q],I[1:q]);

setwind(3);
  title("\216Densite spectrale estimee f(\2021\201)");
  xy(lambda[1:q],g[1:q]);

endwind;
```

7. Calcul de PnL et de MtM d'un swap de variance

1. Le mécanisme du swap de variance est expliqué aux pages 491-494 de TR-QAM.
2. On a (TR-QAM, page 491) :

$$\begin{aligned} \text{PnL} &= N_{\text{vega}} \times \left(\frac{\hat{\sigma}^2 - K^2}{2K} \right) \\ &= 50\,000 \times \left(\frac{26^2 - 20^2}{2 \times 20} \right) \\ &= 345\,000 \text{ euros} \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \text{PnL} &= 50\,000 \times \left(\frac{13^2 - 20^2}{2 \times 20} \right) \\ &= -288\,750 \text{ euros} \end{aligned}$$

4. (a) On utilise la formule de la page 491 de TR-QAM pour calculer la volatilité réalisée :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 100 \times \sqrt{252} \times \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{t=1}^{20} \ln^2 \frac{S_t}{S_{t-1}}} \\ &= 53,29 \end{aligned}$$

On en déduit que le PnL à maturité est :

$$\begin{aligned} \text{PnL}_{0,20} &= N_{\text{vega}} \times \left(\frac{\hat{\sigma}^2 - K^2}{2K} \right) \\ &= 50\,000 \times \left(\frac{53,29^2 - 20^2}{2 \times 20} \right) \\ &= 3\,050\,118 \text{ euros} \end{aligned}$$

- (b) On utilise la formule de décomposition du PnL de la page 492 de TR-QAM. Le PnL réalisé au bout de 5 jours de trading est :

$$\begin{aligned} \text{PnL}_{0,5} &= \frac{50\,000}{2 \times 20 \times 20} \sum_{t=1}^5 \left(100^2 \times \sqrt{252} \times \ln^2 \frac{S_t}{S_{t-1}} - 20^2 \right) \\ &= 713\,899 \text{ euros} \end{aligned}$$

- (c) On utilise la formule du MtM donnée aux pages 497-498 de TR-QAM. On a :

$$\begin{aligned} \text{MtM}_{0,5} &= \text{PnL}_{0,5} + 50\,000 \times \frac{15}{20} \times \left(\frac{24^2 - 20^2}{2 \times 20} \right) \\ &= 713\,899 + 165\,000 \\ &= 878\,899 \text{ euros} \end{aligned}$$

- (d) On a :

$$\begin{aligned} \text{MtM}_{0,5} &= 713\,899 - 71\,250 \\ &= 642\,649 \text{ euros} \end{aligned}$$

5. De façon générale, on a $K = 100 \times \sqrt{K_{\text{var}}}$ avec K_{var} le prix d'exercice du payoff $N \times (\sigma^2 - K_{\text{var}})$.

(a) Il n'y a pas d'effet de smile. On a donc $K_{\text{var}} = \sigma^2(t, S)$ et :

$$\begin{aligned} K &= 100 \times \sqrt{K_{\text{var}}} \\ &= 20 \end{aligned}$$

(b) On doit tenir compte du smile. On peut calculer numériquement K_{var} de deux façons :

i. La première méthode consiste à calculer K_{var} par la méthode de Monte Carlo :

A. on simule le processus à volatilité locale :

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma(t, S) S(t) dW(t)$$

B. on calcule ensuite le prix d'exercice en utilisant la formule de la page 495 de TR-QAM :

$$K_{\text{var}} = \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T \sigma^2(t) dt \right]$$

Dans l'exemple, on a $\sigma(t, S) = 0,2e^{5t}$. Comme $\sigma(t, S)$ ne dépend pas de $S(t)$, on a directement :

$$\begin{aligned} K_{\text{var}} &= \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_0^T 0,2^2 e^{10t} dt \right] \\ &= 0,2^2 \times \frac{1}{T} \times \left[\frac{e^{10t}}{10} \right]_0^T \\ &= 0,2^2 \times \frac{e^{10T} - 1}{10T} \end{aligned}$$

et :

$$K = 20 \times \sqrt{\frac{e^{10T} - 1}{10T}}$$

Pour une maturité de 20 jours, on obtient $K = 24,50$.

ii. La deuxième méthode utilise la formule de la page 496 de TR-QAM :

$$\begin{aligned} K_{\text{var}} &= \frac{2}{T} \left(e^{rT} \int_0^{F_0} \frac{1}{K^2} P(K) dK + \int_{F_0}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K) dK \right) + \\ &\quad \frac{2}{T} \left(rT - \ln \frac{F_0}{S_0} - \left(\frac{S_0}{F_0} e^{rT} - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

A. on calcule l'ensemble des prix de call et put pour une maturité donnée en résolvant numérique l'équations aux dérivées partielles de la page 636 de TR-QAM¹⁰ ; pour cela, on utilise les méthodes de différences finies (TR-QAM, pages 221-232).

B. on calcule la formule précédente en utilisant une quadrature numérique de Gauss-Legendre (TR-QAM, pages 200-208).

6. (a) Il n'y a pas d'effet de smile. On a donc :

$$\begin{aligned} K &= 100 \times \sqrt{\Sigma(T, K)^2} \\ &= 20 \end{aligned}$$

(b) On calcule numériquement la formule (2) en valorisant $P(K)$ et $C(K)$ avec le modèle de Black et Scholes et $\Sigma(T, K) = 0,2 \left(1 + \alpha \ln^2 \frac{K}{S_0} \right)$ avec $\alpha = 1\%$. On obtient $K_{\text{var}} = 0,04$. On en déduit que $K = 20,00$. L'effet du smile est donc négligeable¹¹.

10. En fait, il est préférable de résoudre l'edp *forward* de Dupire, ce qui permet d'avoir en une seule fois l'ensemble des prix d'options pour tous les prix d'exercice K (TR-QAM, page 655).

11. Si $\alpha = 0,4$ et si T est égal à un an, on a $K = 26,70$.

8. Les stratégies optionnelles

1. La stratégie *covered call* est décrite à la page 474 de TR-QAM.
2. La stratégie *strangle* est décrite à la page 465 de TR-QAM alors la stratégie *straddle* est présentée à la page 485 de TR-QAM. L'option *straddle* est un cas particulier de l'option *strangle* lorsque le prix d'exercice du call est égal à celui du put.
3. La stratégie *bull spread* est expliquée à la page 480 de TR-QAM.

(a) À la maturité T , on a :

$$\begin{aligned} \text{PnL} = & (S_T - S_0) + \\ & (C_0(S_0, K_c, T) - \max(0, S_T - K_c)) + \\ & (\max(0, K_p - S_T) - P_0(S_0, K_p, T)) + \end{aligned}$$

avec $K_c = 102\% \times S(0)$, $K_p = 98\% \times S(0)$ et $C_0(K_c, T)$ et $P_0(K_p, T)$ les valeurs du call et du put. On a aussi (TR-QAM, page 481) :

$$\text{PnL} = \begin{cases} (K_p - S_0) + C(K_c) - P(K_p) & \text{si } S_T \leq K_p \\ (S_T - S_0) + C(K_c) - P(K_p) & \text{si } K_p < S_T < K_c \\ (K_c - S_0) + C(K_c) - P(K_p) & \text{si } S_T \geq K_c \end{cases}$$

(b) Le mark-to-market journalier de cette stratégie est :

$$\begin{aligned} \text{MtM}_t = & (S_t - S_{t-1}) + \\ & (C_{t-1}(S_{t-1}, K_c, T - t + 1) - C_t(S_t, K_c, T - t)) + \\ & (P_t(S_t, K_p, T - t) - P_{t-1}(S_t, K_p, T - t + 1)) \end{aligned}$$

avec $C_t(S_t, K_c, T - t)$ et $P_t(S_t, K_p, T - t)$ les valeurs du call et put à la date t . On vérifie que :

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \text{MtM}_t &= \sum_{t=1}^T (S_t - S_{t-1}) + \\ & \sum_{t=1}^T (C_{t-1}(S_{t-1}, K_c, T - t + 1) - C_t(S_t, K_c, T - t)) + \\ & \sum_{t=1}^T (P_t(S_t, K_p, T - t) - P_{t-1}(S_t, K_p, T - t + 1)) \\ &= (S_T - S_0) + \\ & (C_0(S_0, K_c, T) - \max(0, S_T - K_c)) + \\ & (\max(0, K_p - S_T) - P_0(S_0, K_p, T)) + \\ &= \text{PnL} \end{aligned}$$

car :

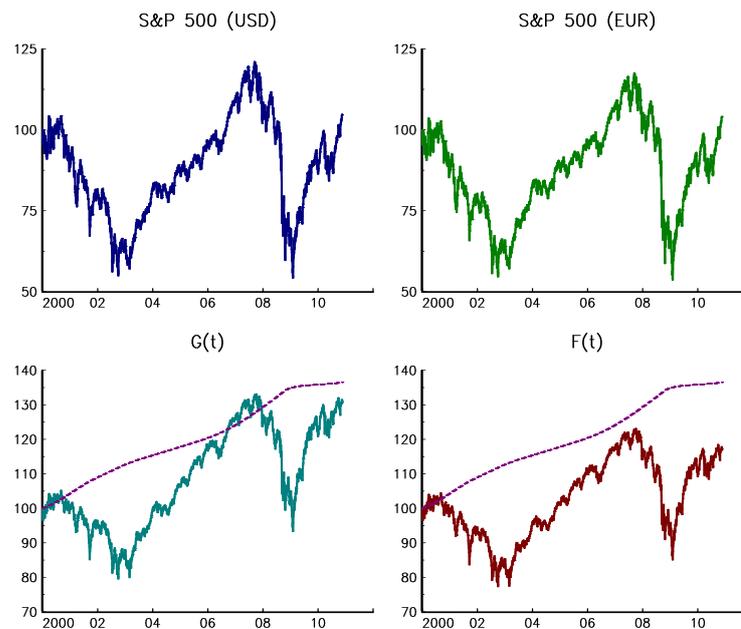
$$\begin{aligned} C_T(S_T, K_c, 0) &= \max(0, S_T - K_c) \\ P_T(S_T, K_p, 0) &= \max(0, K_p - S_T) \end{aligned}$$

- (c) i. On calcule les valeurs du call et put avec la formule de Black et Scholes. On obtient $C_0(100, 102, \frac{1}{12}) = 1,4615$ et $P_0(100, 98, \frac{1}{12}) = 1,4181$. On en déduit que le PnL vaut respectivement $-1,9566$, $0,0434$ et $2,0434$ si S_T est égal à 95, 100 et 102.
- ii. On calcule les valeurs du call et put avec la formule de Black et Scholes. On obtient $C_0(103, 102, \frac{1}{24}) = 2,2167$ et $P_0(103, 98, \frac{1}{24}) = 0,2213$. On en déduit que le mark-to-market est 1,0450 en milieu de mois.

9. Construction d'un backtest

1. Pour couvrir l'indice S&P 500 en euros, on utilise la formule de la page 56 de TR-QAM. On reporte sur le graphique 5 les valeurs du S&P 500 en USD et couvert en EUR. En rebasant les indices à 100 le 31 décembre 1999, la valeur terminale du S&P 500 est 104,60 en USD et 103,93 en EUR couvert.
2. On doit tenir compte des effets de rebalancement mensuel. Pour cela, on utilise le cadre d'analyse développé dans les pages 47-50 de TR-QAM. En posant $G(t) = 100$ à la date du 31 décembre 1999, la valeur de la stratégie $G(t)$ est 130,62 le 31 décembre 2010.
3. Pour tenir compte des frais de gestion, on utilise la formule de la page 51 de TR-QAM. La valeur nette $F(t)$ de la stratégie devient 117,01 le 31 décembre 2010. Sur le graphique 5, on reporte les valeurs de $G(t)$ et $F(t)$.
4. On utilise les formules des pages 58 à 71 de TR-QAM. Le rendement annuel de la stratégie $F(t)$ est 1,4% alors que la volatilité est égale à 9,9%. On en déduit que le ratio de Sharpe¹² est égal à $-0,15$. Le drawdown maximum sur la période est égal à $-30,9\%$. Il commence le 31 octobre 2007 et finit le 9 mars 2009. Le meilleur mois est celui d'avril 2009 avec une performance égale à 6,6% alors que le pire mois est celui d'octobre 2008 avec une perte de $-7,7\%$. Les coefficients de skewness et de kurtosis sont égaux à 0,16 et 8,35.

FIGURE 5 – Résultats de l'exercice 9



12. Pour cela, on construit la stratégie d'investissement non risqué en roulant les taux Euribor 1M. Cette stratégie est égale à 136,53 le 31 décembre 2010. On en déduit que le taux sans risque pour la période étudiée est 2,868%.

10. Construction de portefeuilles diversifiés

1. (a) Le portefeuille de variance minimale est défini à la page 90 de TR-QAM. On obtient les résultats suivants :

i	$\rho = 0\%$			$\rho = 50\%$		
	MV	ERC	MDP	MV	ERC	MDP
1	8,16%	18,18%	18,18%	0,00%	18,18%	18,18%
2	18,37%	27,27%	27,27%	0,00%	27,27%	27,27%
3	73,47%	54,55%	54,55%	100,00%	54,55%	54,55%
$\sigma(x)$	4,29%	4,72%	4,72%	5,00%	6,68%	6,68%

- (b) Le portefeuille ERC est défini à la page 132 de TR-QAM. Les résultats sont donnés dans le tableau précédent.
- (c) Le portefeuille MDP est défini à la page 133 de TR-QAM. Les résultats sont donnés dans le tableau précédent.
- (d) On remarque que les portefeuilles ERC et MDP sont les mêmes. On sait que :
- le portefeuille ERC correspond au portefeuille de marché lorsque la corrélation entre les actifs est uniforme et que tous les actifs présentent le même ratio de Sharpe (TR-QAM, page 132) ;
 - le portefeuille MDP correspond au portefeuille de marché lorsque tous les actifs présentent le même ratio de Sharpe (TR-QAM, page 133).

On en déduit donc que lorsque la corrélation entre les actifs est uniforme, le portefeuille ERC coïncide avec le portefeuille MDP. Une autre façon de démontrer ce résultat est de considérer les propriétés donnés à la page 134 de TR-QAM. On a :

$$w_i \times \frac{\partial \sigma(w)}{\partial w_i} = w_j \times \frac{\partial \sigma(w)}{\partial w_j} \quad (\text{ERC})$$

$$\frac{1}{\sigma_i} \times \frac{\partial \sigma(w)}{\partial w_i} = \frac{1}{\sigma_j} \times \frac{\partial \sigma(w)}{\partial w_j} \quad (\text{MDP})$$

Or on sait que si la corrélation entre les actifs est uniforme, alors le portefeuille ERC (TR-QAM, page 132) satisfait :

$$x_i \propto \frac{1}{\sigma_i}$$

On obtient le résultat désiré. On remarque aussi que le niveau de corrélation uniforme n'a pas d'influence sur le portefeuille. Ceci s'explique par le fait qu'une corrélation uniforme est un modèle avec un seul facteur et que la sensibilité à ce facteur est la même pour tous les actifs. Dans ce cas, le portefeuille ERC consiste à diversifier les risques idiosyncratiques puisque le risque commun est le même pour tous les actifs. Enfin, on remarque que le portefeuille de variance minimale peut conduire à de fortes concentrations.

2. Les résultats deviennent :

i	MV	ERC	MDP
1	2,94%	16,20%	14,29%
2	17,65%	24,29%	21,43%
3	79,41%	59,51%	64,29%
$\sigma(x)$	4,46%	5,15%	4,91%

3. (a) La décomposition d'Euler de la volatilité $\sigma(x) = \sqrt{x^\top \Sigma x}$ d'un portefeuille x est donnée à la page 128 de TR-QAM. On a :

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} = \frac{2\Sigma x}{2\sqrt{x^\top \Sigma x}} = \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n x_i \times \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} &= x^\top \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} \\
 &= x^\top \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\
 &= \frac{x^\top \Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\
 &= \sqrt{x^\top \Sigma x} \\
 &= \sigma(x)
 \end{aligned}$$

(b) Les résultats sont les suivants :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	$\sigma_i(x)$	$\sigma_i(x) / \sigma(x)$
1	20,0%	12,043%	2,409%	37,730
2	30,0%	8,028%	2,409%	37,730
3	50,0%	3,133%	1,567%	24,540

Si on calcule la volatilité, on obtient $\sigma(x) = 6,384\%$. On vérifie donc que :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \sigma_3(x) &= 2,409\% + 2,409\% + 1,567\% \\
 &= \sigma(x)
 \end{aligned}$$

11. Construction de portefeuilles efficients

1. La composition du portefeuille de variance minimale est : $x_1^* = 3,05\%$, $x_2^* = 3,05\%$ et $x_3^* = 93,89\%$.
2. On doit résoudre un sigma-problème (TR-QAM, page 97). La valeur optimale de ϕ est 0,040 et le portefeuille optimal est : $x_1^* = 6,11\%$, $x_2^* = 6,11\%$ et $x_3^* = 87,79\%$.
3. Si la volatilité ex-ante est fixée à 10%, la valeur optimale de ϕ est 0,445 et le portefeuille optimal est : $x_1^* = 37,03\%$, $x_2^* = 37,03\%$ et $x_3^* = 25,94\%$.
4. On remarque que $x_1^* = x_2^*$. C'est tout à fait normal puisque les actifs 1 et 2 ont les mêmes caractéristiques de rendement espéré, de volatilité et de corrélation avec le troisième actif.
5. (a) On obtient les résultats donnés dans le tableau suivant :

i	var. min.	$\sigma(x) = 5\%$	$\sigma(x) = 10\%$
1	8,00%	8,00%	37,03%
2	0,64%	3,66%	37,03%
3	91,36%	87,79%	25,94%
ϕ	0	0,02659	0,44508

- (b) Le programme dual correspondant est (TR-QAM, page 80) :

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \arg \min \frac{1}{2} \lambda^\top \bar{Q} \lambda - \lambda^\top \bar{R} \\ \text{s.c.} \quad &\lambda \geq 0 \end{aligned}$$

avec ¹³ $\bar{Q} = \frac{1}{2} S \Sigma^{-1} S^\top$, $\bar{R} = \frac{1}{2} \phi S \Sigma^{-1} \mu - T$,

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} -8\% \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

λ_1^* est le lagrangien associé à l'exposition minimum de 8% sur le premier actif ($x_1 \geq 8\%$ dans le programme primal et première ligne de S dans le programme dual). $\max(\lambda_2^*, \lambda_3^*)$ est le lagrangien associé à la contrainte d'être complètement investi ($\sum_{i=1}^3 x_i = 100\%$ dans le programme primal et deuxième et troisième lignes de S dans le programme dual). Enfin, les lagrangiens λ_4^* , λ_5^* , λ_6^* sont associés aux contraintes de positivité des poids x_1 , x_2 et x_3 .

- (c) Il suffit de résoudre le programme dual précédent (qui est un programme QP standard) en considérant la bonne valeur de ϕ qui est donnée dans le tableau de résultats de la question 5(a). On obtient $\lambda_1^* = 0,001657$ pour le portefeuille de variance minimale, $\lambda_1^* = 0,000977$ pour le portefeuille de volatilité ex-ante de 5% et $\lambda_1^* = 0$ pour le portefeuille de volatilité ex-ante de 10%.
 - (d) On vérifie que le lagrangien est nul pour le portefeuille de volatilité ex-ante de 10%, puisque la contrainte $x_1 \geq 8\%$ n'est pas saturée. C'est pour le portefeuille de variance minimale que cette contrainte coûte le plus cher. En effet, tout relâchement ε de cette contrainte permet de faire baisser la variance de $0,1657\% \times \varepsilon$.
6. Si on résout le programme de variance minimale avec $x_1 \geq 20\%$, on obtient un portefeuille de volatilité ex-ante égale à 5,46%. Il n'existe donc pas de portefeuille dont la volatilité ex-ante est plus petite que cette borne inférieure. On sait que les contraintes $x_i \geq 0$ ne sont pas saturées dans le programme d'optimisation de variance minimale si l'on impose ou non la contrainte $x_1 \geq 20\%$. Notons \varkappa la borne inférieure de x_1 . D'après les questions précédentes, on sait aussi que $0\% \leq \varkappa \leq$

13. On rappelle que μ et Σ sont le vecteur des rendements espérés et la matrice de covariance.

20%. On cherche donc le portefeuille de variance minimale x^* telle que la contrainte $x_1 \geq \varkappa$ soit saturée et que $\sigma(x^*) = \sigma^* = 5\%$. Dans ce cas, le programme d'optimisation à trois variables se réduit à un problème de variance minimale à deux variables sous la contrainte $x_2 + x_3 = 1 - \varkappa$ puisque $x_1^* = \varkappa$. On a donc (TR-QAM, page 92) :

$$x^\top \Sigma x = x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_2 x_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 + x_3^2 \sigma_3^2 + \varkappa^2 \sigma_1^2 + 2\varkappa x_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + 2\varkappa x_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3$$

La fonction objectif devient :

$$\begin{aligned} x^\top \Sigma x &= (1 - \varkappa - x_3)^2 \sigma_2^2 + 2(1 - \varkappa - x_3) x_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 + x_3^2 \sigma_3^2 + \varkappa^2 \sigma_1^2 + 2\varkappa(1 - \varkappa - x_3) \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + 2\varkappa x_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 \\ &= x_3^2 (\sigma_2^2 - 2\rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2) + 2x_3 ((1 - \varkappa) (\rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_2^2) - \varkappa \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + \varkappa \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3) + (1 - \varkappa)^2 \sigma_2^2 + \varkappa^2 \sigma_1^2 + 2\varkappa(1 - \varkappa) \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial x^\top \Sigma x}{\partial x_3} = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_3^* = \frac{(1 - \varkappa) (\sigma_2^2 - \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3) + \varkappa \sigma_1 (\rho_{1,2} \sigma_2 - \rho_{1,3} \sigma_3)}{\sigma_2^2 - 2\rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2}$$

Le portefeuille de variance minimale est donc :

$$\begin{cases} x_1^* = \varkappa \\ x_2^* = a - (a + c) \varkappa \\ x_3^* = b - (b - c) \varkappa \end{cases}$$

avec $a = (\sigma_3^2 - \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3) / d$, $b = (\sigma_2^2 - \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3) / d$, $c = \sigma_1 (\rho_{1,2} \sigma_2 - \rho_{1,3} \sigma_3) / d$ et $d = \sigma_2^2 - 2\rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2$. Comme on a :

$$\begin{aligned} \sigma^2(x) &= x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + x_3^2 \sigma_3^2 + 2x_1 x_2 \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + 2x_1 x_3 \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 + 2x_2 x_3 \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 \\ &= \varkappa^2 \sigma_1^2 + (a - (a + c) \varkappa)^2 \sigma_2^2 + (b - (b - c) \varkappa)^2 \sigma_3^2 + 2\varkappa(a - (a + c) \varkappa) \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + 2\varkappa(b - (b - c) \varkappa) \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 + 2(a - (a + c) \varkappa)(b - (b - c) \varkappa) \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

on en déduit que la solution optimale \varkappa^* telle que $\sigma(x^*) = \sigma^*$ vérifie une équation du second degré :

$$\alpha \varkappa^2 + 2\beta \varkappa + (\gamma - \sigma^{*2}) = 0$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = \sigma_1^2 + (a + c)^2 \sigma_2^2 + (b - c)^2 \sigma_3^2 - 2(a + c) \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 - 2(b - c) \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 + 2(a + c)(b - c) \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 \\ \beta = -a(a + c) \sigma_2^2 - b(b - c) \sigma_3^2 + a \rho_{1,2} \sigma_1 \sigma_2 + b \rho_{1,3} \sigma_1 \sigma_3 - (a(b - c) + b(a + c)) \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 \\ \gamma = a^2 \sigma_2^2 + b^2 \sigma_3^2 + 2ab \rho_{2,3} \sigma_2 \sigma_3 \end{cases}$$

En remplaçant par les valeurs numériques, les solutions de l'équation du second degré sont $\varkappa_1 = 9,09207\%$ et $\varkappa_2 = -2,98520\%$. La solution optimale est donc $\varkappa^* = 9,09207\%$.

Encadré 8 (Programme de construction de portefeuilles efficients)

```

let sigma = 0.15 0.15 0.05;
let mu = 0.10 0.10 0.05;
let rho = 1.00
         0.50 1.00
         0.20 0.20 1.00;
rho = xpnd(rho);
cov = rho .* sigma .* sigma';

A = ones(1,3); B = 1; C = 0; D = 0; Bounds = (0~1) .* ones(3,1);
{x0,sigma0,retcode} = Qprog_Min_Variance(cov,A,B,C,D,Bounds); phi0 = 0;
{x1,mu1,sigma1,phi1,retcode1} = Qprog_Allocation_Solve(mu,cov,A,B,C,D,Bounds,0.05,2);
{x2,mu2,sigma2,phi2,retcode2} = Qprog_Allocation_Solve(mu,cov,A,B,C,D,Bounds,0.10,2);
print ftosa(100*(x0~x1~x2),"%lf",3,2);
print ftosa(phi0~phi1~phi2,"%lf",3,6);

A = ones(1,3); B = 1; C = 0; D = 0; Bounds = (0~1) .* ones(3,1); Bounds[1,1] = 0.08;
{x0,sigma0,retcode} = Qprog_Min_Variance(cov,A,B,C,D,Bounds);
{x1,mu1,sigma1,phi1,retcode1} = Qprog_Allocation_Solve(mu,cov,A,B,C,D,Bounds,0.05,2);
{x2,mu2,sigma2,phi2,retcode2} = Qprog_Allocation_Solve(mu,cov,A,B,C,D,Bounds,0.10,2);
print ftosa(100*(x0~x1~x2),"%lf",3,2);
print ftosa(phi0~phi1~phi2,"%lf",3,6);

// Calcul du lagrangien par le programme dual
S = -C|A|-A|-eye(3); T = -D|B|-B|zeros(3,1);
Bounds = (0~10) .* ones(6,1);
Q_tilde = 0.5*S*invpd(cov)*S';
R_tilde = 0.5*phi0*S*invpd(cov)*mu - T;
{lambda0,u1,u2,u3,u4,retcode0} = QProg(zeros(6,1),Q_tilde,R_tilde,0,0,0,0,Bounds);
R_tilde = 0.5*phi1*S*invpd(cov)*mu - T;
{lambda1,u1,u2,u3,u4,retcode0} = QProg(zeros(6,1),Q_tilde,R_tilde,0,0,0,0,Bounds);
R_tilde = 0.5*phi2*S*invpd(cov)*mu - T;
{lambda2,u1,u2,u3,u4,retcode0} = QProg(zeros(6,1),Q_tilde,R_tilde,0,0,0,0,Bounds);
print ftosa(lambda0[1]~lambda1[1]~lambda2[1],"%lf",3,6);

A = ones(1,3); B = 1; C = 0; D = 0; Bounds = (0~1) .* ones(3,1); Bounds[1,1] = 0.20;
{x0,sigma0,retcode} = Qprog_Min_Variance(cov,A,B,C,D,Bounds);
print ftosa(100*sigma0,"Lower bound of the volatility = %lf",3,2);

sigma1 = sigma[1]; sigma2 = sigma[2]; sigma3 = sigma[3];
rho12 = rho[1,2]; rho13 = rho[1,3]; rho23 = rho[2,3];
d = (sigma2^2 - 2*rho23*sigma2*sigma3 + sigma3^2);
a = (sigma3^2 - rho23*sigma2*sigma3)/d;
b = (sigma2^2 - rho23*sigma2*sigma3)/d;
c = (sigma1 *(rho12 * sigma2 - rho13 * sigma3))/d;
alpha = sigma1^2 + (a+c)^2*sigma2^2 + (b-c)^2*sigma3^2 - 2*(a+c)*rho12*sigma1*sigma2 -
        2*(b-c)*rho13*sigma1*sigma3 + 2*(a+c)*(b-c)*rho23*sigma2*sigma3;
beta = a*rho12*sigma1*sigma2 + b*rho13*sigma1*sigma3 -
        (a*(b-c)+b*(a+c))*rho23*sigma2*sigma3 - a*(a+c)*sigma2^2 - b*(b-c)*sigma3^2;
gamma_ = a^2 * sigma2^2 + b^2 * sigma3^2 + 2*a*b*rho23*sigma2*sigma3;

sigma_star = 0.05;
xi = real(polyroot(alpha|2*beta|(gamma_-sigma_star^2)));
print ftosa(100*xi,"Solutions = %lf",3,5);

```

12. Dérivation des équations de récursion du filtre de Kalman

1. On a :

$$\begin{aligned}
 a_{t|t-1} &= \mathbb{E}_{t-1} [\alpha_t] \\
 &= \mathbb{E}_{t-1} [T_t \alpha_{t-1} + c_t + R_t \eta_t] \\
 &= T_t \mathbb{E}_{t-1} [\alpha_{t-1}] + c_t \\
 &= T_t a_{t-1} + c_t
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 P_{t|t-1} &= \mathbb{E}_{t-1} [(\alpha_t - a_{t|t-1})(\alpha_t - a_{t|t-1})^\top] \\
 &= \mathbb{E}_{t-1} [(T_t(\alpha_{t-1} - a_{t-1}) + R_t \eta_t)(T_t(\alpha_{t-1} - a_{t-1}) + R_t \eta_t)^\top] \\
 &= \mathbb{E}_{t-1} [T_t(\alpha_{t-1} - a_{t-1})(\alpha_{t-1} - a_{t-1})^\top T_t^\top] + \\
 &\quad \mathbb{E}_{t-1} [T_t(\alpha_{t-1} - a_{t-1})\eta_t^\top R_t^\top] + \mathbb{E}_{t-1} [R_t \eta_t(\alpha_{t-1} - a_{t-1})^\top T_t^\top] + \\
 &\quad \mathbb{E}_{t-1} [R_t \eta_t \eta_t^\top R_t^\top] \\
 &= T_t \mathbb{E}_{t-1} [(\alpha_{t-1} - a_{t-1})(\alpha_{t-1} - a_{t-1})^\top] T_t^\top + R_t \mathbb{E}_{t-1} [\eta_t \eta_t^\top] R_t^\top \\
 &= T_t P_{t-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top
 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
 v_t &= y_t - \mathbb{E}_{t-1} [y_t] \\
 &= y_t - \mathbb{E}_{t-1} [Z_t \alpha_t + d_t + \epsilon_t] \\
 &= y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t
 \end{aligned}$$

Comme $a_{t|t-1}$ est un vecteur gaussien, alors v_t est gaussien. On a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{t-1} [v_t] &= \mathbb{E}_{t-1} [y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t] \\
 &= Z_t \mathbb{E}_{t-1} [\alpha_t - a_{t|t-1}] + \mathbb{E}_{t-1} [\epsilon_t] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 F_t &= \mathbb{E}_{t-1} [(Z_t(\alpha_t - a_{t|t-1}) + \epsilon_t)(Z_t(\alpha_t - a_{t|t-1}) + \epsilon_t)^\top] \\
 &= Z_t \mathbb{E}_{t-1} [(\alpha_t - a_{t|t-1})(\alpha_t - a_{t|t-1})^\top] Z_t^\top + \mathbb{E}_{t-1} [\epsilon_t \epsilon_t^\top] \\
 &= Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + H_t
 \end{aligned}$$

3. On a aussi :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{t-1} [\alpha_t v_t^\top] &= \mathbb{E}_{t-1} [\alpha_t (Z_t(\alpha_t - a_{t|t-1}) + \epsilon_t)^\top] \\
 &= \mathbb{E}_{t-1} [\alpha_t (\alpha_t^\top - a_{t|t-1}^\top) Z_t^\top] + \mathbb{E}_{t-1} [\alpha_t \epsilon_t^\top] \\
 &= \mathbb{E}_{t-1} [(\alpha_t - a_{t|t-1})(\alpha_t^\top - a_{t|t-1}^\top)] Z_t^\top + a_{t|t-1} \mathbb{E}_{t-1} [\alpha_t^\top - a_{t|t-1}^\top] Z_t^\top \\
 &= P_{t|t-1} Z_t^\top
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha_t \\ v_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_t \\ Z_t(\alpha_t - a_{t|t-1}) + \epsilon_t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & \mathbf{0} \\ Z_t & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \epsilon_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -Z_t a_{t|t-1} \end{pmatrix} \\
&= A_t \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \epsilon_t \end{pmatrix} + B_t
\end{aligned}$$

Conditionnellement à l'information \mathcal{I}_{t-1} , le vecteur aléatoire (α_t, v_t) est donc une combinaison linéaire $A_t X_t + B_t$ du vecteur gaussien¹⁴ $X_t = (\alpha_t, \epsilon_t)$. On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} \alpha_t \\ v_t \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} a_{t|t-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{t|t-1} & P_{t|t-1} Z_t^\top \\ Z_t P_{t|t-1} & F_t \end{pmatrix} \right)$$

4. Il vient que :

$$\begin{aligned}
a_t &= \mathbb{E}_t[\alpha_t] \\
&= \mathbb{E}[\alpha_t | v_t = y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t]
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de la distribution conditionnelle d'un vecteur gaussien (TR-QAM, page 139, note de bas de page 45), on obtient directement :

$$a_t = a_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} (y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t)$$

et :

$$P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} Z_t P_{t|t-1}$$

5. Le filtre de Kalman correspond donc au système de récursion suivant (TR-QAM, page 350) :

$$\begin{cases} a_{t|t-1} = T_t a_{t-1} + c_t \\ P_{t|t-1} = T_t P_{t-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top \\ v_t = y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t \\ F_t = Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + H_t \\ a_t = a_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} (y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t) \\ P_t = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} Z_t P_{t|t-1} \end{cases}$$

6. On a :

$$\begin{aligned}
a_{t+1|t} &= T_{t+1} a_t + c_{t+1} \\
&= T_{t+1} (a_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} v_t) + c_{t+1} \\
&= T_{t+1} a_{t|t-1} + c_{t+1} + K_t v_t
\end{aligned}$$

avec :

$$K_t = T_{t+1} P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1}$$

K_t est appelée la matrice de gain (TR-QAM, page 350). Comme on a :

$$v_t = y_t - Z_t a_{t|t-1} - d_t$$

on peut écrire le modèle espace-état sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y_t = Z_t a_{t|t-1} + d_t + v_t \\ a_{t+1|t} = T_{t+1} a_{t|t-1} + c_{t+1} + K_t v_t \end{cases}$$

Si $v_t = \mathbf{0}$, alors $a_{t+1|t} = T_{t+1} a_{t|t-1} + c_{t+1}$. K_t indique donc comment le filtre corrige l'estimation classique $T_{t+1} a_{t|t-1} + c_{t+1}$ lorsqu'il prend en compte les erreurs d'innovation. K_t est donc la matrice de correction du système de prédiction-correction du filtre de Kalman.

14. car α_t et ϵ_t sont deux vecteurs gaussiens indépendants.

13. Construction d'une position de carry trade

1. La notion de carry trade est développée dans TR-QAM, pages 509 à 514. Les fondements économiques sous-jacents sont expliqués à la page 509 de TR-QAM.
2. (a) La position de carry trade consiste à être *long* de 50 MUSD de NZD et de 50 MUSD de GBP et à être *short* de 50 MUSD de JPY et de 50 MUSD de CHF.
- (b) On est *long* de 50 MUSD de NZD et GBP et *short* de 20 MUSD de JPY, CHF, EUR, SEK et CAD.
- (c) Si on considère une des 10 devises comme la devise de référence, alors le notionnel de portage n'est pas égal au notionnel de financement. Par exemple, si la devise pivot est le dollar, alors le notionnel de portage est égal à 80 MUSD alors que le notionnel de financement est égal à 100 MUSD. Si la devise pivot est l'euro, c'est le notionnel de financement qui inférieur au notionnel de portage d'un montant équivalent à 20 MUSD.
- (d) On se place dans le cas de 5 devises de financement et 5 devises de portage. On a :

$$\begin{aligned} \text{PnL} &\simeq 20 \times \frac{1}{3} (6,24\% + 6,21\% + 6,17\% + 5,97\% + 5,74\%) - \\ &\quad 20 \times \frac{1}{3} (0,14\% + 2,55\% + 3,79\% + 4,18\% + 5,37\%) \\ &= 0,95 \text{ MUSD} \end{aligned}$$

3. (a) On utilise la méthode décrite page 100 de TR-QAM pour calibrer le portefeuille long/short. On obtient le portefeuille suivant :

Devise	BRL	CZK	HUF	KRW	MXN
Poids	15,0%	-1,3%	4,1%	-1,6%	14,3%
Devise	PLN	SGD	THB	TRY	TWD
Poids	2,8%	-13,6%	-14,4%	15,5%	-20,9%

- (b) La solution devient :

Devise	BRL	CZK	HUF	KRW	MXN
Poids	13,7%	-9,5%	4,7%	16,5%	6,6%
Devise	PLN	SGD	THB	TRY	TWD
Poids	2,0%	-17,8%	-20,7%	18,0%	-13,5%

- (c) Le carry de ce portefeuille est 6,694% par an. On en déduit que le taux de dévaluation (ou de réévaluation) maximal supportable pour que le PnL (trimestriel) reste positif est 1,67% si l'exposition est 100%. En tenant compte des différentes expositions, on obtient les taux de dévaluation (-) et de réévaluation (+) suivants :

Devise	BRL	CZK	HUF	KRW	MXN
Variation	-12,2%	+17,6%	-35,9%	-10,1%	-25,3%
Devise	PLN	SGD	THB	TRY	TWD
Variation	-81,9%	+9,4%	+8,1%	-8,3%	+12,4%

- (d) On obtient les résultats suivants :

Devise	BRL	CZK	HUF	KRW	MXN
Poids	22,8%	-15,9%	7,8%	27,5%	11,0%
Devise	PLN	SGD	THB	TRY	TWD
Poids	3,4%	-29,6%	-34,5%	30,0%	-22,4%

Le levier de ce portefeuille (TR-QAM, page 56) est égal à 205%, alors qu'il vaut 103% et 123% pour les portefeuilles des questions (a) et (b). Il est tout à fait normal que le levier augmente de 66,7% lorsque l'on passe d'une volatilité de 3% à une volatilité de 5%, puisque le rapport des solutions est proportionnelle au rapport des volatilités (car il n'y a aucune contrainte à part celle d'auto-financement).

Encadré 9 (Calibration des portefeuilles de carry trade)

```

PnL = 20 / 3 * (6.24 + 6.21 + 6.17 + 5.97 + 5.74) / 100 -
      20 / 3 * (0.14 + 2.55 + 3.79 + 4.18 + 5.37) / 100;
print ftosa(PnL,"PnL = %lf",3,6);

let mu[10,1] =      18.23   2.45   8.95   3.48   8.98
                  6.63   1.44   2.00  19.80   1.30;
let sigma[10,1] =  11.19  12.57  12.65   6.48   6.80
                  11.27   4.97   4.26  11.61   4.12;

let rho[10,10] =
1.00  0.30  0.38  0.00  0.50  0.35  0.33  0.30  0.43  0.03
0.30  1.00  0.80  0.04  0.30  0.70  0.49  0.34  0.39  0.07
0.38  0.80  1.00  0.08  0.34  0.78  0.56  0.34  0.48  0.06
0.02  0.04  0.08  1.00  0.12  0.06  0.29  0.38  0.10  0.63
0.50  0.30  0.34  0.12  1.00  0.30  0.27  0.29  0.38  0.09
0.35  0.70  0.78  0.06  0.30  1.00  0.53  0.35  0.41  0.07
0.33  0.49  0.56  0.29  0.27  0.53  1.00  0.53  0.35  0.30
0.30  0.34  0.34  0.38  0.29  0.35  0.53  1.00  0.43  0.40
0.43  0.39  0.48  0.10  0.38  0.41  0.35  0.43  1.00  0.20
0.03  0.07  0.06  0.63  0.09  0.07  0.30  0.40  0.20  1.00 ;

mu = mu/100;
sigma = sigma/100;
cov1 = eye(10) .* sigma .* sigma';
cov2 = rho .* sigma .* sigma';

A = ones(1,10); B = 0; C = 0; D = 0; Bounds = (-10~10) .* ones(10,1);

// Question 3.a
{x1,mu1,sigma1,phi1,retcode1} = Qprog_Allocation_Solve(mu,cov1,A,B,C,D,Bounds,0.03,2);
print ftosa(reshape(x1,2,5),"%lf",3,3);

// Question 3.b
{x2,mu2,sigma2,phi2,retcode2} = Qprog_Allocation_Solve(mu,cov2,A,B,C,D,Bounds,0.03,2);
print ftosa(reshape(x2,2,5),"%lf",3,3);

// Question 3.c
print ftosa(100*mu2,"carry = %lf",3,3);
dev = - (mu2/4) ./ x2;
print ftosa(100*reshape(dev,2,5),"%lf",3,3);
PnL = sumc(x2 .* mu)/3;
print ftosa(PnL,"PnL = %lf",3,6);

// Question 3.d
{x3,mu3,sigma3,phi3,retcode3} = Qprog_Allocation_Solve(mu,cov2,A,B,C,D,Bounds,0.05,2);
print ftosa(reshape(x3,2,5),"%lf",3,3);
Leverage = sumc(abs(x1)) | sumc(abs(x2)) | sumc(abs(x3));
print ftosa(Leverage,"%lf",3,2);

```

14. Bêta d'un portefeuille

1. On note R_i et R_x les rendements de l'actif i et du portefeuille x . Soit $R = (R_1, \dots, R_n)$ le vecteur des rendements des actifs. On note μ l'espérance du vecteur R . On a :

$$R_x = \sum_{i=1}^n x_i R_i = x^\top R$$

Le bêta de l'actif i par rapport au portefeuille x est le rapport entre la covariance du rendement de l'actif i et du portefeuille, et la variance du portefeuille (TR-QAM, page 264) :

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_x)}{\text{var}(R_x)}$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{var}(R_x) &= \mathbb{E}[(R_x - \mathbb{E}[R_x])^2] \\ &= \mathbb{E}[(x^\top R - x^\top \mu)^2] \\ &= \mathbb{E}[x^\top (R - \mu)(R - \mu)^\top x] \\ &= x^\top \mathbb{E}[(R - \mu)(R - \mu)^\top] x \\ &= x^\top \Sigma x \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \text{cov}(R, R_x) &= \mathbb{E}[(R_x - \mathbb{E}[R_x])(R - \mu)] \\ &= \mathbb{E}[x^\top (R - \mu)(R - \mu)] \\ &= \Sigma x \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\beta_i = \frac{(\Sigma x)_i}{x^\top \Sigma x}$$

2. (a) On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \beta_i &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{(\Sigma x)_i}{x^\top \Sigma x} \\ &= x^\top \frac{\Sigma x}{x^\top \Sigma x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Si $\beta_i = \beta_j = \beta$, alors $\beta = 1$ est une solution évidente puisque l'égalité précédente est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^n x_i \beta_i = \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

- (b) Si $\beta_i = \beta_j = \beta$, alors on a :

$$\sum_{i=1}^n x_i \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} = 1$$

β ne peut prendre qu'une seule valeur, la solution est donc unique. On sait que les volatilités marginales des actifs sont égales dans le portefeuille de variance minimale (TR-QAM, page 90) :

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_j}$$

avec $\sigma(x) = \sqrt{x^\top \Sigma x}$ la volatilité du portefeuille. Une autre expression de l'égalité précédente est :

$$\frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} = \frac{(\Sigma x)_j}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

En divisant cette égalité par $\sqrt{x^\top \Sigma x}$, on obtient :

$$\beta_i = \beta_j$$

Dans un portefeuille de variance minimale, le bêta des actifs i est le même et vaut 1.

3. (a) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \beta_i &= 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \beta_i &= \sum_{i=1}^n x_i \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i \beta_i - \sum_{i=1}^n x_i &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i (\beta_i - 1) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i (\beta_i - 1) = 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

On suppose que l'actif j a un bêta supérieur à 1. On a donc :

$$\begin{cases} x_j (\beta_j - 1) + \sum_{i \neq j} x_i (\beta_i - 1) = 0 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$x_j (\beta_j - 1) > 0$ car $x_j > 0$ (sinon le bêta serait nul), il faut donc que $\sum_{i \neq j} x_i (\beta_i - 1) < 0$. Comme $x_i \geq 0$, il est nécessaire qu'un titre au moins ait un bêta inférieur à 1.

(b) On utilise les notations habituelles concernant la représentation de Σ . On cherche un portefeuille tel que $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ et $\beta_3 < 0$. Pour simplifier le problème, on considère que les trois actifs ont la même volatilité. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rho_{1,2} + x_3 \rho_{1,3} > 0 \\ x_1 \rho_{1,2} + x_2 + x_3 \rho_{2,3} > 0 \\ x_1 \rho_{1,3} + x_2 \rho_{2,3} + x_3 < 0 \end{cases}$$

Il suffit donc que $x_1 \rho_{1,3} + x_2 \rho_{2,3}$ soit négatif et que x_3 soit petit. Par exemple, on peut prendre $x_1 = 50\%$, $x_2 = 45\%$, $x_3 = 5\%$, $\rho_{1,2} = 50\%$, $\rho_{1,3} = 0\%$ et $\rho_{2,3} = -50\%$. On obtient $\beta_1 = 1,10$, $\beta_2 = 1,03$ et $\beta_3 = -0,27$.

15. Maximum de vraisemblance des modèles Probit et Logit

1. Le modèle Probit est défini à la page 270 de TR-QAM. On a :

$$\Pr \{y = 1\} = \Phi(x^\top \beta)$$

2. La fonction de log-vraisemblance est (TR-QAM, page 270) :

$$\ell = \sum_{i=1}^n \ell_i$$

avec :

$$\begin{aligned} \ell_i &= \ln \left(\Pr \{y_i = 1\}^{y_i} \Pr \{y_i = 0\}^{1-y_i} \right) \\ &= y_i \ln \Phi(x_i^\top \beta) + (1 - y_i) \ln (1 - \Phi(x_i^\top \beta)) \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_i}{\partial \beta_k} &= y_i \frac{\phi(x_i^\top \beta) x_{i,k}}{\Phi(x_i^\top \beta)} - (1 - y_i) \frac{\phi(x_i^\top \beta) x_{i,k}}{1 - \Phi(x_i^\top \beta)} \\ &= \frac{y_i (1 - \Phi(x_i^\top \beta)) - (1 - y_i) \Phi(x_i^\top \beta)}{\Phi(x_i^\top \beta) (1 - \Phi(x_i^\top \beta))} \phi(x_i^\top \beta) x_{i,k} \\ &= \frac{y_i - \Phi(x_i^\top \beta)}{\Phi(x_i^\top \beta) (1 - \Phi(x_i^\top \beta))} \phi(x_i^\top \beta) x_{i,k} \end{aligned}$$

4. Le vecteur gradient est $G = (G_1, \dots, G_K)$ avec :

$$G_k = \frac{\partial \ell}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i}{\partial \beta_k}$$

On en déduit que l'élément (k, j) de la matrice hessienne est :

$$H_{k,j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i}{\partial \beta_k \partial \beta_j}$$

On a $\phi'(x) = -x\phi(x)$ et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \Phi(x_i^\top \beta) (1 - \Phi(x_i^\top \beta)) &= \phi(x_i^\top \beta) x_{i,j} (1 - \Phi(x_i^\top \beta)) - \Phi(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) x_{i,j} \\ &= (1 - 2\Phi(x_i^\top \beta)) \phi(x_i^\top \beta) x_{i,j} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_j} (y_i - \Phi(x_i^\top \beta)) \phi(x_i^\top \beta) &= -(y_i - \Phi(x_i^\top \beta)) \phi(x_i^\top \beta) (x_i^\top \beta) x_{i,j} - \phi^2(x_i^\top \beta) x_{i,j} \\ &= (-y_i x_i^\top \beta + \Phi(x_i^\top \beta) x_i^\top \beta - \phi(x_i^\top \beta)) \phi(x_i^\top \beta) x_{i,j} \end{aligned}$$

On note :

$$A = \frac{\Phi(x_i^\top \beta)^2 (1 - \Phi(x_i^\top \beta))^2}{\phi(x_i^\top \beta) x_{i,j} x_{i,k}} \frac{\partial^2 \ell_i}{\partial \beta_k \partial \beta_j}$$

et :

$$B = \frac{\Phi(x_i^\top \beta)^2 (1 - \Phi(x_i^\top \beta))^2}{\phi(x_i^\top \beta)} c_i$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
A &= (-y_i x_i^\top \beta + \Phi(x_i^\top \beta) x_i^\top \beta - \phi(x_i^\top \beta)) \Phi(x_i^\top \beta) (1 - \Phi(x_i^\top \beta)) - \\
&\quad (y_i - \Phi(x_i^\top \beta)) (1 - 2\Phi(x_i^\top \beta)) \phi(x_i^\top \beta) \\
&= -y_i \Phi(x_i^\top \beta) x_i^\top \beta + \Phi^2(x_i^\top \beta) x_i^\top \beta - \Phi(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) + \\
&\quad y_i \Phi^2(x_i^\top \beta) x_i^\top \beta - \Phi^3(x_i^\top \beta) x_i^\top \beta + \Phi^2(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) - \\
&\quad y_i \phi(x_i^\top \beta) + \Phi(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) + 2y_i \Phi(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) - 2\Phi^2(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) \\
&= \Phi^3(x_i^\top \beta) (-x_i^\top \beta) + \\
&\quad \Phi^2(x_i^\top \beta) ((1 + y_i) x_i^\top \beta - \phi(x_i^\top \beta)) + \\
&\quad \Phi(x_i^\top \beta) y_i (-x_i^\top \beta + 2\phi(x_i^\top \beta)) - \\
&\quad y_i \phi(x_i^\top \beta)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
B &= y_i (\phi(x_i^\top \beta) + x_i^\top \beta \Phi(x_i^\top \beta)) (1 - \Phi(x_i^\top \beta))^2 + \\
&\quad (1 - y_i) \phi(x_i^\top \beta) - x_i^\top \beta (1 - \Phi(x_i^\top \beta)) \Phi(x_i^\top \beta)^2 \\
&= y_i \phi(x_i^\top \beta) + y_i \Phi(x_i^\top \beta) (x_i^\top \beta) - 2y_i \Phi(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) - \\
&\quad 2y_i \Phi^2(x_i^\top \beta) (x_i^\top \beta) + y_i \Phi^2(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) + y_i \Phi^3(x_i^\top \beta) (x_i^\top \beta) + \\
&\quad \Phi^2(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) - y_i \Phi^2(x_i^\top \beta) \phi(x_i^\top \beta) - \Phi^2(x_i^\top \beta) (x_i^\top \beta) + \\
&\quad \Phi^3(x_i^\top \beta) (x_i^\top \beta) + y_i \Phi^2(x_i^\top \beta) (x_i^\top \beta) - y_i \Phi^3(x_i^\top \beta) (x_i^\top \beta) \\
&= \Phi^3(x_i^\top \beta) (x_i^\top \beta) + \\
&\quad \Phi^2(x_i^\top \beta) (-(1 + y_i) x_i^\top \beta + \phi(x_i^\top \beta)) + \\
&\quad \Phi(x_i^\top \beta) y_i (x_i^\top \beta - 2\phi(x_i^\top \beta)) + \\
&\quad y_i \phi(x_i^\top \beta) \\
&= -A
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ell_i}{\partial \beta \partial \beta^\top} \\
&= \sum_{i=1}^n A \frac{\phi(x_i^\top \beta)}{\Phi(x_i^\top \beta)^2 (1 - \Phi(x_i^\top \beta))^2} \cdot (x_i x_i^\top) \\
&= - \sum_{i=1}^n B \frac{\phi(x_i^\top \beta)}{\Phi(x_i^\top \beta)^2 (1 - \Phi(x_i^\top \beta))^2} \cdot (x_i x_i^\top) \\
&= - \sum_{i=1}^n c_i \cdot (x_i x_i^\top)
\end{aligned}$$

5. L'algorithme de Newton-Raphson associé au programme d'optimisation de la fonction de log-vraisemblance est (TR-QAM, page 122) :

$$\beta_{(s+1)} = \beta_{(s)} - \lambda_s H_{(s)}^{-1} G_{(s)}$$

avec $G_{(s)}$ et $H_{(s)}$ le vecteur gradient et la matrice hessienne définis précédemment au point $\beta = \beta_{(s)}$, λ_s le pas de la descente à l'itération s et $\beta_{(s)}$ la valeur de β à l'itération s . On initialise l'algorithme avec $\beta_{(0)} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$ la solution des moindres carrés ordinaires.

6. Dans le cas du modèle Logit, on a (TR-QAM, page 270) :

$$\Pr \{y = 1\} = \mathbf{F}(x^\top \beta)$$

avec :

$$\mathbf{F}(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

On note $f(z)$ la densité associée :

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(1 + e^{-z})^2}$$

On en déduit que la log-vraisemblance ℓ , le vecteur gradient G et la matrice hessienne H sont :

$$\begin{aligned}\ell &= -\sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{-x_i^\top \beta}) + (1 - y_i) x_i^\top \beta \\ G &= \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{F}(x_i^\top \beta)) (x_i^\top \odot \beta) \\ H &= -\sum_{i=1}^n f(x_i^\top \beta) \cdot (x_i x_i^\top)\end{aligned}$$

16. Construction de portefeuilles tiltés

1. Le portefeuille ERC est défini à la page 132 de TR-QAM. On obtient les résultats suivants :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	$\sigma_i(x)$	$\sigma_i(x)/\sigma(x)$
1	32,47%	10,83%	3,52%	25,00%
2	25,41%	13,84%	3,52%	25,00%
3	21,09%	16,67%	3,52%	25,00%
4	21,04%	16,71%	3,52%	25,00%

2. Le benchmark b est le portefeuille ERC précédent. Le programme d'optimisation correspond à celui décrit à la page 104 de TR-QAM.

Objectif de TE	Benchmark (ERC)	1%	5%	10%	max
x_1^*	32,47%	38,50%	63,48%	96,26%	100,00%
x_2^*	25,41%	20,16%	0,00%	0,00%	0,00%
x_3^*	21,09%	20,18%	15,15%	0,00%	0,00%
x_4^*	21,04%	21,16%	21,37%	3,74%	0,00%
$\mu(x^* b)$		1,13%	5,66%	8,05%	8,24%
$\sigma(x^* b)$		1,00%	5,00%	10,00%	10,87%
$ir(x^* b)$		1,13	1,13	0,81	0,76
$\sigma(x^*)$	14,06%	13,89%	13,86%	14,59%	15,00%
$\rho(x^* b)$		99,75%	93,60%	75,70%	72,19%

- (a) Si la tracking error est fixée à 1%, le portefeuille optimal est (38,50%, 20,16%, 20,18%, 21,16%). On obtient une surperformance de 1,13% et donc un ratio d'information égal à 1,13.
- (b) Les résultats sont donnés dans le tableau précédent. Pour une tracking error égale à 10%, le ratio d'information du portefeuille optimal diminue et est égal à 0,81.
- (c) On a¹⁵ :

$$\sigma(x | b) = \sqrt{\sigma^2(x) - 2\rho(x | b)\sigma(x)\sigma(b) + \sigma^2(b)}$$

On suppose que $\rho(x | b) \in (\rho_{\min}, \rho_{\max})$. Comme x peut être égal à b , ρ_{\max} est égal à 1. On a donc :

$$0 \leq \sigma(x | b) \leq \sqrt{\sigma^2(x) - 2\rho_{\min}\sigma(x)\sigma(b) + \sigma^2(b)}$$

Si $\rho_{\min} = -1$, la borne maximale de la volatilité de tracking error est :

$$\sigma(x | b) \leq \sigma(x) + \sigma(b)$$

Si $\rho_{\min} = 0$, la borne maximale de la volatilité de tracking error devient :

$$\sigma(x | b) \leq \sqrt{\sigma^2(x) + \sigma^2(b)}$$

Si $\rho_{\min} = 50\%$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, et on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma(x | b) &\leq \sqrt{\sigma^2(x) - \sigma(x)\sigma(b) + \sigma^2(b)} \\ &\leq \sqrt{(\sigma(x) - \sigma(b))^2 + \sigma(x)\sigma(b)} \\ &\leq |\sigma(x) - \sigma(b)| + \sqrt{\sigma(x)\sigma(b)} \end{aligned}$$

Comme on a imposé une contrainte *long only*, il est difficile de trouver un portefeuille qui présente une corrélation négative. D'ailleurs, si on regarde les résultats précédents, on a des

15. On rappelle que la corrélation entre le portefeuille x et le benchmark b est égale à :

$$\rho(x | b) = \frac{x^\top \Sigma b}{\sqrt{x^\top \Sigma x} \sqrt{b^\top \Sigma b}}$$

corrélations qui sont largement supérieures à 50%. Dans ce cas, $\sigma(x) \simeq \sigma(b)$ et l'ordre de grandeur de $\sigma(x|b)$ est $\sigma(b)$. Comme $\sigma(b)$ est égal à 14,06%, il est impossible de trouver un portefeuille dont la volatilité de tracking error soit égale à 35%. Même si on prend un corrélation nulle pour $\rho(x|b)$, comme $\sigma(x) \simeq \sigma(b)$, alors l'ordre de grandeur de $\sigma(x|b)$ est $\sqrt{2}\sigma(b)$, c'est-à-dire 28%. On est encore loin de la cible de 35%. D'ailleurs, si on cherche le portefeuille qui a la plus grande volatilité de tracking error, on obtient la solution (100%, 0%, 0%, 0%). La tracking error maximale est alors égale à 10,87%. Il n'y a donc pas de solution à cette question.

3. On obtient les résultats suivants :

Objectif de TE	Benchmark (ERC)	1%	5%	10%	35%
x_1^*	32,47%	38,50%	62,65%	92,82%	243,72%
x_2^*	25,41%	20,16%	-0,83%	-27,07%	-158,28%
x_3^*	21,09%	20,18%	16,54%	11,99%	-10,77%
x_4^*	21,04%	21,16%	21,65%	22,27%	25,34%
$\mu(x^* b)$		1,13%	5,67%	11,34%	39,71%
$\sigma(x^* b)$		1,00%	5,00%	10,00%	35,00%
$ir(x^* b)$		1,13	1,13	1,13	1,13
$\sigma(x^*)$	14,06%	13,89%	13,93%	15,50%	34,96%
$\rho(x^* b)$		99,75%	93,62%	77,55%	19,81%

La suppression de la contrainte *long only* permet maintenant de trouver un portefeuille optimal qui a une volatilité de tracking error égale à 35%. On remarque aussi que tous les portefeuilles optimaux présentent le même ratio d'information. Ceci est tout à fait normal puisqu'en l'absence de contraintes, la frontière efficiente $\{\sigma(x^*|b), \mu(x^*|b)\}$ est une droite (TR-QAM, page 106). Tous les portefeuilles optimaux ont donc le même ratio d'information :

$$ir(x^*|b) = \frac{\mu(x^*|b)}{\sigma(x^*|b)} = \text{constante}$$

On note x_0 le portefeuille optimal correspondant à une volatilité de tracking error donnée. Alors en l'absence de contraintes, tous les portefeuilles optimaux s'écrivent :

$$x^* = b + \ell \cdot (x_0 - b)$$

On décompose donc tout portefeuille optimal x^* comme la somme du portefeuille benchmark b et d'un portefeuille long/short $x_0 - b$ que l'on *leverage*. Considérons les résultats précédents. On peut prendre comme portefeuille de référence x_0 le portefeuille qui a une tracking error égale à 1%. On vérifie que le portefeuille optimal dont la tracking error est égale à 5% (resp. 10% et 35%) est un portefeuille *leverage* 5 fois (resp. 10 et 35 fois) par rapport à x_0 . En effet, on a :

$$\begin{aligned} \sigma(x^*|b) &= \sigma(b + \ell \cdot (x_0 - b) | b) \\ &= \ell \cdot \sigma(x_0 - b | b) \\ &= \ell \cdot \sigma(x_0 | b) \end{aligned}$$

On en déduit que le levier est le rapport des volatilités de tracking error :

$$\ell = \frac{\sigma(x^*|b)}{\sigma(x_0|b)}$$

Dans ce cas, on vérifie que :

$$\begin{aligned} ir(x^*|b) &= \frac{\mu(b + \ell \cdot (x_0 - b) | b)}{\ell \cdot \sigma(x_0 | b)} \\ &= \frac{\ell \cdot \mu(x_0 | b)}{\ell \cdot \sigma(x_0 | b)} \\ &= \frac{\mu(x_0 | b)}{\sigma(x_0 | b)} \end{aligned}$$

17. Identification d'un modèle espace-état

1. (a) Si $\sigma_i = 0$, on obtient (TR-QAM, page 354) :

$$\begin{aligned}\mu_t^{(i)} &= \mu_{t-1}^{(i)} + c^{(i)} \\ &= \mu_0^{(i)} + c^{(i)}t\end{aligned}$$

Dans ce cas, $\mu_t^{(i)}$ est une tendance déterministique. Comme le terme $\eta_t^{(i)}$ permet de bruite $\mu_t^{(i)}$, $\mu_t^{(i)}$ est une tendance stochastique.

- (b) L'équation de mesure est (TR-QAM, page 349) :

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t^{(1)} \\ \mu_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

alors que l'équation de transition est :

$$\begin{pmatrix} \mu_t^{(1)} \\ \mu_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t-1}^{(1)} \\ \mu_{t-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c^{(1)} \\ c^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t^{(1)} \\ \eta_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{pmatrix} \eta_t^{(1)} \\ \eta_t^{(2)} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

- (c) On a :

$$\begin{aligned}(1-L)y_t &= (1-L)\mu_t^{(1)} + (1-L)\mu_t^{(2)} \\ &= c^{(1)} + \eta_t^{(1)} + c^{(2)} + \eta_t^{(2)}\end{aligned}$$

La forme stationnaire de y_t est donc $S(y_t) = (1-L)y_t$ (TR-QAM, pages 400-401). La fonction d'autocovariance associée est :

$$\begin{aligned}\Gamma_i &= \mathbb{E} \left[(S(y_t) - \mathbb{E}[S(y_{t-i})])^2 \right] \\ &= \begin{cases} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

- (d) La fonction d'autocovariance permet d'identifier $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$, mais ne permet pas d'identifier séparément les paramètres σ_1 et σ_2 . Le modèle espace-état n'est donc pas identifiable.

2. (a) L'équation de mesure est :

$$\begin{pmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_t^{(1)} \\ f_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

alors que l'équation de transition est :

$$\begin{pmatrix} f_t^{(1)} \\ f_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{t-1}^{(1)} \\ f_{t-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t^{(1)} \\ \eta_t^{(2)} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{pmatrix} \eta_t^{(1)} \\ \eta_t^{(2)} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

(b) On pose $y_t = (y_t^{(1)}, y_t^{(2)})$. La forme stationnaire vectorielle de y_t est :

$$\begin{aligned} S(y_t) &= (1 - L) y_t \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t^{(1)} \\ \eta_t^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= Z \eta_t \end{aligned}$$

avec $\eta_t = (\eta_t^{(1)}, \eta_t^{(2)})$.

(c) La forme stationnaire de y_t est un modèle espace-état. On applique donc la formule de la page 409 de TR-QAM qui donne la densité spectrale multi-dimensionnelle. On obtient :

$$\begin{aligned} F_{S(y)}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} Z \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} Z^\top \\ &= \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} A_{1,1}^2 \sigma_1^2 + A_{1,2}^2 \sigma_2^2 & A_{1,1} A_{2,1} \sigma_1^2 + A_{1,2} A_{2,2} \sigma_2^2 \\ A_{1,1} A_{2,1} \sigma_1^2 + A_{1,2} A_{2,2} \sigma_2^2 & A_{2,1}^2 \sigma_1^2 + A_{2,2}^2 \sigma_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) La densité spectrale est une matrice qui ne dépend pas de la fréquence λ . On a :

$$\begin{cases} A_{1,1}^2 \sigma_1^2 + A_{1,2}^2 \sigma_2^2 = I_1(0) \\ A_{1,1} A_{2,1} \sigma_1^2 + A_{1,2} A_{2,2} \sigma_2^2 = I_{12}(0) \\ A_{2,1}^2 \sigma_1^2 + A_{2,2}^2 \sigma_2^2 = I_2(0) \end{cases}$$

où $I_1(\lambda)$ et $I_2(\lambda)$ sont les périodogrammes de $S(y_t^{(1)})$ et $S(y_t^{(2)})$ et $I_{12}(\lambda)$ est le périodogramme croisé de $S(y_t^{(1)})$ et $S(y_t^{(2)})$ (TR-QAM, page 409). On a un système de 3 équations à 6 paramètres, le modèle espace-état n'est donc pas identifiable.

(e) On note $f_t^{(3)} = f_t^{(2)} - f_t^{(1)}$. On a :

$$\begin{aligned} y_t^{(i)} &= A_{i,1} f_t^{(1)} + A_{i,2} f_t^{(2)} \\ &= A_{i,1} f_t^{(1)} + A_{i,2} (f_t^{(1)} + f_t^{(3)}) \\ &= (A_{i,1} + A_{i,2}) f_t^{(1)} + A_{i,2} f_t^{(3)} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f_t^{(3)} &= f_t^{(2)} - f_t^{(1)} \\ &= (f_{t-1}^{(2)} + \eta_t^{(2)}) - (f_{t-1}^{(1)} + \eta_t^{(1)}) \\ &= (f_{t-1}^{(2)} - f_{t-1}^{(1)}) + (\eta_t^{(2)} - \eta_t^{(1)}) \\ &= f_{t-1}^{(3)} + \eta_t^{(2)} - \eta_t^{(1)} \end{aligned}$$

On obtient le modèle espace-état suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_t^{(1)} \\ y_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} + A_{1,2} & A_{1,2} \\ A_{2,1} + A_{2,2} & A_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_t^{(1)} \\ f_t^{(3)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} f_t^{(1)} \\ f_t^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{t-1}^{(1)} \\ f_{t-1}^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_t^{(1)} \\ \eta_t^{(2)} \end{pmatrix} \end{cases}$$

La représentation espace-état n'est donc pas unique.

18. Calcul d'un indice d'actions

1. La plupart de ces indices sont décrits à la page 629 de TR-QAM.

(a) Indices européens

- i. AEX est l'indice de la bourse d'Amsterdam. Il comporte 25 valeurs hollandaises (Ahold, Heineken, Phillips, Royal Dutch, Unilever, etc).
- ii. BEL (ou BEL 20) est l'indice de la bourse de Bruxelles. Il comporte 20 valeurs belges (InBev, Belgacom, Dexia, etc).
- iii. CAC (ou CAC 40) est l'indice des 40 plus grandes valeurs françaises (Total, Sanofi-Aventis, BNP Paribas, etc.).
- iv. DAX est l'indice de la bourse de Francfort. Il comporte 30 valeurs allemandes (Adidas, Allianz, Siemens, Volkswagen, etc).
- v. FTSE 100 (ou *footsie*) est l'indice des 100 plus grandes valeurs anglaises (BP, Royal Dutch, Vodafone, etc.).
- vi. IBEX est l'indice de la bourse de Madrid. Il comporte 35 valeurs espagnoles (Banco Santander, BBVA, etc.).
- vii. MIB est l'indice de la bourse de Milan. Il comporte 40 valeurs italiennes (Fiat, Enel, Eni, etc.).
- viii. OMX est le principal indice boursier de la bourse de Stockholm. Il comporte 30 valeurs suédoises (Electrolux, Ericsson, Nordea, Volvo, etc.).
- ix. SBF (ou SBF 120) est l'indice des 120 plus grandes valeurs françaises.
- x. SMI est l'indice des 20 plus grandes valeurs suisses (Nestlé, Novartis, UBS, etc.).

(b) Indices américains

- i. DOW JONES (Dow Jones Industrial Average ou DJIA) est le plus vieil indice boursier du monde. Il comporte 30 valeurs américaines cotées à la bourse de New York (Boeing, Exxon, JP Morgan, Wal-Mart, etc.).
- ii. NASDAQ est l'indice boursier des 100 plus grandes valeurs technologiques américaines (Apple, Google, Oracle, Microsoft, etc.) du marché d'actions électronique NASDAQ (*National Association of Securities Dealers Automated Quotations*).
- iii. S&P 100 et S&P 500 sont les indices boursiers basés respectivement sur les 100 et 500 grandes sociétés cotées à Wall Street.
- iv. TSE est l'indice de la bourse de Toronto. Il comporte 60 valeurs canadiennes.

(c) Indices des pays émergents et des pays d'Asie

- i. ASX est l'indice des actions australiennes. Les deux indices les plus utilisés sont ASX 20 et ASX 200.
- ii. BOVESPA est l'indice des actions brésiliennes. Il comporte une cinquantaine de titres.
- iii. HSCEI est l'indice des actions H-Shares cotées à Hong Kong (China Life Insurance, Bank of China, China Construction Bank, Petrochina, etc.). Il comporte 40 valeurs.
- iv. HSI est l'indice Hang Seng des actions chinoises cotées à Hong Kong. Il comporte une cinquantaine de valeurs.
- v. KOSPI est l'indice des actions coréennes. L'indice KOSPI 200 comporte 200 valeurs.
- vi. NIKKEI et TOPIX sont des indices d'actions japonaises. Ils comportent respectivement 225 (NIKKEI 225) et 100 (TOPIX 100) valeurs.

2. Les calculateurs d'indices les plus célèbres sont : FTSE (FTSE 100, MIB, etc.), Standard's & Poors (ASX 20, S&P 100, S&P 500, TSE 60, etc.), Dow Jones (DJIA, STOXX, etc.), Deutsche Börse (DAX, STOXX, etc.) Il faut aussi citer MSCI (Morgan Stanley Composite Index)

3. Les différences entre les indices Eurostoxx, Eurostoxx 50, Stoxx et Stoxx 50 sont expliquées à la page 628 de TR-QAM. L'indice Stoxx 600 correspond aux 600 plus grosses valeurs européennes. L'indice Eurostoxx est un sous-indice de l'indice Stoxx 600 et ne considère que les valeurs de la zone euro. Enfin, les indices Eurostoxx 50 et Stoxx 50 correspondent aux 50 plus grandes valeurs des indices Eurostoxx et Stoxx 600. On a donc :

$$\text{Eurostoxx 50} \subset \text{Eurostoxx} \subset \text{Stoxx 600}$$

et :

$$\text{Stoxx 50} \subset \text{Stoxx 600}$$

Le calculateur de cet indice est STOXX (Dow Jones et Deutsche Börse). Les rebalancements de l'indice sont trimestriels (Mars, Juin, Septembre et Décembre) et les poids de l'indice sont calculés trimestriellement en considérant la capitalisation boursière flottante.

4. On peut citer les indices Bovespa (Brésil), Mexican Bolsa (Mexique), Nifty (Inde), RTS (Russie), HSCEI (Chine), etc.
5. La valeur des différents indices que l'on va calculer est donnée dans le tableau suivant :

t	$I_1(t)$	$I_2(t)$	$I_3(t)$	$I_4(t)$	$I_5(t)$
1	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
2	103,89	106,83	106,83	103,81	103,89
3	116,04	119,33	119,33	115,07	116,04
4	112,02	115,21	115,21	111,94	112,02
5	119,11	122,50	122,50	119,27	119,11
6	122,60	126,41	126,35	123,02	122,86
7	122,04	125,84	125,78	122,84	122,68
8	104,55	107,81	107,76	106,58	106,44
9	101,72	104,89	104,84	103,64	103,51
10	104,06	107,30	107,25	106,82	106,67

On indique aussi le rendement journalier (en %) de ces indices :

t	$I_1(t)$	$I_2(t)$	$I_3(t)$	$I_4(t)$	$I_R(t)$
1					
2	3,89	6,83	6,83	3,81	3,89
3	11,69	11,69	11,69	10,85	11,69
4	-3,46	-3,45	-3,45	-2,73	-3,46
5	6,33	6,33	6,33	6,56	6,33
6	2,92	3,19	3,15	3,14	3,14
7	-0,45	-0,45	-0,45	-0,14	-0,14
8	-14,33	-14,33	-14,33	-13,24	-13,24
9	-2,71	-2,71	-2,71	-2,75	-2,75
10	2,29	2,29	2,29	3,06	3,06

Dans cet exercice, il convient surtout de ne pas raisonner en poids comme il est expliqué dans le chapitre 1 de TR-QAM (pages 47 à 50). Tous les calculs doivent se faire par rapport aux nombres d'actions détenues.

- (a) On définit l'indice *price index* de la façon suivante (TR-QAM, page 628) :

$$I_1(t) = c \times \sum_{i=1}^3 N_i(t) \times S_i(t)$$

Le coefficient c est tel que $I_1(1)$ est égal à 100. Comme $N_i(t)$ ne change pas pendant la période, on a donc :

$$I_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^3 N_i \times S_i(t)}{\sum_{i=1}^3 N_i \times S_i(1)}$$

L'indice *price index* $I_1(t)$ est reporté dans le tableau précédent. On a aussi calculé le rendement journalier correspondant :

$$R_1(t) = \frac{I_1(t)}{I_1(t-1)} - 1$$

- (b) La notion d'indice *total return* est définie à la page 629 de TR-QAM. On doit maintenant intégrer les dividendes. Une erreur serait de calculer l'indice de la façon suivante :

$$I_2(t) = c \times \sum_{i=1}^3 N_i(t) \times (S_i(t) + D_i(t))$$

En effet, dans cette formule, le dividende impacte l'indice uniquement le jour de tombée du dividende. Il n'y a donc pas de capitalisation du dividende. Si on utilise cette formule, on a donc $I_2(t) = I_1(t)$ pour $t \geq 7$, ce qui est faux. Pour capitaliser les dividendes, on calcule $I_2(t)$ de la façon suivante :

$$I_2(t) = I_2(t-1) \times \frac{\sum_{i=1}^3 N_i(t) \times (S_i(t) + D_i(t))}{\sum_{i=1}^3 N_i(t-1) \times S_i(t-1)}$$

Les résultats sont donnés dans les tableaux précédents. On vérifie que lorsqu'il n'y a pas de tombée de dividende, on a $R_2(t) = R_1(t)$ alors que $R_2(t) > R_1(t)$ lorsque un dividende est payé à la date t . Bien sûr, on a :

$$I_2(t) \geq I_1(t)$$

- (c) Comme il y a une taxe sur les dividendes de 17% sur les actions 1 et 2, on ne peut récupérer intégralement les dividendes 3 et 0,1 euros de ces actions. On note τ_i la taxe à appliquer sur l'action i . L'indice *net return* est alors défini de la façon suivante :

$$I_3(t) = I_3(t-1) \times \frac{\sum_{i=1}^3 N_i(t) \times (S_i(t) + (1 - \tau_i) \times D_i(t))}{\sum_{i=1}^3 N_i(t-1) \times S_i(t-1)}$$

On a l'inégalité suivante :

$$I_2(t) \geq I_3(t) \geq I_1(t)$$

- (d) L'action 1 sort de l'indice *price index* et elle est remplacée par l'action 4 à la date $t = 5$. On considère l'indice $I_4(t)$ portant sur les actions 2, 3 et 4 :

$$I_4(t) = \frac{\sum_{i=2}^4 N_i \times S_i(t)}{\sum_{i=2}^4 N_i \times S_i(1)}$$

L'indice *price index* $I_5(t)$ tenant compte de ce rebalancement doit donc se comporter comme l'indice $I_1(t)$ si $t \leq 5$ et comme l'indice $I_4(t)$ si $t \geq 5$. Pour $t > 5$, on a aussi :

$$I_5(t) = \tilde{c} \times \sum_{i=2}^4 N_i \times S_i(t)$$

Comme $I_5(5) = I_1(5) = I_4(5)$, on en déduit que le facteur d'ajustement \tilde{c} est :

$$\tilde{c} = \frac{\sum_{i=1}^3 N_i \times S_i(5)}{\sum_{i=2}^4 N_i \times S_i(5)}$$

- (e) Le ratio *dividend yield* DY_i est $D_i(t)/S_i(t)$ au moment de la tombée du dividende (TR-QAM, page 582). On obtient $DY_1 = 3.26\%$, $DY_2 = 0.05\%$, $DY_3 = 4.44\%$ et $DY_4 = 0.12\%$. On en déduit que les actions 1 et 3 sont *value* alors que les actions 2 et 4 sont *growth* (TR-QAM, page 26). Si on calcule le poids moyen des actions dans l'indice *total return* sur les 10 dates, on obtient $\bar{w}_1 = 9.14\%$, $\bar{w}_2 = 25.55\%$ et $\bar{w}_3 = 65.31\%$. On en déduit que le *dividend yield* de l'indice *total return* est $\sum_{i=1}^3 \bar{w}_i \times DY_i = 3.21\%$. On peut donc classer cet indice comme *value*.

19. Roll d'une position de futures

1. La valeur du contrat futures sur l'indice CAC 40 correspond à 10 euros par point de l'indice CAC 40¹⁶. Ainsi, si l'indice CAC 40 vaut 3 000 points, le futures CAC 40 vaut 36 000 euros. Les négociations portent sur quatorze échéances glissantes : 3 mensuelles, 3 trimestrielles du cycle mars, juin, septembre, décembre et 8 semestrielles du cycle juin/décembre. Si on se place le 1^{er} novembre 2011, on a donc 14 contrats dont les échéances sont nov. 2011, déc. 2011, janv. 2012, mars 2012, juin 2012, sept. 2012, déc. 2012, juin 2013, déc. 2013, juin 2014, déc. 2014, juin 2015, déc. 2015, juin 2016. Le montant du dépôt de garantie est égal à 3 600 euros.
2. La valeur du futures S&P 500 correspond à 500 dollars par point de l'indice S&P 500. Si le S&P 500 cote 1 250 points, alors la valeur du futures S&P 500 est égale à 625 000 dollars. Si on cherche à avoir une exposition à l'indice S&P 500 de 800 000 dollars, on peut :
 - (a) soit acheter un seul contrat futures ; dans ce cas, l'exposition est de 625 000 dollars et on a une sous-exposition égale à $-21,88\%$;
 - (b) soit acheter deux contrats ; dans ce cas, l'exposition est de 1 300 000 dollars et on a une sur-exposition égale à $56,25\%$;

En septembre 1997, le CME introduit le contrat futures mini S&P 500 (ou *E-mini S&P*) qui correspond à $1/10$ de la valeur du contrat futures S&P 500. Dans l'exemple précédent, l'investisseur peut être *long* d'un contrat futures S&P 500 et de 3 contrats futures *E-mini S&P*, ce qui lui permet d'avoir une exposition égale à 812 500 dollars à l'indice S&P 500. Le contrat futures mini S&P 500 permet donc de traiter des tailles beaucoup plus faibles que le contrat futures S&P 500.

3. Les contrats futures sur matières premières sont expliqués à la page 632 de TR-QAM. Le caractère contango-backwardation de ces futures est illustré aux pages 634-635 de TR-QAM.
4. (a) Pour calculer l'indice théorique $I_1(t)$, on doit d'abord calculer la valeur de la stratégie non financée. Pour cela, il faut rebalancer la position du futures $\mathbb{F}_1(t)$ sur le contrat $\mathbb{F}_2(t)$ le 15 janvier. On obtient l'indice $I_1^\bullet(t)$ qui satisfait :

$$I_1^\bullet(t) = \begin{cases} \mathbb{F}_1(t) & \text{si } t \leq 15/01 \\ \frac{\mathbb{F}_1(15/01)}{\mathbb{F}_2(15/01)} \times \mathbb{F}_2(t) & \text{si } t > 15/01 \end{cases}$$

On rebase ensuite la valeur de l'indice $I_1^\bullet(t)$ à 100 le 7 janvier. On obtient l'indice $I_1^*(t)$. Enfin, on transforme la valeur de la stratégie non financée en stratégie financée en intégrant la rémunération du taux sans risque (TR-QAM, pages 56-57) :

$$I_1(t) = I_1(t-1) \times (1 + R_1^*(t) + r(t-1) \times dt)$$

avec :

$$R_1^*(t) = \frac{I_1^*(t)}{I_1^*(t-1)} - 1$$

et dt l'intervalle de temps entre $t-1$ et t (exprimé en nombre de jours sur 365). Sur le tableau suivant, on indique les valeurs prises par $I_1^\bullet(t)$, $I_1^*(t)$, $R_1^*(t)$ et $I_1(t)$:

t	$I_1^\bullet(t)$	$I_1^*(t)$	$R_1^*(t)$	$I_1(t)$
07/01	97,60	100,00		100,00
08/01	98,20	100,61	0,61%	100,62
09/01	99,30	101,74	1,12%	101,76
10/01	99,00	101,43	-0,30%	101,46
11/01	97,60	100,00	-1,41%	100,03
14/01	95,40	97,75	-2,25%	97,80
15/01	98,10	100,51	2,83%	100,58
16/01	97,53	99,93	-0,58%	100,00
17/01	97,05	99,44	-0,49%	99,52
18/01	99,05	101,49	2,06%	101,58

16. La description complète du futures CAC 40 est disponible à l'adresse suivante : <http://globalderivatives.nyx.com/sites/globalderivatives.nyx.com/files/411178.pdf>.

La valeur terminale de l'indice $I_1(t)$ est donc 101,58.

- (b) Si on roule la position $\mathbb{F}_1(t)$ sur le contrat $\mathbb{F}_3(t)$ à l'échéance, on obtient l'indice $I_2(t)$ du tableau suivant :

t	$I_1(t)$	$I_2(t)$	$I_3(t)$	$I_4(t)$
07/01	100,0000	100,0000	100,0000	100,0000
08/01	100,6230	100,6230	100,6230	100,6229
09/01	101,7585	101,7585	101,7585	101,7582
10/01	101,4596	101,4596	101,4596	101,4592
11/01	100,0333	100,0333	100,0333	100,0327
14/01	97,8035	97,8035	97,8137	97,8025
15/01	100,5797	100,5797	100,5552	100,5786
16/01	100,0023	99,9177	99,9779	100,0011
17/01	99,5225	99,4471	99,4982	99,5211
18/01	101,5818	101,4674	101,5571	101,5803

La valeur terminale de l'indice $I_2(t)$ est donc 101,47.

- (c) Si on roule la position $\mathbb{F}_1(t)$ sur le contrat $\mathbb{F}_2(t)$ deux jours avant l'échéance du contrat futures $\mathbb{F}_1(t)$, on obtient l'indice $I_3(t)$ du tableau précédent. La valeur terminale de l'indice $I_3(t)$ est donc 101,56.
5. (a) On note g la fraction correspondant au dépôt de garantie ($g = 10\%$) et s le spread pris par la chambre de compensation (s est égal à 50 pbs). L'indice $I_4(t)$ est donc égal à :

$$\begin{aligned} I_4(t) &= I_4(t-1) \times (1 + R_1^*(t) + ((1-g)r(t-1) + g(r(t-1) - s)) \times dt) \\ &= I_4(t-1) \times (1 + R_1^*(t) + (r(t-1) - g \times s) \times dt) \end{aligned}$$

Par rapport à l'indice $I_1(t)$, il faut donc déduire la rémunération journalière de la chambre de compensation qui est égale à $g \times s \times dt$. Les valeurs de l'indice $I_4(t)$ sont reportées dans le tableau précédent.

- (b) La performance théorique d'un investissement de 1 000 euros entre le 7 janvier et le 18 janvier est donc égale à $1\,000 \times (101,5803 - 100) / 100$, c'est-à-dire 15,80 euros.
- (c) Si l'investisseur dispose de 1 000 euros, il peut acheter 102 contrats futures \mathbb{F}_1 le 7 janvier :

$$\begin{aligned} x &= \left\lfloor \frac{1\,000}{(10\% \times 97,6)} \right\rfloor \\ &= 102 \end{aligned}$$

Le dépôt de garantie s'élève donc à $102 \times 10\% \times 97,6$, soit 995,52 euros. L'investisseur peut donc placer le complément, c'est-à-dire $1\,000 - 995,52 = 4,48$ euros, au taux sans risque. Le 15 janvier, le contrat \mathbb{F}_1 arrive à échéance. Il a donc gagné $102 \times (98,1 - 97,6) = 51,00$ euros. La chambre de compensation rend à l'investisseur son dépôt de garantie rémunéré, qui vaut 995,59 euros. Le complément est maintenant valorisé 4,48 euros. La richesse de l'investisseur devient donc :

$$\begin{aligned} W &= 51,00 + 995,59 + 4,48 \\ &= 1\,051,07 \end{aligned}$$

Le même jour, l'investisseur achète 102 contrats futures \mathbb{F}_2 :

$$\begin{aligned} x &= \left\lfloor \frac{1\,051,07}{(10\% \times 103,0)} \right\rfloor \\ &= 102 \end{aligned}$$

Le dépôt de garantie devient donc $102 \times 10\% \times 103,0$, soit 1 050,60 euros. L'investisseur place le montant restant, c'est-à-dire $1\,051,07 - 1\,050,6 = 0,47$ euros, au taux sans risque. Le 18

janvier, l'investisseur déboucle sa position en futures. Sa richesse est alors égale au gain réalisé sur les futures \mathbb{F}_2 plus le dépôt de garantie rémunéré et le complément actualisé :

$$\begin{aligned}W &= 102 \times (104,0 - 103,0) + 1050,67 + 0,47 \\ &= 102,00 + 1050,67 + 0,47 \\ &= 1\,153,14\end{aligned}$$

La performance réelle d'un investissement de 1 000 euros entre le 7 janvier et le 18 janvier est donc égale à 153,14 euros.

- (d) Les appels de marge vont modifier les calculs précédents, puisqu'ils vont impacter le dépôt de garantie et donc le nombre de contrats. On considère un contrat futures tel que $\mathbb{F}(0) = 100$, $\mathbb{F}(1) = 95$ et $\mathbb{F}(2) = 100$. Avec 1 000 euros, on peut acheter 100 contrats. En $t = 1$, l'investisseur perd 500 euros. Il est donc obligé de déboucler 48 contrats. L'exposition ne porte plus sur 100 contrats, mais sur 52 contrats. En $t = 2$, l'investisseur gagne 260 euros. L'exposition peut maintenant porter sur 76 contrats. Si on n'avait pas tenu compte des appels de marge, l'exposition porterait toujours sur 100 contrats. Les appels de marge accélèrent donc les effets de levier (à la baisse et à la hausse).

20. Processus fractionnaire et stratégie d'investissement long/short

1. Un processus fractionnaire y_t d'ordre d correspond à (TR-QAM, page 411) :

$$(1 - L)^d y_t = \varepsilon_t$$

avec $|d| < 0,5$ et $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

2. La représentation MA infinie est (TR-QAM, page 411) :

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \varepsilon_{t-k}$$

avec :

$$\theta_k = \frac{(k + d - 1)!}{k! (d - 1)!}$$

La représentation AR infinie est (TR-QAM, page 411) :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k y_{t-k} = \varepsilon_t$$

avec :

$$\phi_k = \frac{(k - d - 1)!}{k! (-d - 1)!}$$

On obtient les résultats suivants pour $d = -0,3$ et $d = 0,3$:

	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d = -0,3$	θ_k	1	-0,3	-0,105	-0,059	-0,040	-0,030	-0,023	-0,019	-0,016
	ϕ_k	1	0,3	0,195	0,149	0,123	0,106	0,094	0,084	0,077
$d = 0,3$	θ_k	1	0,3	0,195	0,149	0,123	0,106	0,094	0,084	0,077
	ϕ_k	1	-0,3	-0,105	-0,059	-0,040	-0,030	-0,023	-0,019	-0,016

3. On a :

$$\begin{aligned}
 f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{\left| (1 - e^{-i\lambda})^d \right|^2} \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left((1 - \cos \lambda)^2 + \sin^2 \lambda \right)^{-d} \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (2(1 - \cos \lambda))^{-d} \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(4 \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right)^{-d} \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(2 \sin \frac{\lambda}{2} \right)^{-2d}
 \end{aligned}$$

car¹⁷ :

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \frac{\lambda}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \right) - \cos \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (1 - \cos \lambda)
 \end{aligned}$$

17. On utilise la relation trigonométrique suivante :

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

La méthode de Whittle pour estimer les paramètres dans le domaine spectral consiste à maximiser la log-vraisemblance suivante :

$$\ell = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \ln f(\lambda_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{I(\lambda_j)}{f(\lambda_j)}$$

où $f(\lambda)$ et $I(\lambda)$ sont les valeurs de la densité spectrale et du périodogramme pour la fréquence λ . On obtient donc :

$$\ell = -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 + d \left(n \ln 2 + \sum_{j=0}^{n-1} \ln \left(\sin \frac{\lambda_j}{2} \right) \right) - \frac{\pi}{\sigma^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(2 \sin \frac{\lambda}{2} \right)^{2d} I(\lambda_j)$$

4. (a) On peut calculer la prévision \hat{R}_{t+1} à partir de la représentation AR infinie :

$$\begin{aligned} \hat{R}_{t+1} &= \mathbb{E} \left[-\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k R_{t-k} + \varepsilon_{t+1} \middle| \mathcal{I}_t \right] \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \phi_k R_{t-k} \end{aligned}$$

En pratique, on choisit une valeur m telle que la somme $\sum_{k=m+1}^{\infty} \phi_k$ soit négligeable. On a donc :

$$\hat{R}_{t+1} \simeq \sum_{k=0}^m \phi_k R_{t-k}$$

Si $\hat{R}_{t+1} > 0$ (resp. $\hat{R}_{t+1} < 0$), il est préférable d'être *long* (resp. *short*) du titre. On peut donc proposer la fonction d'exposition suivante :

$$f_e(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } \hat{R}_{t+1} > 0 \\ -1 & \text{si } \hat{R}_{t+1} < 0 \end{cases}$$

C'est une fonction d'exposition binaire qui ne tient pas compte de la valeur de \hat{R}_{t+1} . Une autre fonction d'exposition plus pertinente est :

$$f_e(t) \propto \hat{R}_{t+1}$$

On peut aussi tenir compte de la variance de la prévision et poser :

$$f_e(t) \propto \frac{\hat{R}_{t+1}}{\sigma(\hat{R}_{t+1})}$$

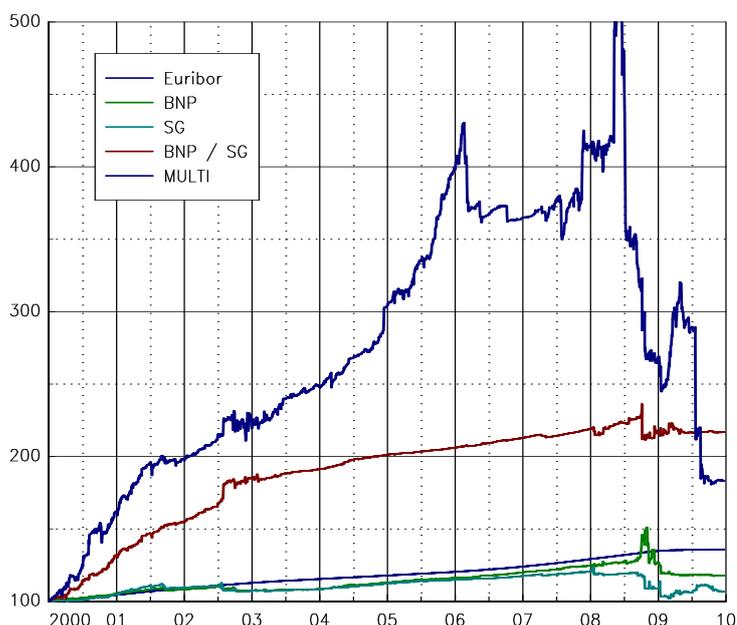
Dans ce cas, si la prévision n'est pas statistiquement différente de zéro, $f_e(t) \simeq 0$. Dans le suite de l'exercice, on utilise $f_e(t) = \alpha \hat{R}_{t+1}$ avec $\alpha = 50$.

(b) Le schéma d'investissement de la stratégie est le suivant.

- i. À la date t , on estime par maximum de vraisemblance les paramètres (d, σ) à partir de l'historique $\{R_{t-1}, \dots, R_{t-h}\}$. On note \hat{d}_t la valeur estimée de d .
- ii. Au moment de la fermeture du marché, on calcule $\hat{R}_{t+1} = -\sum_{k=0}^m \phi_k R_{t-k}$ avec :

$$\phi_k = \frac{(k - \hat{d}_t - 1)!}{k! (-\hat{d}_t - 1)!}$$

FIGURE 6 – Simulation de la performance des stratégies



- iii. On passe un ordre (acheteur ou vendeur selon le signe) pour un montant égal à $\alpha \hat{R}_{t+1}$.
- iv. On ferme la position à la cloture du marché en $t + 1$.

(c) Sur le graphique 6, on a représenté la performance historique de la stratégie pour la période allant de janvier 2000 à décembre 2009 en considérant le titre BNP Paribas. La période h pour estimer (d, σ) est égale à 250 jours ouvrés alors que la période m pour calculer la prévision est égale à 100 jours. On utilise le taux Euribor 1M pour emprunter ou placer la partie non risquée. Le tableau suivant présente les différentes statistiques de performance et de risque :

Statistique	BNP	SG	BNP / SG	MULTI
Rendement annuel	1,64%	0,63%	8,04%	6,23%
Volatilité	5,33%	4,97%	5,55%	16,70%
Ratio de Sharpe	-0,27%	-0,50%	0,89%	0,19%
Drawdown maximum	-22,31%	-17,60%	-10,54%	-64,77%

- (d) Les résultats pour le titre Société Générale sont reportés sur le graphique 6 et le tableau précédent.
5. Dans ce cas, on considère que la différence de rendement $y_t = R_t^1 - R_t^2$ est un processus fractionnaire. La fonction d'exposition *long/short* devient $\alpha \hat{y}_{t+1}$. Cela veut dire que si $\alpha \hat{y}_{t+1} > 0$ (resp. $\alpha \hat{y}_{t+1} < 0$), on est acheteur (resp. vendeur) d'une valeur de $\alpha \hat{y}_{t+1}$ du titre 1 et vendeur (resp. acheteur) d'une valeur de $\alpha \hat{y}_{t+1}$ du titre 2. On obtient les résultats donnés dans le tableau précédent.
6. (a) On construit toutes les paires $R_t^1 - R_t^2$, $R_t^1 - R_t^3$, $R_t^2 - R_t^3$, etc. Pour calculer l'exposition sur chaque paire *long/short*, on peut prendre en compte les corrélations et résoudre à chaque date t un programme d'optimisation de type Markowitz avec contrôle de la volatilité (TR-QAM, page 100). On peut aussi ne pas tenir compte des effets de corrélations et utiliser la fonction d'exposition précédente.
- (b) La seule différence est l'étape iii. Pour chaque paire j , on calcule $\alpha \hat{y}_{t+1}^j$. On transforme ensuite les C_n^2 positions *long/short* en n positions directionnelles pour les n titres du portefeuille.

- (c) Le graphique 6 présente la simulation de la performance historique de la stratégie avec les titres BNP Paribas, Crédit Agricole, Natixis et Société Générale.
- (d) Ces résultats sont extrêmement sensibles à la fenêtre d'estimation h . Une valeur positive de d correspond à une stratégie *trend following* alors qu'une valeur négative de d induit un comportement *mean reverting* (TR-QAM, page 412). Si on choisit une valeur trop petite de h , il est difficile de voir si le rendement ou la différence de rendement est *trend following* ou *mean reverting*. Si h est trop grand, le comportement du titre peut changer pendant la période.

21. Stratégie *volatility target* et indice propriétaire

1. La stratégie dite *volatility target* est définie aux pages 589-591 de TR-QAM.
2. On vérifie empiriquement qu'il y a une relation négative entre la volatilité courte anticipée et le rendement futur. C'est notamment le cas de l'indice VIX (voir les pages 506 et 508 de TR-QAM). La stratégie *volatility target* exploite cette propriété : l'exposition à l'actif risqué est décroissante par rapport à la volatilité courte anticipée.
3. (a) On définit le processus IGARCH d'ordre 1 de la façon suivante (TR-QAM, page 380) :

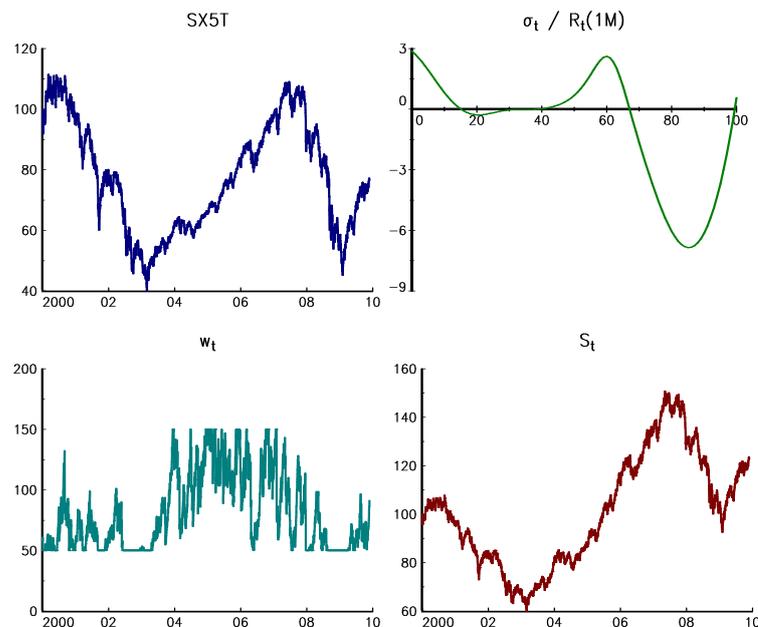
$$R_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t)$$

$$\sigma_t^2 = \kappa + \alpha \sigma_{t-1}^2 + (1 - \alpha) R_{t-1}^2$$

On estime les paramètres par maximum de vraisemblance. On obtient $\kappa = 0$ et $\alpha = 0,9035$.

- (b) On a représenté la relation non paramétrique entre la volatilité σ_t et le rendement futur 1 mois $R_t(1M)$ sur le graphique 7.
- (c) Le diagramme du schéma d'investissement est présenté à la page 591 de TR-QAM.
- (d) Les poids de l'actif risqué et la simulation de la performance historique de la stratégie sont donnés sur le graphique 7. Le rendement annuel de la stratégie, la volatilité, le ratio de Sharpe et le drawdown maximum sont égaux à 2,07%, 15,36%, $-0,06$ et $-44,80\%$ (contre $-2,63\%$, 25,62%, $-0,22$ et $-64,64\%$ pour l'indice Eurostoxx 50).
4. (a) Un indice propriétaire est un indice d'une banque d'investissement.
- (b) L'indice n'est pas investissable et obéit à des règles systématiques de gestion.
- (c) Il faut préciser le sous-jacent, décrire comment la volatilité IGARCH est estimée, donner la formule d'exposition de l'actif risqué et la formule de valorisation de l'indice. Les règles doivent être suffisamment détaillées pour que n'importe quel tiers puisse revaloriser lui-même l'indice.
- (d) On peut effectivement créer un fonds UCITS puisque l'exposition en actif risqué ne dépasse pas 200%. L'avantage est que le fonds UCITS peut appartenir à la catégorie des fonds à formule.

FIGURE 7 – Illustration de la stratégie *volatility target*



22. Calcul du ratio de Sharpe

1. Le ratio de Sharpe est défini aux pages 65-67 de TR-QAM. La valeur typique d'un ratio de Sharpe est 0,25 pour un investissement *buy and hold* long terme sur une classe d'actifs traditionnelle.
2. Pour calculer la performance annuelle de l'indice Eurostoxx 50, on utilise la formule page 60. Le 31 décembre 1999, le niveau de l'indice Eurostoxx 50 est 6 136,63. Le 31 décembre 2009, celui-ci est 4 697,61. La période étant égale à 10 ans, on en déduit que la performance annuelle est (TR-QAM, page 60) :

$$\begin{aligned}\mu &= \left(\frac{4\,697,61}{6\,136,63} \right)^{\frac{1}{10}} - 1 \\ &= -2,64\%\end{aligned}$$

On calcule ensuite la volatilité annuelle comme l'écart-type des rendements actuariels journaliers multiplié par $\sqrt{260}$. On obtient $\sigma = 25,62\%$.

3. (a) La moyenne des taux Eonia pour la période 2000-2009 est $r = 2,95\%$. On obtient alors un ratio de Sharpe égal à :

$$\begin{aligned}\text{sh} &= \frac{\mu - r}{\sigma} \\ &= \frac{-2,64 - 2,95}{25,62} \\ &= -0,2182\end{aligned}$$

- (b) On capitalise l'indice Eonia en utilisant la formule suivante :

$$I(t) = I(t-1) \times \left(1 + i(t-1) \times \frac{\Delta(t-1;t)}{365} \right)$$

avec $I(t)$ la valeur de l'investissement, $i(t)$ l'indice Eonia et $\Delta(t-1;t)$ le nombre de jours entre les dates $t-1$ et t . En considérant un investissement de 100 euros le 1er janvier 2000, celui-ci est égal à 134,38 euros le 31 décembre 2009. La performance annuelle correspondante est donc :

$$\begin{aligned}r &= \left(\frac{134,38}{100,00} \right)^{\frac{1}{10}} - 1 \\ &= 3,00\%\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\text{sh} &= \frac{-2,64 - 3,00}{25,62} \\ &= -0,2200\end{aligned}$$

- (c) La surperformance de l'indice Eurostoxx 50 par rapport à l'investissement dans le fonds monétaire est égal à (TR-QAM, page 67) :

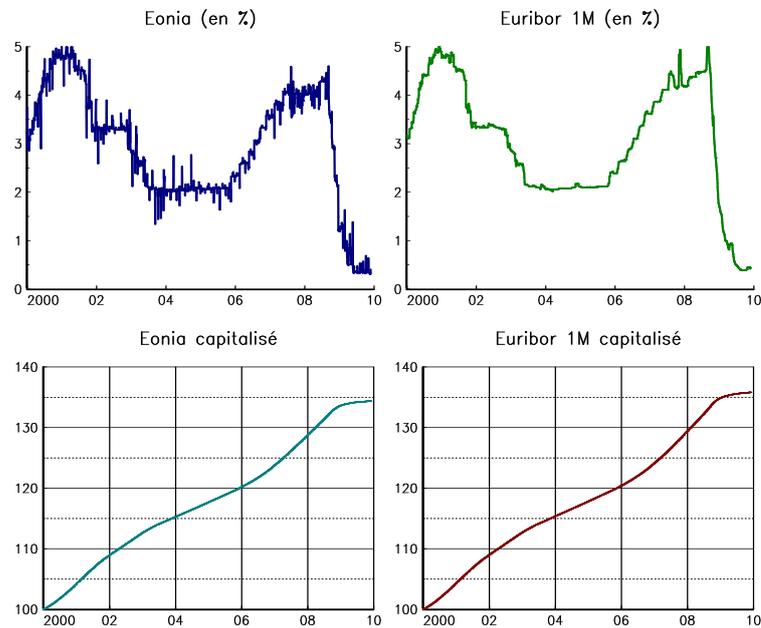
$$\begin{aligned}\mu|r &= \left[\frac{4\,697,61}{6\,136,63} \bigg/ \frac{134,38}{100,00} \right]^{1/10} - 1 \\ &= -5,47\%\end{aligned}$$

On vérifie que la surperformance n'est pas exactement la différence de performance qui est égale à $-5,64\%$. Le ratio de Sharpe est donc égal à :

$$\begin{aligned}\text{sh} &= \frac{\mu|r}{\sigma} \\ &= \frac{-5,47}{25,62} \\ &= -0,2136\end{aligned}$$

- (d) Il est clair que la première méthode n'est pas correcte, puisque la performance sur une période n'est pas la moyenne des performances journalières et que cette méthode n'inclut pas les effets de capitalisation. Le ratio de Sharpe est souvent défini comme le rapport entre la différence de la performance et du taux sans risque, et la volatilité. Comme il est expliqué dans TR-QAM, ceci n'est valable que lorsque l'on considère une seule période. La bonne définition est celle qui utilise la surperformance. D'ailleurs, c'est la seule qui soit cohérente avec la définition du ratio d'information lorsque le benchmark est le taux sans risque (TR-QAM, page 108).
4. La différence entre l'indice Eonia et le taux Euribor est expliquée à la page 614 de TR-QAM.
5. En utilisant la définition de la question 3(c), on obtient un ratio de Sharpe égal à $-0,2175$. On remarque donc que la valeur du ratio de Sharpe dépend de la définition du taux sans risque. Un benchmark Eonia n'est donc pas équivalent à un benchmark Euribor 1M ou Euribor 3M, même si dans la pratique les différences sont faibles comme le montre le graphique 8.

FIGURE 8 – Indice Eonia et taux Euribor 1M



23. Détermination d'un portefeuille de marché

1. Pour déterminer le portefeuille de marché, on peut maximiser le ratio de Sharpe (TR-QAM, page 99) ou déterminer la frontière efficiente en incluant l'actif sans risque (voir l'exercice 29.6.e page 77). On obtient les résultats suivants :

r	2,00%	3,00%	4,00%
x_1^*	10,72%	13,25%	17,43%
x_2^*	12,06%	12,34%	12,80%
x_3^*	28,92%	29,23%	29,73%
x_4^*	48,30%	45,19%	40,04%
$\mu(x^*)$	8,03%	8,27%	8,68%
$\sigma(x^*)$	4,26%	4,45%	4,84%
sh(x^*)	141,29%	118,30%	96,65%

- (a) Le portefeuille de marché est $x^* = (10,72\%, 12,06\%, 28,92\%, 48,30\%)$ si le taux sans risque r est égal à 2%. Son ratio de Sharpe est égal à 1,41.
- (b) Le portefeuille de marché devient $x^* = (13,25\%, 12,34\%, 29,23\%, 45,19\%)$.
- (c) Le portefeuille de marché devient $x^* = (17,43\%, 12,80\%, 29,73\%, 40,04\%)$.
- (d) Le poids du premier actif croît alors que celui du quatrième actif décroît lorsque le taux sans risque augmente. Ceci s'explique par le fait que lorsque le taux sans risque augmente, le portefeuille optimal doit présenter un rendement plus élevé et donc une volatilité plus élevée. Il va donc s'exposer beaucoup plus sur les actifs qui présentent plus de rendement et de volatilité (c'est-à-dire le premier actif) au détriment des actifs qui présentent moins de rendement et de volatilité (c'est-à-dire le quatrième actif).
2. (a) On note b le benchmark. Soit e l'erreur de réplication. On a (TR-QAM, pages 103-104) :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[e] = (x - b)^\top \mu \\ \sigma(e) = \sqrt{(x - b)^\top \Sigma (x - b)} \end{cases}$$

Le programme d'optimisation est donc :

$$\begin{aligned} x^* &= \arg \max (x - b)^\top \mu \\ \text{s.c.} &\begin{cases} \sigma(e) \leq \sigma^* \\ \mathbf{1}^\top x = 1 \\ \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme dans le cas du problème de Markowitz, on transforme ce problème en ϕ -problème (TR-QAM, page 104) :

$$x^*(\phi) = \arg \min x^\top \Sigma x - x^\top (\phi \mu + 2\Sigma b) + (b^\top \Sigma b + \phi b^\top \mu)$$

On a donc un problème QP avec $Q = 2\Sigma$ et $R = \phi \mu + 2\Sigma b$.

- (b) On obtient les résultats suivants :

Objectif	Benchmark	min $\sigma(e)$	max $\sigma(e)$	$\sigma(e) = 3\%$	max ir($x b$)
x_1^*	60,00%	60,00%	100,00%	83,01%	60,33%
x_2^*	30,00%	30,00%	0,00%	16,99%	29,92%
x_3^*	10,00%	10,00%	0,00%	0,00%	9,75%
x_4^*	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
$\mu(x^*)$	12,80%	12,80%	15,00%	14,15%	12,82%
$\sigma(x^*)$	10,99%	10,99%	15,00%	13,38%	11,03%
sh(x^*)	89,15%	89,15%	80,00%	83,32%	89,04%
$\mu(x^* b)$	0,00%	0,00%	2,20%	1,35%	0,02%
$\sigma(x^* b)$	0,00%	0,00%	5,16%	3,00%	0,05%
ir($x^* b$)	0,00%	0,00%	42,62%	45,01%	46,54%

Le portefeuille qui minimise la volatilité de tracking error est bien sûr le benchmark. Le portefeuille qui a la volatilité de tracking error la plus élevée est celui qui correspond au rendement le plus élevé. On a donc $x^* = (100\%, 0\%, 0\%, 0\%)$.

- (c) On obtient $x^* = (60,33\%, 29,92\%, 9,75\%, 0,00\%)$. Le ratio d'information de ce portefeuille est 46,54%.
- (d) Avec les contraintes $x_i^* \in [10\%, 50\%]$, le portefeuille optimal est $x^* = (50\%, 30\%, 10\%, 10\%)$. C'est aussi le portefeuille qui a la volatilité de tracking error la plus faible et la plus élevée. En fait, le problème est que tous les portefeuilles qui vérifient les contraintes $x_i^* \in [10\%, 50\%]$ ont une surperformance négative.
- (e) Dans le tableau précédent, on a pris $r = 3\%$. Si on reprend le portefeuille de marché optimal, c'est-à-dire $x^* = (13,25\%, 12,34\%, 29,23\%, 45,19\%)$, on obtient un ratio d'information égal à -55,39%. Il n'y a donc pas d'équivalence entre la dominance basée sur le ratio d'information et celle basée sur le ratio de Sharpe.

Encadré 10 (Programme permettant de résoudre la question 1)

```

let mu =    0.15 0.10 0.08 0.06;
let sigma = 0.15 0.10 0.07 0.05;
let rho = 1.00
           0.50 1.00
           0.20 0.20 1.00
           0.00 0.00 0.00 1.00;
rho = xpnd(rho);
cov = rho .* sigma .* sigma';
call invpd(cov);

A = ones(1,4); B = 1; C = 0; D = 0; Bounds = (0~1) .* ones(4,1);

// Question 1

Results = zeros(8,3);

phi = seqa(0,0.0001,10001);
{x,er,risk,phi,retcode} = Qprog_Allocation_Solve(mu,cov,A,B,C,D,Bounds,phi,0);

rf = 0.02;
sh = (er - rf)./risk;
indx = maxindc(sh);
Results[:,1] = rf|x[:,indx]|er[indx]|risk[indx]|sh[indx];

rf = 0.03;
sh = (er - rf)./risk;
indx = maxindc(sh);
Results[:,2] = rf|x[:,indx]|er[indx]|risk[indx]|sh[indx];

rf = 0.04;
sh = (er - rf)./risk;
indx = maxindc(sh);
Results[:,3] = rf|x[:,indx]|er[indx]|risk[indx]|sh[indx];

print ftosa(100*Results,"%lf",3,2);

```

Encadré 11 (Programme permettant de résoudre la question 2)

```
// Question 2

Results = zeros(10,6);

rf = 0.03;
let x0 = 0.60 0.30 0.10 0.00;
er = x0'mu;
risk = sqrt(x0'cov*x0);
Sh = (er-rf)/risk;

Results[:,1] = x0|er|risk|sh|0|0|0;

{x,te,surperf} = Qprog_Index_Solve(x0,cov,A,B,C,D,Bounds,0,mu,0,x0);
IR = surperf/te;
er = x'mu; risk = sqrt(x'cov*x); Sh = (er-rf)/risk;
Results[:,2] = x|er|risk|sh|surperf|te|IR;

{x,te,surperf} = Qprog_Index_Solve(x0,cov,A,B,C,D,Bounds,100,mu,0,x0);
IR = surperf/te;
er = x'mu; risk = sqrt(x'cov*x); Sh = (er-rf)/risk;
Results[:,3] = x|er|risk|sh|surperf|te|IR;

{x,surperf,te,phi,retcode} = Qprog_TE_Solve(x0,cov,A,B,C,D,Bounds,mu,0.03);
IR = surperf/te;
er = x'mu; risk = sqrt(x'cov*x); Sh = (er-rf)/risk;
Results[:,4] = x|er|risk|sh|surperf|te|IR;

phi = seqa(0,0.001,1001);
{x,te,surperf} = Qprog_Index_Solve(x0,cov,A,B,C,D,Bounds,phi,mu,0,x0);
IR = surperf./te;
indx = maxindc(IR);
x = x[:,indx]; er = x'mu; risk = sqrt(x'cov*x); Sh = (er-rf)/risk;
Results[:,5] = x|er|risk|sh|surperf[indx]|te[indx]|IR[indx];

te = seqa(0.000,0.0001,50);
{x,surperf,te,phi,retcode} = Qprog_TE_Solve(x0,cov,A,B,C,D,Bounds,mu,te);
IR = surperf./te;
indx = maxindc(IR);
x = x[:,indx]; er = x'mu; risk = sqrt(x'cov*x); Sh = (er-rf)/risk;
Results[:,6] = x|er|risk|sh|surperf[indx]|te[indx]|IR[indx];

print ftosa(100*Results,"%lf",3,2);
print "-----";

Bounds = ones(4,1) .* (0.10~0.50);
{x_min,te_min,er_te} = Qprog_Index_Solve(x0,cov,A,B,C,D,Bounds,0,mu,0,x0);
{x_max,te_max,er_te} = Qprog_Index_Solve(x0,cov,A,B,C,D,Bounds,100,mu,0,x0);
print ftosa(100*(x_min~x_max),"%lf",3,2);
print ftosa(100*(te_min~te_max),"te = %lf",3,2);
```

24. Allocation stratégique, allocation tactique et modèle de Black-Litterman

1. (a) L'allocation stratégique d'actifs consiste à définir la politique d'investissement de long terme du fonds de pension. Cela implique d'estimer les primes de risques associées aux différentes classes d'actifs et de construire le benchmark de gestion. Autrement dit, l'allocation stratégique d'actifs vise à définir les poids de ce benchmark, en particulier la répartition entre actions et obligations. Au niveau des fonds de pension européens, on note que l'exposition moyenne est 70% en obligations et 30% en actions (ou actifs risqués).
- (b) La prime de risque d'une classe d'actifs est le supplément de rémunération par rapport au taux sans risque exigé par l'investisseur pour acheter l'actif risqué. On a :

$$\pi = \mu - r$$

avec π la prime de risque, μ l'espérance de rendement de la classe d'actifs et r le taux sans risque.

- (c) On considère qu'il n'y a pas de prime de risque pour les matières premières (matières premières agricoles, matières premières énergétiques, or) et pour les devises (devises des pays développés, devises des pays émergents). La prime de risque des actions s'explique par le versement de dividendes et la croissance économique, alors que celle des obligations provient de l'inflation, de la croissance économique et de la prime de terme (courbe des taux croissante).
2. (a) L'allocation tactique consiste à modifier l'allocation stratégique pour prendre en compte des vues de court terme (page 551 de TR-QAM). Généralement, on fait la distinction entre allocation tactique et market timing. Ce dernier se base uniquement sur les sentiments de marché (finance comportementale) alors que l'allocation tactique se fonde sur les modèles de *business cycle* (page 552 de TR-QAM).
 - (b) On peut considérer qu'elle est :
 - i. contradictoire par rapport à l'allocation stratégique, car elle modifie le benchmark de long terme ; on peut donc se retrouver dans une situation où le portefeuille d'investissement ne correspond jamais à la politique d'investissement de long terme définie par le fonds de pension ;
 - ii. complémentaire de l'allocation stratégique car elle vise à se couvrir contre le cycle des affaires ; elle permet donc de prendre en compte les dynamiques de l'output gap et de l'inflation alors que l'allocation stratégique se fonde principalement sur les valeurs d'équilibre du PIB potentiel et de l'inflation de long terme.
 - (c) Les primes de risque varient au cours du temps à cause du cycle des affaires. Dans le modèle de Lucas (1978), l'agent économique est sensible à la corrélation entre sa capacité de consommation et la performance des actifs (TR-QAM, page 552). Ainsi, lors d'une récession économique, il demande une prime de risque plus élevée pour les actifs qui sont positivement corrélés au cycle économique. C'est l'exemple des actions.
3. (a) On remarque que généralement l'espérance de rendement est une fonction croissante du risque mesurée par la volatilité. Ce n'est pas le cas des matières premières qui ont la même prime de risque que les actions des pays émergents alors qu'elles présentent une volatilité supérieure de 50%. On a le même constat pour la dette émergente et les actions des pays développés. Du point de vue des corrélations, on note une corrélation négative faible entre les obligations des pays développés et les actions. On est donc plutôt dans un régime de faible inflation ou de *flight to quality*. La dette émergente est corrélée positivement aux actions, ce qui lui confère plutôt le statut d'actif risqué. On remarque aussi que la corrélation la plus forte des matières premières concerne celle avec les actions des pays émergents. C'est tout en fait en accord avec la théorie de la demande de matières premières et les besoins des pays émergents en infrastructure.
 - (b) On a (TR-QAM, pages 136-137) :

$$\pi = \frac{r + \text{sh}^* \sqrt{x^{*\top} \Sigma x^*}}{x^{*\top} \Sigma x^*} \Sigma x^*$$

avec x^* le vecteur des poids du portefeuille actuel, sh^* le ratio de Sharpe de long terme et r le taux sans risque. Comme on a $x^* = (55\%, 0\%, 45\%, 0\%, 0\%)$, on obtient les résultats suivants :

sh^*	0,25	0,10	0,50	0,25	0,25
r	2,0%	2,0%	2,0%	0,0%	4,0%
π_1	0,8%	0,6%	1,2%	0,4%	1,2%
π_2	4,2%	3,0%	6,1%	1,9%	6,4%
π_3	7,4%	5,3%	10,8%	3,5%	11,3%
π_4	6,8%	4,9%	9,9%	3,2%	10,4%
π_5	3,1%	2,2%	4,5%	1,4%	4,7%

Si $r = 2\%$ et $sh^* = 0,25$, on a $\pi = (0,8\%, 4,2\%, 7,4\%, 6,8\%, 3,1\%)$. On remarque que π est extrêmement sensible à la valeur du taux sans risque et à l'hypothèse du ratio de Sharpe de long terme. Néanmoins, on note que ces deux paramètres n'interviennent que comme facteur d'échelle puisque les primes de risque d'équilibre π sont toutes proportionnelles à Σx^* .

(c) On a (TR-QAM, page 138) :

$$P\mu = Q + \varepsilon$$

avec $P = I_5$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Omega)$, $Q = (5\%, 10\%, 8\%, 12\%, 12\%)$ et $\Omega = 0,05^2 \times I_5$. On cherche donc le portefeuille x^{BL} qui est solution du programmation d'optimisation suivant (TR-QAM, page 140) :

$$x^{\text{BL}} = \arg \min_{\tau} \sqrt{(x^{\text{BL}}(\tau) - x^*)^\top \Sigma (x^{\text{BL}}(\tau) - x^*)}$$

avec Σ la matrice de covariance et $x^{\text{BL}}(\tau)$ l'ensemble des portefeuilles définis par :

$$x^{\text{BL}}(\tau) = \arg \min_x x^\top \Sigma x$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \mu_{\text{cond}}(\tau)^\top x = 7\% \\ \mathbf{1}^\top x = 1 \\ \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1} \end{cases}$$

avec :

$$\mu_{\text{cond}} = \pi + \tau \Sigma P^\top (P \tau \Sigma P^\top + \Omega)^{-1} (Q - P\pi)$$

Pour chaque valeur de $\tau \geq 0$, on transforme le second problème en problème quadratique (cela revient à transformer le mu-problème d'allocation en phi-problème d'allocation). On considère ensuite parmi tous les portefeuilles $x^{\text{BL}}(\tau)$ celui qui présente la plus petite tracking error. On obtient $x^{\text{BL}} = (45,7\%, 4,2\%, 43,0\%, 2,7\%, 4,5\%)$.

(d) On a $\mu(x^*) = 6,3\%$ et $\sigma(x^*) = 7,0\%$ pour le portefeuille actuel et $\mu(x^{\text{BL}}) = 7,0\%$ et $\sigma(x^{\text{BL}}) = 7,7\%$ pour le portefeuille de Black-Litterman¹⁸. Puisque le rendement recherché est supérieur à celui du portefeuille actuel, on réduit l'exposition en obligations pour s'exposer à des classes d'actifs plus risquées telles que les actions des pays émergents et les matières premières. Le portefeuille x^{BL} est bien un portefeuille d'allocation tactique puisque l'on cherche à modifier le portefeuille actuel du fonds de pension afin de tenir compte des prévisions récentes des primes de risque.

18. La tracking error est égale à 1,9% ce qui implique que le ratio d'information du portefeuille de Black-Litterman vaut 35,1%.

25. Gap risk et méthode CPPI

1. (a) Le principe de la méthode CPPI est donné aux pages 446-447 de TR-QAM.
- (b) La dynamique de V_t est (TR-QAM, page 449) :

$$dV_t = (V_t - mC_t) \frac{dB_t}{B_t} + mC_t \frac{dS_t}{S_t}$$

- (c) On a (TR-QAM, page 449) :

$$dC_t = (r + m(\mu - r))C_t dt + m\sigma S_t dW_t$$

On en déduit que :

$$C_t = C_0 \exp \left(\left(r + m(\mu - r) - \frac{1}{2}m^2\sigma^2 \right) t + m\sigma W_t \right)$$

- (d) La distribution de C_T est log-normale. On a donc :

$$\Pr \{C_T \geq 0\} = 1$$

Comme $V_T = V_0 + C_T$, on en déduit que :

$$\Pr \{V_T \geq V_0\} = 1$$

- (e) On a :

$$\begin{aligned} \Pr \{V_T = V_0\} &= \Pr \{V_0 + C_T = V_0\} \\ &= \Pr \{C_T = 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans ce modèle, il est théoriquement impossible de monétariser le coussin. Ceci est dû au fait que le coussin est réajusté en temps continu et qu'il n'y a pas de saut du sous-jacent.

2. (a) Les dynamiques de V_i et C_i deviennent (TR-QAM, page 454) :

$$\begin{aligned} V_i &= V_{i-1} + (V_{i-1} - mC_{i-1})r_i + mC_{i-1}R_i \\ C_i &= V_i - F_i \end{aligned}$$

avec r_i le rendement de B_t entre les dates t_{i-1} et t_i et :

$$F_i = F_{i-1}(1 + r_i)$$

- (b) On en déduit que :

$$V_i = V_{i-1}(1 + r_i) + mC_{i-1}(R_i - r_i)$$

et :

$$\begin{aligned} C_i &= V_i - F_i \\ &= V_{i-1}(1 + r_i) + mC_{i-1}(R_i - r_i) - F_{i-1}(1 + r_i) \\ &= C_{i-1}(1 + r_i) + mC_{i-1}(R_i - r_i) \\ &= C_{i-1}(1 - (m-1)r_i + mR_i) \end{aligned}$$

On a donc (TR-QAM, page 456) :

$$\begin{aligned} \pi &= \Pr \{C_{i+1} < 0 \mid C_i > 0\} \\ &= \Pr \{C_i(1 - (m-1)r_{i+1} + mR_{i+1}) < 0 \mid C_i > 0\} \\ &= \Pr \{1 - (m-1)r_{i+1} + mR_{i+1} < 0\} \\ &= \Pr \left\{ R_{i+1} < -\frac{1 - (m-1)r_{i+1}}{m} \right\} \\ &\simeq \Pr \left\{ R_{i+1} < -\frac{1}{m} \right\} \end{aligned}$$

- (c) On vérifie que cette probabilité ne dépend pas de la valeur actuelle du coussin C_i . Ceci est dû à la fonction d'exposition qui est proportionnelle à la valeur du coussin : $e_i = mC_i$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{e_{i+1}}{C_i} &= m \frac{C_{i+1}}{C_i} \\ &= m \frac{C_{i+1}}{C_i} \\ &= m(1 - (m-1)r_{i+1} + mR_{i+1})\end{aligned}$$

L'exposition relative de l'actif risqué par rapport à la valeur du coussin est donc indépendante de la valeur du coussin, il est donc tout à fait normal que la probabilité de monétariser le coussin $\Pr\{C_{i+1} < 0 | C_i > 0\}$ ne dépende pas de C_i .

- (d) On définit le gap risk de la façon suivante (TR-QAM, page 454) :

$$\begin{aligned}g &= \mathbb{E}[C_T | C_T < 0] \\ &= \mathbb{E}[V_T - F_T | C_T < 0] \\ &= \mathbb{E}[V_T - V_0 | V_T < V_0]\end{aligned}$$

C'est donc l'espérance de la perte ($V_T - V_0$) si la valeur de la stratégie termine en-dessous de la garantie $G = V_0$.

3. On se place dans le modèle discret précédent et on suppose que les rendements R_i sont *i.i.d.* de distribution de probabilité \mathbf{F} .

- (a) On a :

$$\begin{aligned}\gamma &= \mathbb{E}[C_{i+1} | C_i > 0 \text{ et } C_{i+1} < 0] \\ &= \mathbb{E}[C_i(1 - (m-1)r_{i+1} + mR_{i+1}) | R_{i+1} < R^-]\end{aligned}$$

avec :

$$R^- = -\frac{1 - (m-1)r_{i+1}}{m}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\gamma &= C_i(1 - (m-1)r_{i+1}) + mC_i\mathbb{E}[R_{i+1} | R_{i+1} < R^-] \\ &= C_i(1 - (m-1)r_{i+1}) + \frac{mC_i}{\mathbf{F}(R^-)} \int_{-\infty}^{R^-} xf(x) dx\end{aligned}$$

γ est une fonction linéaire de C_i avec :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial C_i} = 1 - (m-1)r_{i+1} + \frac{m}{\mathbf{F}(R^-)} \int_{-\infty}^{R^-} xf(x) dx < 0$$

On a donc :

$$C_1 > C_2 \Rightarrow \gamma(C_1) \leq \gamma(C_2)$$

On en déduit donc que plus le coussin actuel est élevé, plus le gap risk est négatif.

- (b) On a :

$$\begin{aligned}p &= \Pr\{C_n < 0\} \\ &= 1 - \Pr\{C_n \geq 0\} \\ &= 1 - \Pr\left\{\bigcap_{i=0}^{n-1} (C_{i+1} \geq 0 | C_i \geq 0)\right\} \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} \Pr\{C_{i+1} \geq 0 | C_i \geq 0\} \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \Pr\{C_{i+1} < 0 | C_i \geq 0\})\end{aligned}$$

On en déduit que :

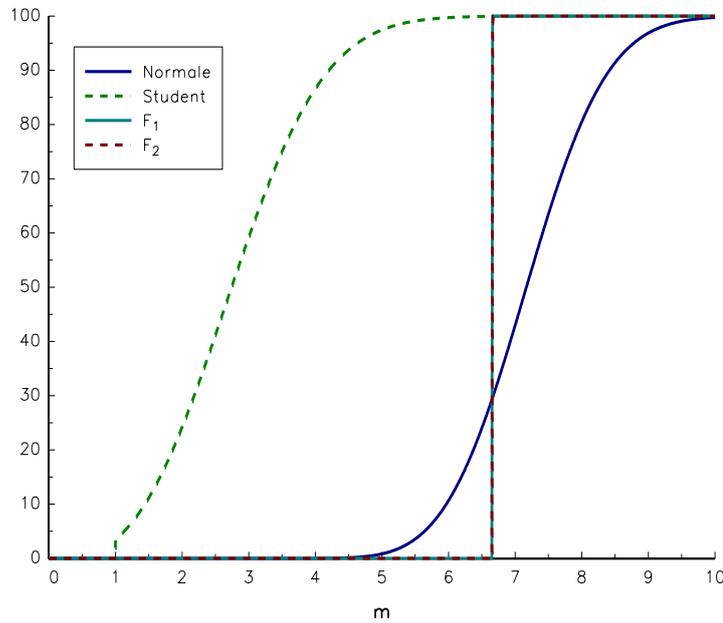
$$p = 1 - (1 - \pi)^n$$

avec :

$$\pi = \Pr \left\{ R_{i+1} < -\frac{1 - (m-1)r_{i+1}}{m} \right\} = \mathbf{F}(R^-)$$

- (c) On obtient $\gamma = -0,10\%$ et $p = 0,83\%$.
- (d) On obtient $\gamma = -2,34\%$ et $p = 97,46\%$.
- (e) On obtient $\gamma = 0\%$ et $p = 0\%$.
- (f) Sur le graphique 9, on représente p en fonction de m pour les quatre distributions précédentes. Dans le cas des fonctions continues, l'évolution de p est continue, alors que p passe très rapidement de 0% à 100% dans le cas où la distribution de probabilité est discrète.

FIGURE 9 – Évolution de la probabilité p (en %) en fonction du multiplicateur m



4. (a) On a (TR-QAM, page 448) :

$$\rho = \mathbb{E} \left[\frac{\partial V_T}{\partial S_T} \middle| S_T \geq S_0 \right]$$

Cette mesure représente donc la variation relative moyenne de l'investissement par rapport à l'évolution du sous-jacent en phase de hausse du marché. Par exemple, si $\rho = 50\%$, l'investisseur s'attend à participer en moyenne à 50% de la hausse du marché. L'objectif de l'investisseur est d'obtenir un taux de participation élevé.

- (b) On a :

$$\begin{aligned} \rho &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial C_T}{\partial S_T} + \frac{\partial F_T}{\partial S_T} \middle| S_T \geq S_0 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial C_T}{\partial S_T} \middle| S_T \geq S_0 \right] \end{aligned}$$

Comme on a (TR-QAM, page 450) :

$$C_T = C_0 \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^m e^{-((m-1)r + \frac{1}{2}(m^2-m)\sigma^2)T}$$

on en déduit que :

$$\frac{\partial C_T}{\partial S_T} = m C_0 \frac{S_T^{m-1}}{S_0^m} e^{-((m-1)r + \frac{1}{2}(m^2-m)\sigma^2)T}$$

et :

$$\rho = m \frac{C_0}{S_0^m} e^{-((m-1)r + \frac{1}{2}(m^2-m)\sigma^2)T} \mathbb{E} [S_T^{m-1} | S_T \geq S_0]$$

Or on a¹⁹ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_T^{m-1} | S_T \geq S_0] &= c S_0^{m-1} e^{(m-1)(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \frac{1}{2}(m-1)^2\sigma^2 T} \\ &= c S_0^{m-1} e^{(m-1)(\mu + \frac{1}{2}(m-2)\sigma^2)T} \end{aligned}$$

avec :

$$c = \frac{\Phi \left((\mu\sigma^{-1} + (m - \frac{3}{2})\sigma) \sqrt{T} \right)}{\Phi \left((\mu\sigma^{-1} - \frac{1}{2}\sigma) \sqrt{T} \right)}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \rho &= c m \frac{C_0}{S_0} e^{-((m-1)r + \frac{1}{2}(m^2-m)\sigma^2)T + (m-1)(\mu + \frac{1}{2}(m-2)\sigma^2)T} \\ &= c m \frac{C_0}{S_0} e^{(m-1)(\mu - r - \sigma^2)T} \end{aligned}$$

Cette expression de ρ est valable dans le cas où le coussin est réajusté en temps continu et qu'il n'y a pas de saut du sous-jacent. S'il y a du gap risk, alors on a :

$$\begin{aligned} \rho &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial C_T}{\partial S_T} \middle| S_T \geq S_0 \right] \\ &\simeq \mathbb{E} \left[\frac{\partial C_T}{\partial S_T} \middle| S_T \geq S_0 \right] \times \Pr \{C_T \geq 0\} + \mathbb{E} \left[\frac{\partial C_T}{\partial S_T} \middle| S_T \geq S_0 \right] \times \Pr \{C_T < 0\} \\ &\simeq (1 - \pi)^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial C_T}{\partial S_T} \middle| S_T \geq S_0 \right] \end{aligned}$$

La participation peut diminuer donc fortement si π est très élevé.

- (c) On suppose que S_t est un mouvement brownien géométrique avec $\mu = 15\%$. On pose $r = 5\%$ et $T = 1$. En considérant une garantie égale à 100% de la valeur initiale V_0 , on obtient un coussin initial de 4,8%. Sur le graphique 10, on représente le taux de participation ρ en fonction du multiplicateur m . C'est une fonction croissante puis décroissante par rapport à la volatilité du sous-jacent σ . L'impact du *gap risk* est illustré sur le graphique 11 pour $T = 1$ et $T = 2$ en supposant que le rebalancement du coussin se fasse tous les jours. À partir d'une certaine valeur de multiplicateur, la probabilité π devient significative et impacte fortement le taux de participation. Dans le cas d'un modèle non gaussien, cet impact peut s'avérer beaucoup plus important et concerner des valeurs plus petites du multiplicateur.

19. On utilise le résultat suivant (TR-QAM, page 285) :

$$\mathbb{E} [X^m | X \geq x_-] = \frac{1 - \Phi \left((\ln x_- - \mu_X - m\sigma_X^2) / \sigma_X \right)}{1 - \Phi \left((\ln x_- - \mu_X) / \sigma_X \right)} e^{m\mu_X + \frac{1}{2}m^2\sigma_X^2}$$

avec $X \sim \mathcal{LN}(\mu_X, \sigma_X)$.

FIGURE 10 – Valeur théorique de ρ (en %)

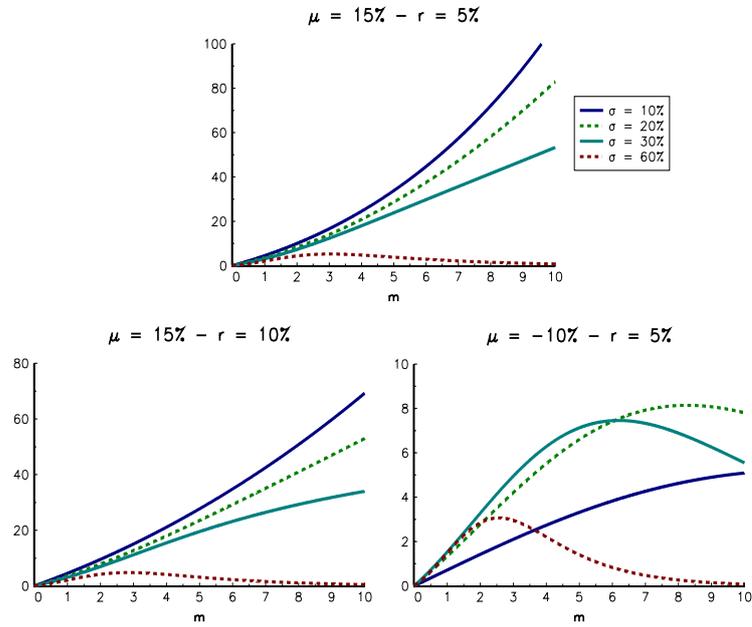
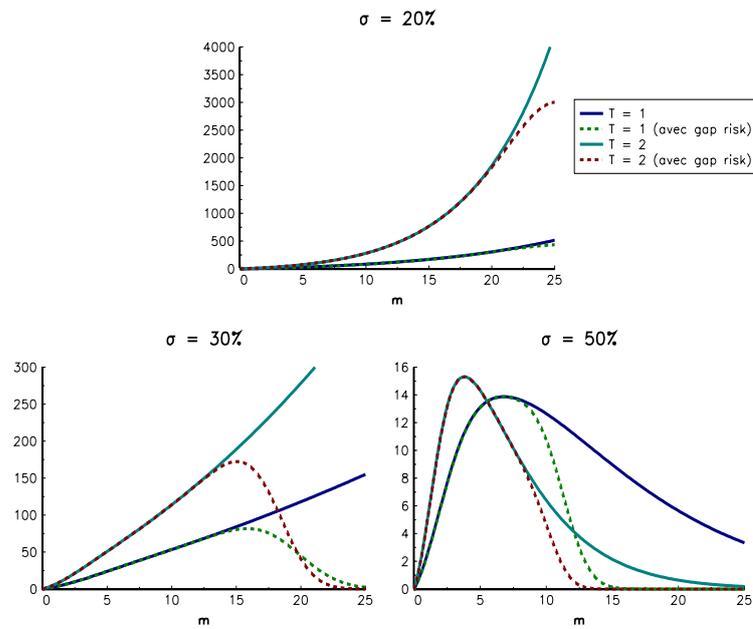


FIGURE 11 – Impact du *gap risk* sur le taux de participation ρ (en %)



26. Comparaison du filtre de covariance de Kalman et du filtre d'information

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} (I + AB^T C^{-1} B)^{-1} A &= (I + AB^T C^{-1} B)^{-1} (A^{-1})^{-1} \\ &= (A^{-1} (I + AB^T C^{-1} B))^{-1} \\ &= (A^{-1} + B^T C^{-1} B)^{-1} \end{aligned}$$

(b) Si la relation suivante est vraie :

$$(I + AB^T C^{-1} B)^{-1} = I - AB^T (C + BAB^T)^{-1} B$$

alors on doit vérifier que $\Phi = (I + AB^T C^{-1} B) (I - AB^T (C + BAB^T)^{-1} B)$ est la matrice identité. On a :

$$\begin{aligned} \Phi &= (I + AB^T C^{-1} B) (I - AB^T (C + BAB^T)^{-1} B) \\ &= (I + AB^T C^{-1} B) - (I + AB^T C^{-1} B) AB^T (C + BAB^T)^{-1} B \\ &= (I + AB^T C^{-1} B) - (I + AB^T C^{-1} B) AB^T (B^{-1} C + AB^T)^{-1} \\ &= (I + AB^T C^{-1} B) - (I + AB^T C^{-1} B) (B^{-1} C B^T A^{-1} + I)^{-1} \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} I + AB^T C^{-1} B &= (AB^T C^{-1} B) ((AB^T C^{-1} B)^{-1} + I) \\ &= (AB^T C^{-1} B) (B^{-1} C B^T A^{-1} + I) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \Phi &= (I + AB^T C^{-1} B) - (AB^T C^{-1} B) (B^{-1} C B^T A^{-1} + I) (B^{-1} C B^T A^{-1} + I)^{-1} \\ &= (I + AB^T C^{-1} B) - (AB^T C^{-1} B) \\ &= I \end{aligned}$$

(c) D'après les questions (a) et (b), on a :

$$(I + AB^T C^{-1} B)^{-1} A = (A^{-1} + B^T C^{-1} B)^{-1}$$

et :

$$(I + AB^T C^{-1} B)^{-1} = I - AB^T (C + BAB^T)^{-1} B$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} (A^{-1} + B^T C^{-1} B)^{-1} &= (I - AB^T (C + BAB^T)^{-1} B) A \\ &= A - AB^T (C + BAB^T)^{-1} BA \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (I + AB^T C^{-1} B)^{-1} AB^T C^{-1} &= (A^{-1} + B^T C^{-1} B)^{-1} B^T C^{-1} \\ &= (A - AB^T (C + BAB^T)^{-1} BA) B^T C^{-1} \\ &= AB^T C^{-1} - AB^T (C + BAB^T)^{-1} BAB^T C^{-1} \\ &= AB^T C^{-1} - AB^T (C + BAB^T)^{-1} ((BAB^T + C) C^{-1} - I) \\ &= AB^T C^{-1} - AB^T (C + BAB^T)^{-1} (BAB^T + C) C^{-1} + \\ &\quad AB^T (C + BAB^T)^{-1} \\ &= AB^T C^{-1} - AB^T C^{-1} + AB^T (C + BAB^T)^{-1} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$(I + AB^\top C^{-1}B)^{-1} AB^\top C^{-1} = AB^\top (C + BAB^\top)^{-1}$$

2. (a) Soit V une matrice de covariance. La matrice d'information de Fisher \mathbb{I} est l'inverse de V :

$$\mathbb{I} = V^{-1}$$

Cette matrice est utilisée dans la méthode du maximum de vraisemblance (TR-QAM, page 267).

- (b) Le vecteur a_t^* (resp. $a_{t|t-1}^*$) est l'estimateur de α_t normalisé par sa matrice de covariance sachant l'information à l'instant t (resp. à l'instant $t-1$).
- (c) On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_t P_{t|t-1} &= P_t^{-1} P_{t|t-1} \\ &= P_{t|t-1}^{-1} (I_m - P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} Z_t)^{-1} P_{t|t-1} \\ &= P_{t|t-1}^{-1} (I_m + P_{t|t-1} Z_t^\top H_t^{-1} Z_t) P_{t|t-1} \\ &= I_m + Z_t^\top H_t^{-1} Z_t P_{t|t-1} \end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned} (I_m - P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} Z_t)^{-1} &= I_m - P_{t|t-1} Z_t^\top (-F_t + Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top)^{-1} Z_t \\ &= I_m - P_{t|t-1} Z_t^\top (-H_t)^{-1} Z_t \\ &= I_m + P_{t|t-1} Z_t^\top H_t^{-1} Z_t \end{aligned}$$

- (d) On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_t P_{t|t-1} Z_t^\top (Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + H_t)^{-1} &= (I_m + Z_t^\top H_t^{-1} Z_t P_{t|t-1}) Z_t^\top (Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + H_t)^{-1} \\ &= Z_t^\top (I_m + H_t^{-1} Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top) (Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top + H_t)^{-1} \\ &= Z_t^\top H_t^{-1} \end{aligned}$$

car²⁰ :

$$\begin{aligned} (I + B^{-1}A)(A + B)^{-1} &= (A + B)^{-1} + B^{-1}A(A + B)^{-1} \\ &= (A + B)^{-1} + B^{-1}(I + BA^{-1})^{-1} \\ &= (A + B)^{-1} + B^{-1}(I - (I + BA^{-1})^{-1}BA^{-1}) \\ &= (A + B)^{-1} + B^{-1} - B^{-1}(AB^{-1} + I)^{-1} \\ &= (A + B)^{-1} + B^{-1} - (A + B)^{-1} \\ &= B^{-1} \end{aligned}$$

- (e) On a :

i.

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{t|t-1} &= P_{t|t-1}^{-1} \\ &= (T_t P_{t-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top)^{-1} \\ &= (T_t \mathbb{I}_{t-1}^{-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top)^{-1} \end{aligned}$$

20. Pour trouver le résultat, on pose $A = Z_t P_{t|t-1} Z_t^\top$ et $B = H_t$.

ii.

$$\begin{aligned}
a_{t|t-1}^* &= \mathbb{I}_{t|t-1} a_{t|t-1} \\
&= \mathbb{I}_{t|t-1} T_t a_{t-1} \\
&= \mathbb{I}_{t|t-1} T_t \mathbb{I}_{t-1}^{-1} a_{t-1}^*
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_t &= P_t^{-1} \\
&= P_{t|t-1}^{-1} (I_m - P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} Z_t)^{-1} \\
&= P_{t|t-1}^{-1} (I_m + P_{t|t-1} Z_t^\top H_t^{-1} Z_t) \\
&= \mathbb{I}_{t|t-1} + Z_t^\top H_t^{-1} Z_t
\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}
a_t^* &= \mathbb{I}_t a_t \\
&= \mathbb{I}_t (a_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} (y_t - Z_t a_{t|t-1})) \\
&= \mathbb{I}_t (I_m - P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} Z_t) a_{t|t-1} + \mathbb{I}_t P_{t|t-1} Z_t^\top F_t^{-1} y_t \\
&= a_{t|t-1}^* + Z_t^\top H_t^{-1} y_t
\end{aligned}$$

Les équations du filtre d'information sont donc :

$$\begin{cases}
\mathbb{I}_{t|t-1} = (T_t \mathbb{I}_{t-1}^{-1} T_t^\top + R_t Q_t R_t^\top)^{-1} \\
a_{t|t-1}^* = \mathbb{I}_{t|t-1} T_t \mathbb{I}_{t-1}^{-1} a_{t-1}^* \\
\mathbb{I}_t = \mathbb{I}_{t|t-1} + Z_t^\top H_t^{-1} Z_t \\
a_t^* = a_{t|t-1}^* + Z_t^\top H_t^{-1} y_t
\end{cases}$$

(f) D'un point de vue numérique, on note que le nombre d'opérations matricielles est :

- i. 5 additions, 10 multiplications et 1 inversion pour le filtre de covariance ;
- ii. 3 additions, 10 multiplications et 2 inversions pour le filtre d'information ;

Il n'est donc pas évident que l'on gagne en temps de calcul en utilisant le filtre d'information. Son avantage peut donc tenir au fait que l'inversion de \mathbb{I}_{t-1} est plus stable numériquement que celle de F_t dans certains cas.

(g) On a (TR-QAM, page 350) :

$$\ell = -\frac{nT}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |F_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T v_t^\top F_t^{-1} v_t$$

avec :

$$\begin{aligned}
F_t &= Z_t \mathbb{I}_{t|t-1}^{-1} Z_t^\top + H_t \\
v_t &= y_t - Z_t \mathbb{I}_{t|t-1}^{-1} a_{t|t-1}^* \\
a_0^* &= \mathbf{0} \\
\mathbb{I}_0 &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(h) On pose $\alpha_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, pI_m)$ avec p un scalaire suffisamment grand pour que $\mathbb{I}_0 = p^{-1}I_m \simeq \mathbf{0}$.

27. Le coefficient bêta

1. (a) Le bêta d'un titre est le rapport de la covariance du rendement du titre i avec celui du portefeuille de marché et de la variance du rendement du titre i (TR-QAM, page 264). Dans la théorie du CAPM, on a :

$$\mathbb{E}[R_i] = r + \beta_i (\mathbb{E}[R_M] - r)$$

avec R_i le rendement du titre i , R_M le rendement du portefeuille de marché, r le taux sans risque et β_i le bêta du titre i :

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i, R_M)}{\text{var}(R_m)}$$

- (b) On a :

$$\text{cov}(R, R_M) = \Sigma b$$

et :

$$\text{var}(R_m) = b^\top \Sigma b$$

On en déduit que :

$$\beta_i = \frac{(\Sigma b)_i}{b^\top \Sigma b}$$

- (c) On rappelle que l'opérateur \mathbb{E} est bilinéaire. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{cov}(c_1 X_1 + c_2 X_2, X_3) &= \mathbb{E}[(c_1 X_1 + c_2 X_2 - \mathbb{E}[c_1 X_1 + c_2 X_2])(X_3 - \mathbb{E}[X_3])] \\ &= \mathbb{E}[(c_1 (X_1 - \mathbb{E}[X_1]) + c_2 (X_2 - \mathbb{E}[X_2]))(X_3 - \mathbb{E}[X_3])] \\ &= c_1 \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1])(X_3 - \mathbb{E}[X_3])] + \\ &\quad c_2 \mathbb{E}[(X_2 - \mathbb{E}[X_2])(X_3 - \mathbb{E}[X_3])] \\ &= c_1 \text{cov}(X_1, X_3) + c_2 \text{cov}(X_2, X_3) \end{aligned}$$

- (d) On a :

$$\begin{aligned} \beta_w &= \frac{\text{cov}(R_w, R_M)}{\text{var}(R_m)} \\ &= \frac{\text{cov}(w^\top R, b^\top R)}{\text{var}(b^\top R)} \\ &= \frac{w^\top \mathbb{E}[(R - \mu)((R - \mu)^\top)] b}{b^\top \mathbb{E}[(R - \mu)((R - \mu)^\top)] b} \\ &= \frac{w^\top \Sigma b}{b^\top \Sigma b} \\ &= w^\top \frac{\Sigma b}{b^\top \Sigma b} \\ &= w^\top \beta \\ &= \sum_{i=1}^n w_i \beta_i \end{aligned}$$

avec $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

- (e) On obtient $\beta_{w_1} = 0,80$ pour le portefeuille 1 et $\beta_{w_2} = 0,85$ pour le portefeuille 2.

2. (a) On a :

$$\begin{cases} 0,4\sigma_1^2 + 0,15\sigma_1\sigma_2 + 0,15\sigma_1\sigma_3 = \beta_1 \text{var}(R_m) \\ 0,2\sigma_1\sigma_2 + 0,3\sigma_2^2 + 0,15\sigma_2\sigma_3 = \beta_2 \text{var}(R_m) \\ 0,2\sigma_1\sigma_3 + 0,15\sigma_2\sigma_3 + 0,3\sigma_3^2 = \beta_3 \text{var}(R_m) \end{cases} \quad (3)$$

On a trois équations à trois inconnues σ_1 , σ_2 et σ_3 . On remarque néanmoins que si on multiplie σ_1 , σ_2 et σ_3 par une constante c , alors on obtient le même système d'équations car $\text{var}(R_m)$ est multiplié aussi par c^2 . Il nous faut donc une équation supplémentaire pour déterminer σ_1 , σ_2 et σ_3 .

(b) On a une équation supplémentaire :

$$\begin{aligned}\beta_w \text{var}(R_m) &= \frac{1}{3} (0,4\sigma_1^2 + 0,15\sigma_1\sigma_2 + 0,15\sigma_1\sigma_3) + \\ &\quad \frac{1}{3} (0,2\sigma_1\sigma_2 + 0,3\sigma_2^2 + 0,15\sigma_2\sigma_3) + \\ &\quad \frac{1}{3} (0,2\sigma_1\sigma_3 + 0,15\sigma_2\sigma_3 + 0,3\sigma_3^2)\end{aligned}$$

On a donc l'impression que l'on pourrait résoudre le problème. Néanmoins, on a toujours la même difficulté. Si on multiplie les volatilités σ_1 , σ_2 et σ_3 par une constante c , alors le bêta du portefeuille ne change pas. D'ailleurs, voici par exemple trois solutions numériques telles que $\beta_1 = 0,811$, $\beta_2 = 0,998$, $\beta_3 = 1,254$ et $\beta_w = 1,021$:

Solution	1	2	3
σ_1	18,406%	6,725%	20%
σ_2	23,004%	8,405%	25%
σ_3	27,610%	10,088%	30%

(c) En considérant les solutions précédentes, on note que $\sigma_3 = 1,5 \times \sigma_1$ et $\sigma_2 = 1,25 \times \sigma_1$. Il est facile de vérifier ces relations (approximativement) à partir du système (3).

3. On a :

$$b = n^{-1}\mathbf{1}$$

(a) On a :

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\text{cov}(R, R_M)}{\text{var}(R_m)} \\ &= \frac{\Sigma b}{b^\top \Sigma b} \\ &= \frac{n^{-1} \Sigma \mathbf{1}}{n^{-2} (\mathbf{1}^\top \Sigma \mathbf{1})} \\ &= n \frac{\Sigma \mathbf{1}}{(\mathbf{1}^\top \Sigma \mathbf{1})}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \beta_i &= \mathbf{1}^\top \beta \\ &= \mathbf{1}^\top n \frac{\Sigma \mathbf{1}}{(\mathbf{1}^\top \Sigma \mathbf{1})} \\ &= n \frac{\mathbf{1}^\top \Sigma \mathbf{1}}{(\mathbf{1}^\top \Sigma \mathbf{1})} \\ &= n\end{aligned}$$

(b) Si $\rho_{i,j} = 0$, on a :

$$\beta_i = n \frac{\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 &\Rightarrow n \frac{\sigma_1^2}{\sum_{j=1}^3 \sigma_j^2} \geq n \frac{\sigma_2^2}{\sum_{j=1}^3 \sigma_j^2} \geq n \frac{\sigma_3^2}{\sum_{j=1}^3 \sigma_j^2} \\ &\Rightarrow \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \sigma_3^2 \\ &\Rightarrow \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3\end{aligned}$$

(c) si $\rho_{i,j} = \rho$, on a :

$$\begin{aligned}\beta_i &\propto \sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} \rho \sigma_i \sigma_j \\ &= \sigma_i^2 + \rho \sigma_i \sum_{j \neq i} \sigma_j + \rho \sigma_i^2 - \rho \sigma_i^2 \\ &= (1 - \rho) \sigma_i^2 + \rho \sigma_i \sum_{j=1}^n \sigma_j \\ &= f(\sigma_i)\end{aligned}$$

avec :

$$f(x) = (1 - \rho)x^2 + x\rho \sum_{j=1}^n \sigma_j$$

On a :

$$f'(x) = 2(1 - \rho)x + \rho \sum_{j=1}^n \sigma_j$$

Si $\rho \geq 0$, alors $f(x)$ est une fonction croissante de x pour $x \geq 0$ car $(1 - \rho) \geq 0$ et $\rho \sum_{j=1}^n \sigma_j \geq 0$. Le résultat précédent est alors conservé :

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \Rightarrow \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \text{si } \rho_{i,j} = \rho \geq 0$$

Si $-n^{-1} < \rho < 0$, alors f' est décroissante si $x < -2^{-1}\rho(1 - \rho)^{-1} \sum_{j=1}^n \sigma_j$, puis croissante. On a donc :

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \not\Rightarrow \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad \text{si } \rho_{i,j} = \rho < 0$$

En fait, l'implication est dans la plupart des cas vérifiée. Pour qu'elle ne soit pas vérifiée, il faut considérer des exemples un peu "tordus" en considérant de fortes disparités entre les volatilités et une corrélation négative proche de $-n^{-1}$.

- (d) On considère que $\sigma_1 = 15\%$, $\sigma_2 = 20\%$, $\sigma_3 = 22\%$, $\rho_{1,2} = 70\%$, $\rho_{1,3} = 30\%$ et $\rho_{2,3} = -50\%$. On a alors $\beta_1 = 1,231$, $\beta_2 = 0,958$ et $\beta_3 = 0,811$. C'est donc un exemple tel que $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$ et $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.
- (e) Il n'y a aucune raison que l'on ait soit $\sum_{i=1}^n \beta_i < n$ soit $\sum_{i=1}^n \beta_i > n$. On prend l'exemple numérique précédent. Dans le cas où $b = (5\%, 25\%, 70\%)$, on obtient $\sum_{i=1}^3 \beta_i = 1,808$ alors que pour le portefeuille $b = (20\%, 40\%, 40\%)$, on a $\sum_{i=1}^3 \beta_i = 3,126$.
4. (a) On fait la régression linéaire $R_{i,t} = \beta_i R_{M,t} + u_t$ et on obtient $\hat{\beta}_i = 1,06$.
- (b) On en déduit que la contribution c_i du marché est égale à (TR-QAM, page 308) :

$$c_i = \frac{\beta_i^2 \text{var}(R_m)}{\text{var}(R_i)} = 90,6\%$$

28. Le ratio de Sharpe

1. (a) On a (TR-QAM, page 98) :

$$\text{sh}_i = \frac{\mu_i - r}{\sigma_i}$$

(b) On a :

$$\text{sh} = \frac{w_1\mu_1 + w_2\mu_2 - r}{\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2 + w_2^2\sigma_2^2}}$$

(c) On en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{sh} &= \frac{w_1\mu_1 + (1 - w_1)r - r}{\sqrt{w_1^2\sigma_1^2}} \\ &= \frac{w_1}{|w_1|} \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \\ &= \text{sgn}(w_1) \text{sh}_1 \end{aligned}$$

2. (a) On note R^* le rendement aléatoire du portefeuille. On a :

$$\mathbb{E}[R^*] = \sum_{i=1}^n n^{-1}\mu_i = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mu_i$$

et :

$$\sigma(R^*) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (n^{-1}\sigma_i)^2} = n^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$$

On en déduit que l'expression du ratio de Sharpe du portefeuille est :

$$\begin{aligned} \text{sh} &= \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n \mu_i - r}{n^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (\mu_i - r)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \end{aligned}$$

(b) On en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{sh} &= \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}} \cdot \frac{(\mu_i - r)}{\sigma_i} \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \cdot \text{sh}_i \end{aligned}$$

avec :

$$p_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}}$$

(c) Comme $0 < \sigma_i < \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}$, on en déduit que :

$$0 < p_i < 1$$

(d) On obtient les résultats suivants :

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$\sum_{i=1}^n p_i$	sh
\mathcal{A}_1	38,5%	38,5%	57,7%	19,2%	57,7%	211,7%	0,828
\mathcal{A}_2	25,5%	25,5%	34,1%	17,0%	85,1%	187,3%	0,856

Il peut être surprenant que le portefeuille \mathcal{A}_2 présente un ratio de Sharpe supérieur au portefeuille \mathcal{A}_1 , puisque quatre actifs de \mathcal{A}_2 sont dominés par tous les actifs de \mathcal{A}_1 . Seul le cinquième actif présente un ratio de Sharpe supérieur. On peut néanmoins comprendre ce résultat en considérant la décomposition précédente. En effet, le cinquième actif a une volatilité bien supérieure à tous les actifs. Son poids p_5 (et donc sa contribution au Sharpe) est alors bien plus grand.

3. (a) On a (TR-QAM, page 131) :

$$\begin{aligned}\sigma(R^*) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (n^{-1}\sigma)^2 + 2 \sum_{i>j}^n \rho (n^{-1}\sigma)^2} \\ &= \sigma \sqrt{\rho + n^{-1}(1-\rho)}\end{aligned}$$

On en déduit que l'expression du ratio de Sharpe du portefeuille est :

$$\text{sh} = \frac{n^{-1} \sum_{i=1}^n \mu_i - r}{\sigma \sqrt{\rho + n^{-1}(1-\rho)}}$$

(b) On a donc :

$$\begin{aligned}\text{sh} &= \frac{1}{\sqrt{\rho + n^{-1}(1-\rho)}} n^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_i - r)}{\sigma} \\ &= p \cdot \bar{\text{sh}}\end{aligned}$$

avec :

$$p = \frac{1}{\sqrt{\rho + n^{-1}(1-\rho)}}$$

(c) On cherche n tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{\rho + n^{-1}(1-\rho)}} = p$$

On en déduit que :

$$n^* = p^2 \frac{1-\rho}{1-\rho p^2}$$

Si $\rho = 50\%$ et $p = 1,25$, on obtient :

$$\begin{aligned}n^* &= 1,25^2 \frac{1-0,5}{1-0,5 \times 1,25^2} \\ &= 3,6\end{aligned}$$

Quatre actifs sont donc suffisants pour améliorer le ratio de Sharpe de 25%.

(d) On remarque que :

$$p = \frac{1}{\sqrt{\rho + n^{-1}(1-\rho)}} < \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

Si $\rho = 80\%$, alors $p < 1,12$. Il n'est donc pas possible d'améliorer le ratio de Sharpe de 25% lorsque la corrélation est égale à 80%.

(e) Le paramètre important est la corrélation ρ . Plus cette corrélation est petite, plus il est possible d'augmenter le ratio de Sharpe en augmentant le nombre d'actifs dans le portefeuille. Si la corrélation est élevée, le gain en ratio de Sharpe est négligeable. Par exemple, si la corrélation est supérieure à 80%, le gain espéré maximum est 12%.

29. Variations autour de la frontière efficiente

1. On en déduit que la matrice de covariance est :

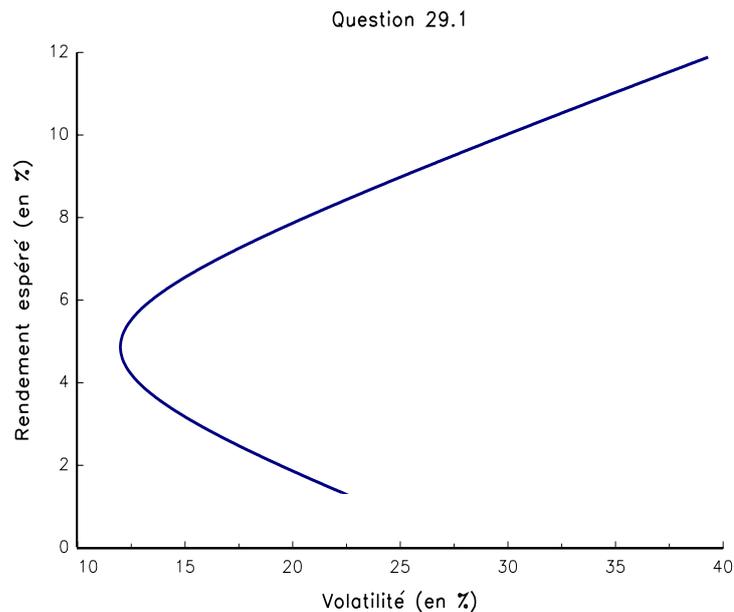
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2,250 & 0,300 & 1,500 & 2,250 \\ 0,300 & 4,000 & 3,500 & 2,400 \\ 1,500 & 3,500 & 6,250 & 6,000 \\ 2,250 & 2,400 & 6,000 & 9,000 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

On doit ensuite résoudre le phi-problème d'allocation (TR-QAM, page 95). On obtient les résultats suivants²¹ :

ϕ	-1,00	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50	1,00	2,00
w_1^*	83,39	78,07	75,40	72,74	70,08	67,42	62,09	51,44
w_2^*	84,76	67,11	58,29	49,46	40,64	31,82	14,17	-21,13
w_3^*	-103,12	-61,79	-41,12	-20,45	0,21	20,88	62,21	144,88
w_4^*	34,97	16,61	7,43	-1,75	-10,93	-20,12	-38,48	-75,20
$\mu(w^*)$	3,10	3,98	4,42	4,86	5,30	5,74	6,62	8,38
$\sigma(w^*)$	15,23	12,88	12,22	12,00	12,22	12,88	15,23	22,27

On a représenté la frontière efficiente sur le graphique 12.

FIGURE 12 – Frontière efficiente de Markowitz



- On résout le phi-problème avec $\phi = 0$ (TR-QAM, page 90). Le portefeuille de variance minimale est $w_1^* = 72,74\%$, $w_2^* = 49,46\%$, $w_3^* = -20,45\%$ et $w_4^* = -1,75\%$. On en déduit que $\mu(w^*) = 4,86\%$ et $\sigma(w^*) = 12,00\%$.
- Il n'existe pas de portefeuille optimal si la volatilité cible σ^* est égale à 10%, puisque le portefeuille de variance minimale correspond à une volatilité de 12%. Trouver le portefeuille optimal pour $\sigma^* = 15\%$ ou $\sigma^* = 20\%$ revient à résoudre le sigma-problème d'allocation (TR-QAM, page 97).

21. Les poids, rendements et volatilités sont exprimées en %.

Pour $\sigma^* = 15\%$ (resp. $\sigma^* = 20\%$), on obtient une valeur implicite de ϕ égale à 0,96 (resp. 1,71). Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

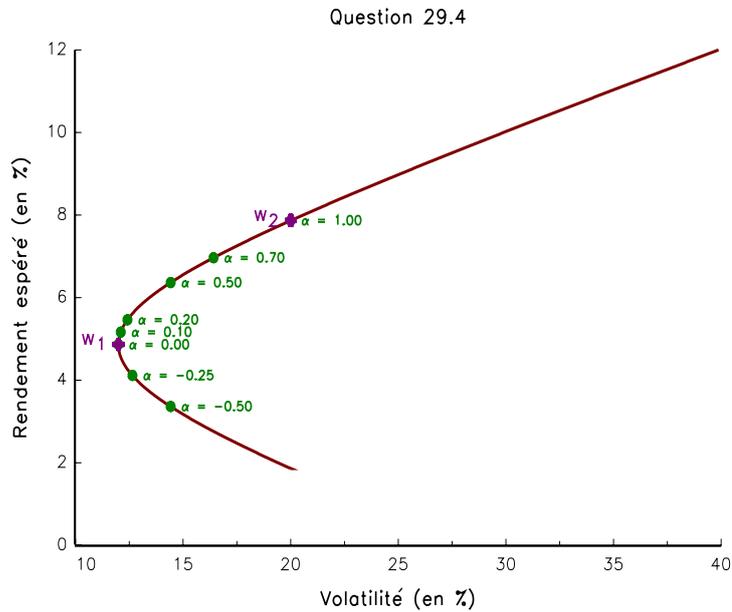
σ^*	15,00	20,00
w_1^*	62,52	54,57
w_2^*	15,58	-10,75
w_3^*	58,92	120,58
w_4^*	-37,01	-64,41
$\mu(w^*)$	6,55	7,87
ϕ	0,96	1,71

4. Soit le portefeuille défini par $w_\alpha = (1 - \alpha)w_1 + \alpha w_2$ avec w_1 le portefeuille de variance minimale et w_2 le portefeuille dont la volatilité cible est 20%. On obtient les résultats suivants :

α	$\sigma(w_\alpha)$	$\mu(w_\alpha)$
-0,50	14,42	3,36
-0,25	12,64	4,11
0,00	12,00	4,86
0,10	12,10	5,16
0,20	12,41	5,46
0,50	14,42	6,36
0,70	16,41	6,97
1,00	20,00	7,87

On a représenté ces portefeuilles sur le graphique 13. On remarque que ces portefeuilles sont situés sur la frontière efficiente. Ceci est tout à fait normal puisque l'on sait que la combinaison de deux portefeuilles optimaux correspond à un portefeuille optimal.

FIGURE 13 – Ensemble des portefeuilles $w_\alpha = (1 - \alpha)w_1 + \alpha w_2$



5. Si on considère la contrainte supplémentaire $0 \leq w_i \leq 1$, on obtient les résultats suivants :

σ^*	min	12,00	15,00	20,00
w_1^*	65,49	✓	45,59	24,88
w_2^*	34,51	✓	24,74	4,96
w_3^*	0,00	✓	29,67	70,15
w_4^*	0,00	✓	0,00	0,00
$\mu(w^*)$	5,35	✓	6,14	7,15
$\sigma(w^*)$	12,56	✓	15,00	20,00
ϕ	0,00	✓	1,24	2,20

6. (a) On a :

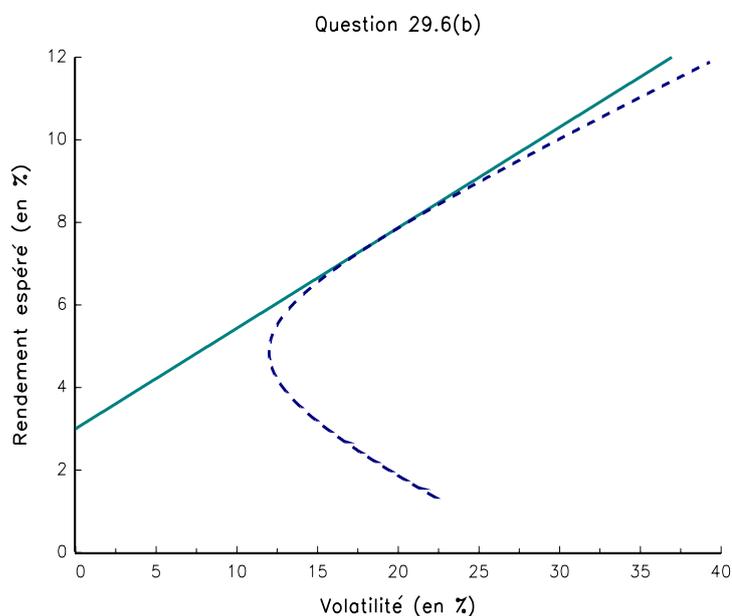
$$\mu = \begin{pmatrix} 5,0 \\ 6,0 \\ 8,0 \\ 6,0 \\ 3,0 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

et :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2,250 & 0,300 & 1,500 & 2,250 & 0,000 \\ 0,300 & 4,000 & 3,500 & 2,400 & 0,000 \\ 1,500 & 3,500 & 6,250 & 6,000 & 0,000 \\ 2,250 & 2,400 & 6,000 & 9,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

(b) On résout le phi-problème et on obtient la frontière efficiente représentée sur le graphique 14.

FIGURE 14 – Frontière efficiente lorsque l'on introduit un actif sans risque



(c) Cette frontière efficiente est une droite, elle passe par l'actif sans risque et elle est tangente à la frontière efficiente précédente du graphique 12. Cet exercice est une application directe du théorème de séparation de Tobin.

- (d) On considère 2 portefeuilles de cette frontière efficiente correspondant à $\phi = 0,25$ et $\phi = 0,50$.
On a les résultats suivants :

ϕ	0,25	0,50
w_1^*	9,11	18,23
w_2^*	-0,82	-1,63
w_3^*	17,36	34,71
w_4^*	-9,46	-18,93
w_5^*	83,81	67,62
$\mu(w^*)$	3,74	4,48
σ^*	3,04	6,09

Le premier portefeuille a un rendement espéré de 3,74% pour une volatilité de 3,04%. Il est investi à hauteur de 83,81% dans l'actif sans risque, ce qui explique sa faible volatilité. Pour le second portefeuille, la part de l'actif sans risque est moins élevée (elle est égale à 67,62%). Le rendement espéré et la volatilité valent alors 4,48% et 6,09%. On note w_1 et w_2 ces deux portefeuilles. Par définition, le ratio de Sharpe du portefeuille de marché est la tangente de la droite. On a donc :

$$\begin{aligned} \text{sh} &= \frac{\mu(w_2) - \mu(w_1)}{\sigma(w_2) - \sigma(w_1)} \\ &= \frac{4,48 - 3,74}{6,09 - 3,04} \\ &= 0,24 \end{aligned}$$

Le ratio de Sharpe du portefeuille de marché est donc égal à 0,24.

- (e) Par construction, tout portefeuille appartenant à la droite tangente est une combinaison linéaire de deux portefeuilles de cette droite tangente. À partir des deux portefeuilles précédents, on a donc :

$$w_\alpha = (1 - \alpha)w_1 + \alpha w_2$$

avec le portefeuille w_α appartenant à la tangente. Le portefeuille de marché w^M est donc le portefeuille w_α qui a une allocation nulle dans l'actif sans risque (TR-QAM, pages 98-99). On en déduit donc que la valeur α^M qui correspond à ce portefeuille de marché vérifie la relation suivante :

$$(1 - \alpha^M)w_{1,5} + \alpha^M w_{2,5} = 0$$

car l'actif sans risque est la cinquième composante du vecteur des poids. On a donc :

$$\begin{aligned} \alpha^M &= \frac{w_{1,5}}{w_{1,5} - w_{2,5}} \\ &= \frac{83,81}{83,81 - 67,62} \\ &= 5,18 \end{aligned}$$

On en déduit que le portefeuille de marché est :

$$w^M = (1 - 5,18) \times \begin{pmatrix} 9,11 \\ -0,82 \\ 17,36 \\ -9,46 \\ 83,81 \end{pmatrix} + 5,18 \times \begin{pmatrix} 18,23 \\ -1,63 \\ 34,71 \\ -18,93 \\ 67,62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56,30 \\ -5,04 \\ 107,21 \\ -58,46 \\ 0,00 \end{pmatrix}$$

7. (a) On a :

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ r \end{pmatrix}$$

et :

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Si on intègre l'actif sans risque, le ϕ -problème d'allocation est (TR-QAM, page 95) :

$$\begin{aligned} \tilde{w}^*(\phi) &= \arg \min \frac{1}{2} \tilde{w}^\top \tilde{\Sigma} \tilde{w} - \phi \tilde{w}^\top \tilde{\mu} \\ \text{s.c. } & \mathbf{1}^\top \tilde{w} = 1 \end{aligned}$$

On remarque que la fonction objectif peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f(\tilde{w}) &= \frac{1}{2} \tilde{w}^\top \tilde{\Sigma} \tilde{w} - \phi \tilde{w}^\top \tilde{\mu} \\ &= \frac{1}{2} w^\top \Sigma w - \phi w^\top \mu - \phi w_r r \\ &= g(w, w_r) \end{aligned}$$

et que la contrainte devient $\mathbf{1}^\top w + w_r = 1$. On en déduit que l'expression du Lagrangien est :

$$g_\lambda(w, w_r) = \frac{1}{2} w^\top \Sigma w - \phi w^\top \mu - \phi w_r r + \lambda (\mathbf{1}^\top w + w_r - 1)$$

Les conditions de premier ordre sont (TR-QAM, page 90) :

$$\begin{cases} \partial_w g_\lambda(w, w_r) &= \Sigma w - \phi \mu + \lambda \mathbf{1} = 0 \\ \partial_{w_r} g_\lambda(w, w_r) &= -\phi r + \lambda = 0 \\ \partial_\lambda g_\lambda(w, w_r) &= \mathbf{1}^\top w + w_r - 1 = 0 \end{cases}$$

La solution du programme d'optimisation est donc :

$$\begin{cases} w^* = \phi \Sigma^{-1} (\mu - r \mathbf{1}) \\ \lambda^* = \phi r \\ w_r^* = 1 - \phi \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} (\mu - r \mathbf{1}) \end{cases}$$

Notons w_0^* le portefeuille suivant :

$$w_0^* = \frac{\Sigma^{-1} (\mu - r \mathbf{1})}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} (\mu - r \mathbf{1})}$$

On peut alors écrire la solution du programme d'optimisation de la façon suivante :

$$\begin{cases} w^* = \delta w_0^* \\ \lambda^* = \phi r \\ w_r^* = 1 - \delta \\ \delta = \phi \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} (\mu - r \mathbf{1}) \end{cases}$$

La première équation indique que les proportions relatives d'actifs risqués restent les mêmes. w_r^* est nul si $\delta = 1$ ou encore si :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 \\ &= \frac{1}{\mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} (\mu - r \mathbf{1})} \end{aligned}$$

Si $\phi = \phi_0$, alors $w^* = w_0^*$ et $w_r^* = 0$. On en déduit que w_0^* est le portefeuille de marché. Si $\phi \neq \phi_0$, w^* est proportionnel à w_0^* et la partie investie dans l'actif sans risque est le complément pour obtenir un poids de 100%. On retrouve donc le théorème de séparation de Sharpe et Tobin :

$$\tilde{w}^* = \delta \times \underbrace{\begin{pmatrix} w_0^* \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Actifs risqués}} + (1 - \delta) \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Actif sans risque}}$$

30. Les stratégies de taux

1. La formule du taux zéro-coupon dans le modèle de Nelson-Siegel est donnée à la page 515 de TR-QM. En remplaçant les paramètres par leurs valeurs numériques, on obtient :

$$R(0, T) = 0,05 - 0,02 \left(\frac{1 - e^{-T}}{T} \right)$$

(a) On a :

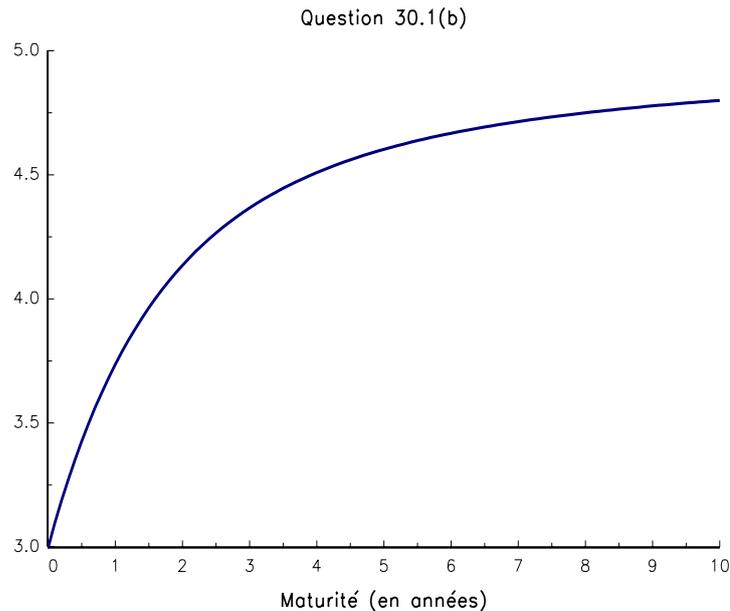
$$R(0, 2) = 0,05 - 0,02 \left(\frac{1 - e^{-2}}{2} \right) = 4,14\%$$

$$R(0, 5) = 0,05 - 0,02 \left(\frac{1 - e^{-5}}{5} \right) = 4,60\%$$

$$R(0, 10) = 0,05 - 0,02 \left(\frac{1 - e^{-10}}{10} \right) = 4,80\%$$

- (b) La courbe des taux est représentée sur le graphique 15. C'est une courbe croissante. Le taux court instantané est égal à 3% (c'est-à-dire $\theta_1 + \theta_2$) alors que les taux longs tendent vers la valeur de 5% (correspondant à θ_1).

FIGURE 15 – Courbe des taux spot



2. (a) Pour calculer le prix d'une obligation, on utilise la formule de la page 516 de TR-QAM. Par exemple, pour l'obligation de maturité résiduelle 2 ans, on a :

$$P_2(t) = \frac{3,5}{(1 + 0,0374)^1} + \frac{103,5}{(1 + 0,0414)^2} = 98,817$$

car le taux zéro-coupon de maturité 1 an est égal à 3,74%. On procède de même pour l'obligation 5 ans et 10 ans et on obtient :

$$\begin{aligned} P_5(t) &= 102,525 \\ P_{10}(t) &= 95,978 \end{aligned}$$

- (b) Le taux de rendement actuariel de la deuxième obligation est la valeur R^* qui est solution de l'équation (TR-QAM, page 516) :

$$f_5(R^*) = 102,525$$

avec :

$$f_5(R^*) = \frac{5,15}{(1+R^*)^1} + \frac{5,15}{(1+R^*)^2} + \frac{5,15}{(1+R^*)^3} + \frac{5,15}{(1+R^*)^3} + \frac{105,15}{(1+R^*)^4}$$

On a $f_5(4,5\%) = 102,853$ et $f_5(4,6\%) = 102,408$. On sait aussi que $f_5(R^*)$ est une fonction décroissante de R^* . Comme on a :

$$f_5(4,5\%) > 102,525 > f_5(4,6\%)$$

on en déduit alors que :

$$4,5\% < R^* < 4,6\%$$

- (c) En utilisant l'algorithme de la bi-section, on obtient :

$$R^* = 4,573\%$$

- (d) On vérifie que :

$$f_2(4,129\%) = \frac{3,5}{(1+0,04129)^1} + \frac{103,5}{(1+0,04129)^2} = 98,817$$

et :

$$f_{10}(4,765\%) = 95,978$$

Les taux de rendement actuariel des obligations 2 et 10 ans sont donc 4,129% et 4,765%.

- (e) La sensibilité est définie à la page 517 de TR-QAM. Pour la première obligation, on a :

$$S_2 = -\frac{3,5 \times 1}{(1+0,04129)^2} - \frac{103,5 \times 2}{(1+0,04129)^3} = -186,569$$

On procède de la même façon pour les deux autres obligations et on obtient :

$$\begin{aligned} S_5 &= -445,131 \\ S_{10} &= -761,419 \end{aligned}$$

3. (a) Si on considère une translation uniforme de la courbe des taux, le prix de la deuxième obligation devient :

$$P_2(t) = \frac{3,5}{(1+0,0374+0,0030)^1} + \frac{103,5}{(1+0,0414+0,0030)^2} = 98,2597$$

- (b) Si on impacte le taux de rendement actuariel, le prix de la deuxième obligation devient :

$$P_2(t) = \frac{3,5}{(1+0,04573+0,0030)^1} + \frac{103,5}{(1+0,04573+0,0030)^2} = 98,2592$$

- (c) Si on utilise l'approximation par la sensibilité (TR-QAM, page 517), le prix de la deuxième obligation est :

$$P_2(t) = 98,817 - 186,569 \times 0,0030 = 98,2573$$

On procède de la même façon pour les deux autres obligations et on obtient les résultats suivants :

	Impact d'une hausse des taux de 30 pbs		
	zéro-coupon	taux actuariel	sensibilité
$P_2(t)$	98,8170	98,2597	98,2573
$P_5(t)$	102,5253	101,2019	101,1899
$P_{10}(t)$	95,9784	93,7316	93,6942

On remarque que l'on a des résultats très proches et que l'approche par les sensibilités donne de bons résultats (surtout pour les maturités courtes).

4. (a) La stratégie de roll-down est définie à la page 518 de TR-QAM.
 (b) On considère la première obligation. Si la courbe des taux est inchangée, le prix de cette obligation dans un an est égal à :

$$P_2(t+1) = \frac{103,5}{(1+0,0374)^1} = 99,773$$

On en déduit que l'excès de rendement par rapport à une obligation de maturité 1 an est (TR-QAM, page 518) :

$$\bar{R} = \left(\frac{99,773 + 3,5}{98,817} - 1 \right) - 0,0374 = 0,77\%$$

Les composantes carry et roll-down pur sont alors égales à (TR-QAM, page 519) :

$$\begin{aligned} \text{carry} &= \frac{3,5}{98,817} - 0,0374 = -0,19\% \\ \text{roll-down} &= \frac{99,773}{98,817} - 1 = 0,97\% \end{aligned}$$

On procède de la même façon pour les deux autres obligations et on obtient les résultats suivants :

T	$P(t)$	Carry			Roll-down	\bar{R}
		Coupon	Financement	Total		
2	98,817	3,542%	-3,736%	-0,194%	0,967%	0,773%
5	102,525	5,023%	-3,736%	1,287%	-0,134%	1,153%
10	95,978	4,428%	-3,736%	0,692%	0,489%	1,181%

La stratégie de roll-down la plus pertinente est d'acheter l'obligation 10 ans et de la revendre un an plus tard.

- (c) Une hausse des taux de 30 pbs dans un an n'a pas d'impact sur la composante carry mais affecte la composante roll-down puisque le prix de l'obligation dans un an est différent. Pour la première obligation, on a :

$$P_2(t+1) = \frac{103,5}{(1+0,0374+0,0030)^1} = 99,485$$

et :

$$\text{roll-down} = \frac{99,485}{98,817} - 1 = 0,68\%$$

Avec une hausse des taux de 30 pbs, les résultats deviennent :

T	$P(t)$	Carry			Roll-down	\bar{R}
		Coupon	Financement	Total		
2	98,817	3,542%	-3,736%	-0,194%	0,676%	0,482%
5	102,525	5,023%	-3,736%	1,287%	-1,193%	0,095%
10	95,978	4,428%	-3,736%	0,692%	-1,676%	-0,983%

On note \bar{R}_1 l'excès de rendement pour le premier scénario (courbe des taux inchangée) et \bar{R}_2 celui pour le deuxième scénario (hausse des taux de 30 pbs). On en déduit que l'espérance d'excès de rendement est :

$$\mathbb{E}[\bar{R}] = 0,60 \times \bar{R}_1 + 0,40 \times \bar{R}_2$$

$\mathbb{E}[\bar{R}]$ prend donc les valeurs respectives 0,657%, 0,730% et 0,315% pour les obligations 2 ans, 5 ans et 10 ans. Si l'objectif de l'investisseur est de maximiser son espérance de richesse

terminale, alors la stratégie optimale de roll-down est d'acheter la deuxième obligation et de la revendre dans un an. On pouvait prévoir ce résultat assez facilement, car la stratégie de roll-down sur la deuxième obligation génère une performance très proche de celle portant sur la troisième obligation si la courbe des taux est inchangée (résultat de la question 4 (b)) et elle est moins sensible à une augmentation des taux (résultat de la question 2 (e)).

5. (a) La calibration d'un portefeuille barbell *50/50* est expliquée à la page 522 de TR-QAM.
 (b) Pour calibrer le portefeuille barbell *cash-neutral*, on utilise la formule donnée à la page 523 de TR-QAM. La composition des portefeuilles barbell est alors la suivante :

Maturité	50/50	cash-neutral	regression-weighted
2 ans	119.3	61.6	79.5
5 ans	-100.0	-100.0	-100.0
10 ans	29.2	43.4	39.0

- (c) Le scénario $-30/0/0$ signifie que le taux 2 ans baisse de 30 pbs alors que les taux 5 ans et 10 ans restent inchangés. C'est donc un scénario de pentification de la courbe des taux. Le PnL de la stratégie barbell *50/50* dans le cas de ce scénario est :

$$\text{PnL} = 119,3 \times (-186,569) \times (-0,0030) = 66,77 \text{ euros}$$

Pour le portefeuille *cash-neutral*, on a :

$$\text{PnL} = 61,6 \times (-186,569) \times (-0,0030) = 34,50 \text{ euros}$$

- (d) La calibration du portefeuille barbell *regression-weighted* est reportée dans le tableau de la question 5 (b). Le PnL de cette stratégie dans le cas d'un scénario $-30/0/15$ est :

$$\begin{aligned} \text{PnL} &= 79,5 \times (-186,569) \times (-0,0030) + \\ &\quad 39,0 \times (-761,419) \times 0,0015 + \\ &= 0 \text{ euros} \end{aligned}$$

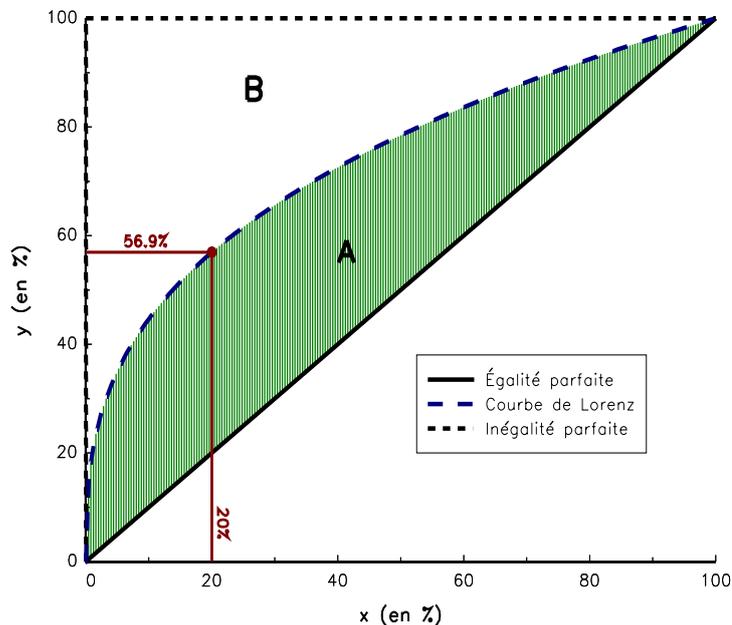
Ce résultat est évident puisque le portefeuille *barbell* est construit en supposant que les variations de taux sur la partie courte de la courbe sont deux fois plus importantes que celles sur la partie longue de la courbe ($\beta = 50\%$). Or le scénario $-30/0/15$ correspond exactement à cette hypothèse.

31. Concentration et diversification d'un portefeuille

1. (a) On a représenté la fonction \mathcal{L} sur le graphique 16. Cette courbe de Lorenz vérifie $\mathcal{L}(x) \geq x$ et $\mathcal{L}(x) \leq 1$. Le coefficient de Gini est alors (TR-QAM, page 574) :

$$\begin{aligned} G &= \frac{A}{A+B} \\ &= \left(\int_0^1 \mathcal{L}(x) dx - \frac{1}{2} \right) / \frac{1}{2} \\ &= 2 \int_0^1 \mathcal{L}(x) dx - 1 \end{aligned}$$

FIGURE 16 – Courbe de Lorenz



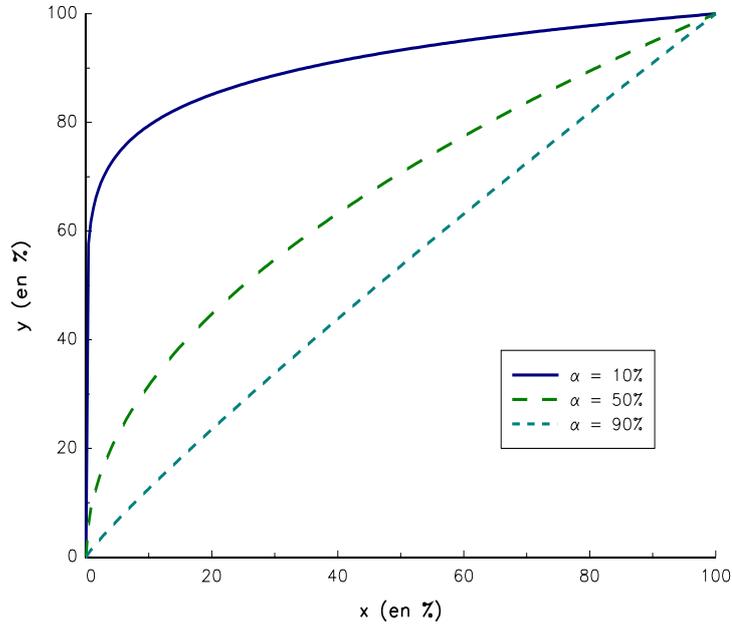
- (b) La fonction $\mathcal{L}_\alpha(x) = x^\alpha$ avec $\alpha \geq 0$ est croissante. On a $\mathcal{L}_\alpha(1) = 1$ d'où $\mathcal{L}(x) \leq 1$ et $\mathcal{L}(x) \geq x$. C'est donc une courbe de Lorenz. On a ;

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= 2 \int_0^1 x^\alpha dx - 1 \\ &= 2 \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 - 1 \\ &= \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \end{aligned}$$

On en déduit que $G(0) = 1$, $G(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$ et $G(1) = 0$. $\alpha = 0$ correspond au cas de la concentration parfaite alors que $\alpha = 1$ correspond au cas de l'égalité parfaite.

2. (a) On a $\mathcal{L}_w(0) = 0$ et $\mathcal{L}_w(1) = \sum_{j=1}^n \tilde{w}_j = \sum_{j=1}^n w_j = 1$. Si $x_2 \geq x_1$, on a $\mathcal{L}_w(x_2) \geq \mathcal{L}_w(x_1)$.

FIGURE 17 – Fonction $y = x^\alpha$



\mathcal{L}_w est donc une courbe de Lorenz. Le coefficient de Gini est égal à :

$$\begin{aligned} G &= 2 \int_0^1 \mathcal{L}(x) dx - 1 \\ &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \tilde{w}_j - 1 \end{aligned}$$

Si $\tilde{w}_j = n^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G &= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} - 1 \\ &= \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2n} - 1 \\ &= \frac{1}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $\tilde{w}_1 = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G &= 1 - \frac{1}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On remarque donc que l'égalité parfaite ne correspond pas à $G = 0$ sauf dans le cas asymptotique. C'est pourquoi il est préférable de modifier légèrement la définition de $\mathcal{L}_w(x)$:

$$\mathcal{L}_w(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^i \tilde{w}_j & \text{si } x = n^{-1}i \\ \sum_{j=1}^i \tilde{w}_j + \tilde{w}_{i+1}(nx - i) & \text{si } n^{-1}i < x < n^{-1}(i+1) \end{cases}$$

La différence est que la définition précédente correspond à une courbe de Lorenz constante par morceaux (ou courbe en escalier) alors que cette définition correspond à une courbe affine par morceaux. Dans ce cas, le calcul du coefficient de Gini correspond à une intégration par la méthode des trapèzes (TR-QAM, page 200). On a :

$$G = \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i \tilde{w}_j + \frac{1}{2} \right) - 1$$

- (b) L'indice de Herfindahl prend la valeur 1 si le portefeuille est concentré sur un seul actif.
(c) On cherche à minimiser $H = \sum_{i=1}^n w_i^2$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. On a :

$$f(w_1, \dots, w_n; \lambda) = \sum_{i=1}^n w_i^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^n w_i - 1 \right)$$

Les conditions de premier ordre sont $2w_i - \lambda = 0$. On en déduit que $w_i = w_j$. H atteint son minimum lorsque $w_i = n^{-1}$. Cela correspond au portefeuille équilibré. Dans ce cas, on a :

$$H = \frac{1}{n}$$

- (d) La statistique \mathcal{N} est le nombre équivalent d'actifs du portefeuille équilibré. Par exemple, si $H = 0,5$, alors $\mathcal{N} = 2$. C'est donc un portefeuille équivalent à deux actifs équilibrés.
3. (a) Pour le portefeuille $w^{(1)}$, on a $\tilde{w}_1^{(1)} = 40\%$, $\tilde{w}_2^{(1)} = 30\%$, $\tilde{w}_3^{(1)} = 20\%$, $\tilde{w}_4^{(1)} = 10\%$ et $\tilde{w}_5^{(1)} = 0\%$. Il vient que :

$$\begin{aligned} H(w^{(1)}) &= \sum_{i=1}^5 (w_i^{(1)})^2 \\ &= 0,10^2 + 0,20^2 + 0,30^2 + 0,40^2 \\ &= 0,30 \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} G(w^{(1)}) &= \frac{2}{5} \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^i \tilde{w}_j^{(1)} + \frac{1}{2} \right) - 1 \\ &= \frac{2}{5} \left(0,40 + 0,70 + 0,90 + 1,00 + \frac{1}{2} \right) - 1 \\ &= 0,40 \end{aligned}$$

Pour les portefeuilles $w^{(2)}$ et $w^{(3)}$, on obtient $H(w^{(2)}) = 0,30$, $H(w^{(3)}) = 0,25$, $G(w^{(2)}) = 0,40$ et $G(w^{(3)}) = 0,28$.

- (b) Le portefeuille de variance minimale est $w_1^{(4)} = 82,342\%$, $w_2^{(4)} = 13,175\%$, $w_3^{(4)} = 3,284\%$, $w_4^{(4)} = 0,823\%$ et $w_5^{(4)} = 0,366\%$. On obtient $H(w^{(4)}) = 0,697$ et $G(w^{(4)}) = 0,705$.
(c) On a $\mathcal{N}(w^{(2)}) = \mathcal{N}(w^{(1)}) = 3,33$, $\mathcal{N}(w^{(3)}) = 4,00$ et $\mathcal{N}(w^{(4)}) = 1,44$.
(d) Toutes les statistiques montrent que le portefeuille le moins concentré est le portefeuille $w^{(3)}$. Le portefeuille le plus concentré est paradoxalement le portefeuille de variance minimale $w^{(4)}$. On assimile souvent l'optimisation de la variance à une optimisation de la diversification. On voit donc dans cet exemple que diversifier le risque au sens de Markowitz ne permet pas d'optimiser la concentration.

32. La régression linéaire sous contraintes

1. (a) On a (TR-QAM, page 262) :

$$\begin{aligned}
 S(\beta) &= U^\top U \\
 &= (Y - X\beta)^\top (Y - X\beta) \\
 &= (Y^\top - \beta^\top X^\top) (Y - X\beta) \\
 &= Y^\top Y - \beta^\top X^\top Y - Y^\top X\beta + \beta^\top X^\top X\beta \\
 &= \beta^\top X^\top X\beta - 2\beta^\top X^\top Y + Y^\top Y
 \end{aligned}$$

(b) La condition de premier ordre s'écrit :

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 2X^\top X\beta - 2X^\top Y = 0$$

On en déduit que :

$$\hat{\beta} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$$

(c) On a (TR-QAM, page 263) :

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta} &= (X^\top X)^{-1} X^\top Y \\
 &= (X^\top X)^{-1} X^\top (X\beta + U) \\
 &= \beta + (X^\top X)^{-1} X^\top U
 \end{aligned}$$

Comme $X \perp U$, $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\hat{\beta}] &= \mathbb{E}[\beta + (X^\top X)^{-1} X^\top U] \\
 &= \beta + (X^\top X)^{-1} \mathbb{E}[X^\top U] \\
 &= \beta
 \end{aligned}$$

et la variance de $\hat{\beta}$ est :

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\hat{\beta}) &= \mathbb{E}[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^\top] \\
 &= \mathbb{E}[(X^\top X)^{-1} X^\top U U^\top X (X^\top X)^{-1}] \\
 &= (X^\top X)^{-1} X^\top \mathbb{E}[U U^\top] X (X^\top X)^{-1} \\
 &= \sigma^2 (X^\top X)^{-1} X^\top I X (X^\top X)^{-1} \\
 &= \sigma^2 (X^\top X)^{-1}
 \end{aligned}$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta} &= \arg \min S(\beta) \\
 \text{s.c.} &\begin{cases} A\beta = B \\ C\beta \geq D \end{cases}
 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\beta} &= \arg \min \frac{1}{2} \beta^\top (2X^\top X) \beta - \beta^\top (2X^\top Y) \\
 \text{s.c.} &\begin{cases} A\beta = B \\ C\beta \geq D \end{cases}
 \end{aligned}$$

On obtient un programme QP classique avec $Q = 2X^\top X$ et $R = 2X^\top Y$ (TR-QAM, page 86).

(b) On obtient $\hat{\beta}_1 = -1,01$, $\hat{\beta}_2 = 0,95$, $\hat{\beta}_3 = 2,04$, $\hat{\beta}_4 = 3,10$ et $\hat{\beta}_5 = -0,08$.

i. Si $\sum_{i=1}^5 \beta_i = 1$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = 1$$

On obtient $\tilde{\beta}_1 = -2,40$, $\tilde{\beta}_2 = 1,08$, $\tilde{\beta}_3 = 0,49$, $\tilde{\beta}_4 = 2,43$ et $\tilde{\beta}_5 = -0,60$.

ii. Si $\beta_1 = \beta_2 = \beta_5$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_5 = -0,08$, $\tilde{\beta}_3 = 2,22$ et $\tilde{\beta}_4 = 3,17$.

iii. Si $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3 \geq \beta_4 \geq \beta_5$, on a :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient $\tilde{\beta}_1 = 1,33$, $\tilde{\beta}_2 = 1,33$, $\tilde{\beta}_3 = 1,33$, $\tilde{\beta}_4 = 1,33$ et $\tilde{\beta}_5 = -0,23$.

iv. Si $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \beta_4 \leq \beta_5$ et $\sum_{i=1}^5 \beta_i = 1$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = 1, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient $\tilde{\beta}_1 = -2,63$, $\tilde{\beta}_2 = 0,91$, $\tilde{\beta}_3 = 0,91$, $\tilde{\beta}_4 = 0,91$ et $\tilde{\beta}_5 = 0,91$. La condition de premier ordre du programme QP s'écrit :

$$Q\tilde{\beta} - R - A^\top \lambda_A + C^\top \lambda_C = 0$$

avec λ_A un scalaire correspondant au lagrangien de la contrainte d'égalité et λ_C un vecteur de dimension 4×1 correspondant aux lagrangiens des contraintes d'inégalité qui vérifie les conditions de Kuhn-Tucker (TR-QAM, page 91) :

$$\min(\lambda_C, C\tilde{\beta} - D) = 0$$

Comme $\lambda_A = -192,36304$, on a :

$$C^\top \lambda_C = -\left(Q\tilde{\beta} - R - A^\top \lambda_A\right) = \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 3,7244 \\ -2,8742 \\ 24,7449 \\ -25,5951 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\lambda_C = \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 3,7244 \\ 0,8501 \\ 25,5951 \end{pmatrix}$$

3. (a) On a :

$$f(\beta; \lambda) = \frac{1}{2} \beta^\top (X^\top X) \beta - \beta^\top (X^\top Y) - \lambda^\top (A\beta - B)$$

La condition de premier ordre est :

$$\frac{\partial f(\beta; \lambda)}{\partial \beta} = (X^\top X) \beta - (X^\top Y) - A^\top \lambda = 0$$

On a donc :

$$\tilde{\beta} = (X^\top X)^{-1} (X^\top Y) - (X^\top X)^{-1} A^\top \lambda$$

Comme $A\beta = B$, on a :

$$A (X^\top X)^{-1} (X^\top Y) - A (X^\top X)^{-1} A^\top \lambda = B$$

ou encore :

$$\lambda = \left(A (X^\top X)^{-1} A^\top \right)^{-1} \left(A (X^\top X)^{-1} (X^\top Y) - B \right)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= (X^\top X)^{-1} (X^\top Y) - (X^\top X)^{-1} A^\top \left(A (X^\top X)^{-1} A^\top \right)^{-1} \left(A (X^\top X)^{-1} (X^\top Y) - B \right) \\ &= \hat{\beta} - (X^\top X)^{-1} A^\top \left(A (X^\top X)^{-1} A^\top \right)^{-1} (A\hat{\beta} - B) \end{aligned}$$

(b) Pour transformer le problème implicite en problème explicite, on considère la paramétrisation (TR-QAM, page 126) :

$$\beta = C\gamma + D$$

avec C la base orthonormale associée au noyau de la matrice A et $D = (A^\top A)^* A^\top B$ avec $(A^\top A)^*$ l'inverse de Moore-Penrose de la matrice $A^\top A$. La fonction objectif devient :

$$\begin{aligned} S(\gamma) &= \frac{1}{2} \beta^\top (X^\top X) \beta - \beta^\top (X^\top Y) \\ &= \frac{1}{2} (C\gamma + D)^\top (X^\top X) (C\gamma + D) - (C\gamma + D)^\top (X^\top Y) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma^\top C^\top X^\top X C \gamma + D^\top X^\top X C \gamma + \gamma^\top C^\top X^\top X D + D^\top X^\top X D) - \\ &\quad \gamma^\top C^\top X^\top Y - D^\top X^\top Y \\ &= \frac{1}{2} \gamma^\top (C^\top X^\top X C) \gamma + \gamma^\top (C^\top X^\top X D - C^\top X^\top Y) + \left(\frac{1}{2} D^\top X^\top X D - D^\top X^\top Y \right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\hat{\gamma} = (C^\top X^\top X C)^{-1} C^\top X^\top (Y - XD)$$

et :

$$\tilde{\beta} = C (C^\top X^\top X C)^{-1} C^\top X^\top (Y - XD) + D$$

(c) L'expression de l'estimateur sous contraintes explicites est :

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \hat{\beta} - (X^\top X)^{-1} A^\top \left(A (X^\top X)^{-1} A^\top \right)^{-1} (A\hat{\beta} - B) \\ &= (X^\top X)^{-1} \left(I - A^\top \left(A (X^\top X)^{-1} A^\top \right)^{-1} A (X^\top X)^{-1} \right) (X^\top Y) + \\ &\quad (X^\top X)^{-1} A^\top \left(A (X^\top X)^{-1} A^\top \right)^{-1} B \end{aligned}$$

alors que celle de l'estimateur sous contraintes implicites est :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= C (C^T X^T X C)^{-1} C^T X^T (Y - X D) + D \\ &= C (C^T X^T X C)^{-1} C^T (X^T Y) + \\ &\quad \left(I - C (C^T X^T X C)^{-1} C^T X^T X \right) D\end{aligned}$$

On a aussi $AC = 0$ et $D = (A^T A)^* A^T B$. On peut montrer que pour toute matrice M définie positive, on a :

$$M^{-1} \left(I - A^T (A M^{-1} A^T)^{-1} A M^{-1} \right) = C (C^T M C)^{-1} C^T$$

et :

$$(X^T X)^{-1} A^T \left(A (X^T X)^{-1} A^T \right)^{-1} = \left(I - C (C^T X^T X C)^{-1} C^T X^T X \right) (A^T A)^* A^T$$

On en déduit que les deux estimateurs sont équivalents²².

À titre d'illustration, on suppose que $\beta_1 = \beta_2$ et $\beta_1 = \beta_5 + 1$. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que l'estimateur sous contraintes explicites est :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= (X^T X)^{-1} \left(I - A^T \left(A (X^T X)^{-1} A^T \right)^{-1} A (X^T X)^{-1} \right) (X^T Y) + \\ &\quad (X^T X)^{-1} A^T \left(A (X^T X)^{-1} A^T \right)^{-1} B \\ &= \begin{pmatrix} 0,28040 \\ 0,28040 \\ 2,08942 \\ 3,21265 \\ -0,71960 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On peut écrire les contraintes implicites sous la forme de contraintes explicites :

$$\begin{aligned}\beta &= C\gamma + D \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= (C^T X^T X C)^{-1} C^T (X^T Y - X^T X D) \\ &= \begin{pmatrix} 2,08942 \\ 3,21265 \\ -0,09168 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

22. Lorsque j'ai écrit l'énoncé de cet exercice, je n'avais pas réalisé la difficulté de cette question. La démonstration des deux égalités matricielles est extrêmement fastidieuse. Elle repose sur des égalités similaires à celles démontrées dans l'exercice 26 page 66. Comme il faut 3 à 4 pages de calcul, je ne préfère pas reporter ici la démonstration, d'autant plus que je n'ai réussi à démontrer le résultat que lorsque l'on remplace la pseudo-inverse de Moore-Penrose $(A^T A)^*$ par l'inverse matricielle $(A^T A)^{-1}$ qui n'existe pas dans la plupart des cas. Merci de me contacter si vous trouvez une démonstration élégante en conservant la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

On obtient donc la même solution :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= C\tilde{\gamma} + D \\ &= \begin{pmatrix} 0,28040 \\ 0,28040 \\ 2,08942 \\ 3,21265 \\ -0,71960 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Les matrices C et D de la décomposition précédente $\beta = C\gamma + D$ correspondent à la matrice orthonormale de A et à la matrice $(A^T A)^* A^T B$. Mais il existe une infinité de décomposition $\beta = C\gamma + D$, la seule contrainte est que C soit une matrice orthogonale à la matrice A . Si on prend par exemple :

$$\begin{aligned}\beta &= C\gamma + D \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= (C^T X^T X C)^{-1} C^T (X^T Y - X^T X D) \\ &= \begin{pmatrix} 0,28040 \\ 2,08942 \\ 3,21265 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= C\tilde{\gamma} + D \\ &= \begin{pmatrix} 0,28040 \\ 0,28040 \\ 2,08942 \\ 3,21265 \\ -0,71960 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

33. Risk budgeting et modèles factoriels

1. Ce modèle factoriel est présenté aux pages 303-308 de TR-QAM. C'est un modèle linéaire avec des facteurs communs \mathcal{F}_t et des risques idiosyncratiques u_t . L'écriture matricielle est :

$$R_t = A\mathcal{F}_t + u_t$$

2. La matrice de covariance Σ des rendements des actifs est :

$$\Sigma = \mathbb{E} \left[(R_t - \mathbb{E}[R_t]) (R_t - \mathbb{E}[R_t])^\top \right]$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_t] &= \mathbb{E}[A\mathcal{F}_t + u_t] \\ &= A\mathbb{E}[\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[u_t] \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mathbb{E} [R_t R_t^\top] \\ &= \mathbb{E} \left[(A\mathcal{F}_t + u_t) (A\mathcal{F}_t + u_t)^\top \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(A\mathcal{F}_t + u_t) (\mathcal{F}_t^\top A^\top + u_t^\top) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[A\mathcal{F}_t \mathcal{F}_t^\top A^\top + u_t \mathcal{F}_t^\top A^\top + A\mathcal{F}_t u_t^\top + u_t u_t^\top \right] \\ &= A\mathbb{E} [\mathcal{F}_t \mathcal{F}_t^\top] A^\top + \mathbb{E} [u_t \mathcal{F}_t^\top] A^\top + A\mathbb{E} [\mathcal{F}_t u_t^\top] + \mathbb{E} [u_t u_t^\top] \\ &= A\Omega A^\top + D \end{aligned}$$

car $\mathbb{E} [\mathcal{F}_t^\top u_t] = 0$ et l'opérateur \mathbb{E} est bilinéaire. On retrouve le résultat de la page 303 de TR-QAM.

3. Soit $R_{x,t}$ le rendement du portefeuille x . On a :

$$\begin{aligned} R_{x,t} &= \sum_{i=1}^n x_i \times R_{i,t} \\ &= x^\top R_t \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_{x,t}] &= \mathbb{E}[x^\top R_t] \\ &= x^\top \mathbb{E}[R_t] \\ &= 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sigma^2(R_{x,t}) &= \mathbb{E} \left[(R_{x,t} - \mathbb{E}[R_{x,t}])^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(x^\top R_t)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[x^\top R_t R_t^\top x \right] \\ &= x^\top \mathbb{E} [R_t R_t^\top] x \\ &= x^\top A\Omega A^\top x + x^\top D x \\ &= \sigma_f^2(R_{x,t}) + \sigma_s^2(R_{x,t}) \end{aligned}$$

avec $\sigma_f^2(R_{x,t}) = x^\top A\Omega A^\top x$ et $\sigma_s^2(R_{x,t}) = x^\top D x$. On a bien décomposé la variance $\sigma^2(R_{x,t})$ en une variance commune ou factorielle $\sigma_f^2(R_{x,t})$ et une variance spécifique $\sigma_s^2(R_{x,t})$.

4. (a) C'est un modèle à deux facteurs. Le premier facteur $\mathcal{F}_{1,t}$ est un facteur de marché puisqu'il affecte tous les actifs. On note que la sensibilité à ce facteur de marché est égale à 1. Le second facteur est indépendant au premier facteur et a une volatilité moindre. Il n'affecte que les deux premiers actifs. On peut donc supposer que c'est un facteur sectoriel propre aux deux premiers actifs.
- (b) On calcule $\Sigma = A\Omega A^\top + D$ avec :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0,20^2 & 0 \\ 0 & 0,10^2 \end{pmatrix}$$

et D une matrice diagonale de la forme suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 0,10^2 & & & & \\ & 0,15^2 & & & \\ & & 0,10^2 & & \\ & & & 0,15^2 & \\ & & & & 0,20^2 \end{pmatrix}$$

On obtient²³ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 6,00 & & & & \\ 5,00 & 7,25 & & & \\ 4,00 & 4,00 & 5,00 & & \\ 4,00 & 4,00 & 4,00 & 6,25 & \\ 4,00 & 4,00 & 4,00 & 4,00 & 8,00 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la volatilité des actifs est :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 24,49 \\ 26,93 \\ 22,36 \\ 25,00 \\ 28,28 \end{pmatrix}$$

et que la matrice de corrélation des actifs est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100,00 & & & & \\ 75,81 & 100,00 & & & \\ 73,03 & 66,44 & 100,00 & & \\ 65,32 & 59,42 & 71,55 & 100,00 & \\ 57,74 & 52,52 & 63,25 & 56,57 & 100,00 \end{pmatrix}$$

- (c) On obtient les résultats suivants :

Portefeuille	$\sigma^2(R_{x,t})$	$\sigma_f^2(R_{x,t})$	$\sigma_s^2(R_{x,t})$	p
1	6,00%	5,00%	1,00%	83.33%
2	7,25%	5,00%	2,25%	68.97%
3	5,00%	4,00%	1,00%	80.00%
4	6,25%	4,00%	2,25%	64.00%
5	8,00%	4,00%	4,00%	50.00%
EW	4,58%	4,16%	0,42%	90.83%

avec :

$$p = \frac{\sigma_f^2(R_{x,t})}{\sigma^2(R_{x,t})}$$

Pour calculer la décomposition pour l'actif 1, il suffit de considérer le portefeuille $x = (1, 0, 0, 0, 0)$. L'actif 1 est celui qui a la proportion de variance expliquée par les facteurs la plus importante. L'actif qui présente le plus de variance spécifique est l'actif 4 puisque $p_4 = 64\%$.

23. Les matrices Σ , σ et ρ sont exprimées en %.

- (d) Les résultats correspondent au portefeuille EW du tableau précédent. On remarque que plus de 90% de la variance est expliquée par les facteurs. C'est largement plus important que les résultats que l'on obtient pour les actifs individuels. C'est une illustration du principe de diversification. En combinant les actifs, on peut ainsi réduire le risque spécifique.
5. (a) On a maintenant un modèle à 3 facteurs. Les deux premiers facteurs ressemblent aux deux facteurs du modèle précédent. Il y a une différence cependant, puisque les volatilités sont inversées. Le troisième facteur est spécifique aux actifs 3, 4 et 5. On note qu'il présente une volatilité relativement élevée puisque $\sigma_{\mathcal{F}_3} = 22,36\%$. De plus, il est corrélé positivement au premier facteur et négativement au second facteur²⁴.
- (b) Si on calcule la matrice $\Sigma = A \mathcal{A}^\top + D$, on obtient les mêmes résultats que ceux de la question 4(a). La volatilité des rendements des 5 actifs ainsi que les corrélations croisées sont donc les mêmes que celles précédentes.
- (c) On note \mathcal{F}' les facteurs de la question 4(a) afin de les distinguer. On remarque que :

$$\text{var}(A'_{i,1}\mathcal{F}'_{1,t} + A'_{i,2}\mathcal{F}'_{2,t}) = \text{var}(A_{i,1}\mathcal{F}_{1,t} + A_{i,2}\mathcal{F}_{2,t} + A_{i,3}\mathcal{F}_{3,t})$$

En effet, si i est égal à 1 ou 2, on a :

$$\begin{aligned} \text{var}(A'_{i,1}\mathcal{F}'_{1,t} + A'_{i,2}\mathcal{F}'_{2,t}) &= \text{var}(\mathcal{F}'_{1,t} + \mathcal{F}'_{2,t}) \\ &= 0,20^2 + 0,10^2 \\ &= 5\% \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \text{var}(A_{i,1}\mathcal{F}_{1,t} + A_{i,2}\mathcal{F}_{2,t} + A_{i,3}\mathcal{F}_{3,t}) &= \text{var}(\mathcal{F}_{1,t} + \mathcal{F}_{2,t}) \\ &= 0,20^2 + 0,10^2 \\ &= 5\% \end{aligned}$$

Si i est égal à 3, 4 ou 5, on a :

$$\begin{aligned} \text{var}(A'_{i,1}\mathcal{F}'_{1,t} + A'_{i,2}\mathcal{F}'_{2,t}) &= \text{var}(\mathcal{F}'_{1,t}) \\ &= 4\% \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \text{var}(A_{i,1}\mathcal{F}_{1,t} + A_{i,2}\mathcal{F}_{2,t} + A_{i,3}\mathcal{F}_{3,t}) &= \text{var}(\mathcal{F}_{2,t} + \mathcal{F}_{3,t}) \\ &= \sigma_{\mathcal{F}_2}^2 + \sigma_{\mathcal{F}_3}^2 + 2\rho_{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3} \sigma_{\mathcal{F}_2} \sigma_{\mathcal{F}_3} \\ &= \sigma_{\mathcal{F}_2}^2 + (\sigma_{\mathcal{F}_1}^2 + \sigma_{\mathcal{F}_2}^2) - 2\sigma_{\mathcal{F}_2}^2 \\ &= 4\% \end{aligned}$$

On peut aussi remarquer que les covariances sont les mêmes :

$$\begin{aligned} \text{cov}(A'_{i,1}\mathcal{F}'_{1,t} + A'_{i,2}\mathcal{F}'_{2,t}, A'_{j,1}\mathcal{F}'_{1,t} + A'_{j,2}\mathcal{F}'_{2,t}) &= \\ \text{cov}(A_{i,1}\mathcal{F}_{1,t} + A_{i,2}\mathcal{F}_{2,t} + A_{i,3}\mathcal{F}_{3,t}, A_{j,1}\mathcal{F}_{1,t} + A_{j,2}\mathcal{F}_{2,t} + A_{j,3}\mathcal{F}_{3,t}) &= \end{aligned}$$

En effet, si $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, 2\}$, on a :

$$\begin{aligned} \text{cov}'_{i,j} &= \text{cov}(\mathcal{F}'_{1,t} + \mathcal{F}'_{2,t}, \mathcal{F}'_{1,t} + \mathcal{F}'_{2,t}) \\ &= 0,20^2 + 0,10^2 \\ &= 5\% \end{aligned}$$

24. On a $\rho_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3} = 89,44\%$ et $\rho_{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3} = -44,72\%$.

et :

$$\begin{aligned}\text{cov}_{i,j} &= \text{cov}(\mathcal{F}_{1,t} + \mathcal{F}_{2,t}, \mathcal{F}_{1,t} + \mathcal{F}_{2,t}) \\ &= 5\%\end{aligned}$$

Si $i \in \{3, 4, 5\}$ et $j \in \{3, 4, 5\}$, on a :

$$\begin{aligned}\text{cov}'_{i,j} &= \text{cov}(\mathcal{F}'_{1,t}, \mathcal{F}'_{1,t}) \\ &= 4\%\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\text{cov}_{i,j} &= \text{cov}(\mathcal{F}_{2,t} + \mathcal{F}_{3,t}, \mathcal{F}_{2,t} + \mathcal{F}_{3,t}) \\ &= \text{var}(\mathcal{F}_{2,t} + \mathcal{F}_{3,t}) \\ &= 4\%\end{aligned}$$

Enfin, si $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{3, 4, 5\}$, on a :

$$\begin{aligned}\text{cov}'_{i,j} &= \text{cov}(\mathcal{F}'_{1,t} + \mathcal{F}'_{2,t}, \mathcal{F}'_{1,t}) \\ &= 4\%\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\text{cov}_{i,j} &= \text{cov}(\mathcal{F}_{1,t} + \mathcal{F}_{2,t}, \mathcal{F}_{2,t} + \mathcal{F}_{3,t}) \\ &= \rho_{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3} \sigma_{\mathcal{F}_1} \sigma_{\mathcal{F}_3} + \sigma_{\mathcal{F}_2}^2 + \rho_{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3} \sigma_{\mathcal{F}_2} \sigma_{\mathcal{F}_3} \\ &= \sigma_{\mathcal{F}_1}^2 + \sigma_{\mathcal{F}_2}^2 - \sigma_{\mathcal{F}_2}^2 \\ &= 4\%\end{aligned}$$

On en déduit que les deux modèles factoriels sont équivalents.

- (d) On a noté Ψ la matrice 5×5 égale à $A\Omega A^\top$ avec les données de la question 4. On cherche maintenant l'ensemble des matrices A de dimension 5×3 et Ω de dimension 3×3 telles que :

$$A\Omega A^\top = \Psi$$

On a donc 21 paramètres et 15 équations. Il y a donc une infinité de solutions. Comme $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}'_1 - \mathcal{F}'_2$, on peut réduire cet ensemble en remarquant que $\sigma_{\mathcal{F}_3}^2 - \sigma_{\mathcal{F}'_1}^2 - \sigma_{\mathcal{F}'_2}^2 = 0$ et que $A'_{i,1}\mathcal{F}'_{1,t} + A'_{i,2}\mathcal{F}'_{2,t} - A_{i,3}(\mathcal{F}'_1 - \mathcal{F}'_2) = A_{i,1}\mathcal{F}_{1,t} + A_{i,2}\mathcal{F}_{2,t}$. On obtient un système de 19 équations à 21 paramètres. Le modèle précédent est un exemple de paramétrisation qui satisfait ces équations.

6. (a) On a :

$$\sigma(R_{x,t}) = \sqrt{x^\top \Sigma x}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \sigma(R_{x,t})}{\partial x} = \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

On obtient donc la relation suivante (TR-QAM, page 128) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \sigma(R_{x,t})}{\partial x_i} &= x^\top \frac{\partial \sigma(R_{x,t})}{\partial x} \\ &= x^\top \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\ &= \sqrt{x^\top \Sigma x} \\ &= \sigma(R_{x,t})\end{aligned}$$

Cette relation est appelée la décomposition d'Euler.

(b) On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma(R_{x,t})}{\partial y} &= \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)^\top \frac{\partial \sigma(R_{x,t})}{\partial x} \\ &= B_\dagger^\top \frac{\partial \sigma(R_{x,t})}{\partial x}\end{aligned}$$

La matrice C est donc égale à la transposée de l'inverse de Moore-Penrose de B . On en déduit que :

$$\begin{aligned}\text{RC}(\mathcal{F}_j) &= y_j \frac{\partial \sigma(R_{x,t})}{\partial y_j} \\ &= (Bx)_i \times \left(B_\dagger^\top \frac{\partial \sigma(R_{x,t})}{\partial x} \right)_i \\ &= \frac{(Bx)_i \times (B_\dagger^\top \Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}\end{aligned}$$

(c) On rappelle que $\Sigma = A\Omega A^\top + D$. On a donc :

$$\sigma(R_{x,t}) = \sqrt{x^\top A\Omega A^\top x + x^\top D x}$$

Il est évident que D doit être nul pour que la décomposition d'Euler soit valide sur les facteurs. Dans le cas général, on ne retrouve pas cette décomposition si on n'a pas un nombre suffisant de facteurs ($m = n$).

(d) On a $\sigma_f(R_{x,t}) = \sqrt{x^\top A\Omega A^\top x}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_f(R_{x,t})}{\partial y_i} &= \left(\frac{B_\dagger^\top A\Omega A^\top x}{\sqrt{x^\top A\Omega A^\top x}} \right)_i \\ &= \frac{(\Phi y)_i}{\sqrt{y_y^\top \Phi y}}\end{aligned}$$

avec $\Phi = B_\dagger^\top A\Omega A^\top B_\dagger$. On en déduit que :

$$\sigma_f(x) = \sum_{j=1}^m y_j \times \frac{\partial \sigma_f(R_{x,t})}{\partial y_j}$$

La volatilité factorielle satisfait donc la décomposition factorielle.

(e) On pose $B = A_\dagger$ avec A_\dagger l'inverse de Moore-Penrose de A . Soit M une matrice. Par construction de l'inverse de Moore-Penrose, on a :

$$B_\dagger^\top M B_\dagger = A^\top M A$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\Phi &= B_\dagger^\top A\Omega A^\top B_\dagger \\ &= A^\top A\Omega A^\top A\end{aligned}$$

(f) On obtient les résultats suivants :

Actif	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(R_{x,t})$	$\sigma_i(R_{x,t})$	$\sigma_i(R_{x,t}) / \sigma(R_{x,t})$
\mathcal{A}_1	20,00%	21,49%	4,30%	20,09%
\mathcal{A}_2	20,00%	22,66%	4,53%	21,18%
\mathcal{A}_3	20,00%	19,63%	3,93%	18,34%
\mathcal{A}_4	20,00%	20,79%	4,16%	19,43%
\mathcal{A}_5	20,00%	22,43%	4,49%	20,96%

Dans le cas du modèle à deux facteurs, on a :

Facteur	y_j	$\partial_{y_j} \sigma_f(R_{x,t})$	$\sigma_j(R_{x,t})$	$\sigma_j(R_{x,t})/\sigma_f(R_{x,t})$
\mathcal{F}_1	20,00%	101,98%	20,40%	100,00%
\mathcal{F}_2	0,00%	43,15%	0,00%	0,00%

Pour le modèle à trois facteurs, ces résultats deviennent les suivants :

Facteur	y_j	$\partial_{y_j} \sigma_f(R_{x,t})$	$\sigma_j(R_{x,t})$	$\sigma_j(R_{x,t})/\sigma_f(R_{x,t})$
\mathcal{F}_1	6,67%	43,15%	2,88%	14,10%
\mathcal{F}_2	13,33%	101,98%	13,60%	66,67%
\mathcal{F}_3	6,67%	58,83%	3,92%	19,23%

On remarque que le choix de la paramétrisation influence beaucoup la décomposition factorielle de la volatilité commune.

(g) La log-vraisemblance à la date t associée au modèle factoriel est (TR-QAM, page 303) :

$$\ell_t = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln |A\Omega A^\top + D| - \frac{1}{2} R_t^\top (A\Omega A^\top + D)^{-1} R_t$$

Si on dispose d'un échantillon de T observations et si on concentre la log-vraisemblance, on obtient (TR-QAM, page 304) :

$$\ell_t = -\frac{nT}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln |A\Omega A^\top + D| - \frac{T}{2} \text{trace} \left((A\Omega A^\top + D)^{-1} \hat{\Sigma} \right)$$

avec $\hat{\Sigma}$ la matrice de covariance empirique des rendements. L'expression $A\Omega A^\top$ est identifiable mais les matrices A et Ω ne sont pas uniques. On a donc un problème d'identification.

(h) i. On obtient les résultats suivants pour le portefeuille ERC :

Actif	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(R_{x,t})$	$\sigma_i(R_{x,t})$	$\sigma_i(R_{x,t})/\sigma(R_{x,t})$
\mathcal{A}_1	45,88%	6,89%	3,16%	25,00%
\mathcal{A}_2	22,94%	13,78%	3,16%	25,00%
\mathcal{A}_3	17,82%	17,75%	3,16%	25,00%
\mathcal{A}_4	13,36%	23,66%	3,16%	25,00%

ii. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 9,58672 & 0 \\ 18,77598 & 0 \\ 0 & 19,24832 \\ 0 & 24,93725 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

et :

$$D = \begin{pmatrix} 0,08095 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,47462 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,29502 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,78134 \end{pmatrix} \times 10^{-2}$$

iii. On a $\sigma(R_{x,t}) = 12,65\%$ et $\sigma_f(R_{x,t}) = 11,02\%$. On obtient :

Facteur	y_j	$\partial_{y_j} \sigma_f(R_{x,t})$	$\sigma_j(R_{x,t})$	$\sigma_j(R_{x,t})/\sigma_f(R_{x,t})$
\mathcal{F}_1	195,88%	3,51%	6,88%	62,37%
\mathcal{F}_2	68,14%	6,09%	4,15%	37,63%

iv. On obtient :

Facteur	y_j	$\partial_{y_j} \sigma_f(R_{x,t})$	$\sigma_j(R_{x,t})$	$\sigma_j(R_{x,t})/\sigma_f(R_{x,t})$
\mathcal{F}_1	194,06%	3,14%	6,10%	50,00%
\mathcal{F}_2	86,91%	7,02%	6,10%	50,00%

et :

Actif	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(R_{x,t})$	$\sigma_i(R_{x,t})$	$\sigma_i(R_{x,t}) / \sigma(R_{x,t})$
\mathcal{A}_1	30,04%	5,87%	1,76%	12,15%
\mathcal{A}_2	30,60%	12,17%	3,72%	25,67%
\mathcal{A}_3	20,95%	19,09%	4,00%	27,58%
\mathcal{A}_4	18,42%	27,25%	5,02%	34,60%

C'est donc un portefeuille sensiblement différent du portefeuille ERC. Concernant les volatilités, on obtient $\sigma(R_{x,t}) = 14,50\%$ et $\sigma_f(R_{x,t}) = 12,20\%$. On note aussi que les contributions en risque des actifs 3 et 4 sont plus grandes que dans le cas du portefeuille ERC. On peut expliquer ceci par le fait qu'ils sont les contributeurs du deuxième facteur et qu'ils présentent les plus grosses volatilités.