

# **Value at Risk**

(mesure de capital économique)

Gaël Riboulet & Thierry Roncalli

Groupe de Recherche Opérationnelle

Crédit Lyonnais

email : [gael.riboulet@creditlyonnais.fr](mailto:gael.riboulet@creditlyonnais.fr),  
[thierry.roncalli@creditlyonnais.fr](mailto:thierry.roncalli@creditlyonnais.fr)

# Plan de l'intervention

## 1. Introduction

- Fonds propres et *Value-at-Risk*
- Les exigences réglementaires
- L'allocation de fonds propres

## 2. Mesures des risques de marché

- Un rappel sur les aspects réglementaires
- La Valeur en Risque
- Les problèmes liés à la construction de la VaR
- La VaR est-elle une bonne mesure des risques ?

### 3. L'utilisation de la VaR pour les autres risques

- Le risque de crédit
- Le risque opérationnel

### 4. Le problème de l'agrégation

- Mesure agrégée et contribution
- Dépendance et corrélation
- La théorie des copules

# 1 Introduction

- Fonds propres et *Value-at-Risk*
- Les exigences réglementaires
- L'allocation de fonds propres

# Fonds propres et *Value-at-Risk*

Référence :

Modalités de Calcul du Ratio de Solvabilité — Actualisation au 31 décembre 1998, Commission Bancaire, Secrétariat Général, Service des Affaires Internationales, 30 décembre 1998

Les fonds propres sont un des éléments du passif d'une banque. Ils regroupent :

- Les actions ordinaires et les certificats d'investissement,
- les réserves,
- le résultat non distribué,
- etc.

Les autres éléments du passif d'une banque sont les dépôts, l'épargne des ménages, ainsi que les dettes.

A l'actif, nous trouvons les crédits et les prêts aux ménages et aux entreprises, les services, etc.

## Fonds propres et *VaR* (suite)

⇒ Ces fonds propres sont un des éléments de notation de la banque, note qui conditionne le coût des ressources (de trésorerie ou de long terme).

### Quelle est l'utilité des fonds propres ?

Ils servent à **garantir** l'activité de la banque. En particulier, ils doivent permettre d'absorber les **fortes** pertes dues à des éléments exogènes et/ou inattendus :

- Crise russe (risque pays - défaut de paiement),
- Crise asiatique (implosion des systèmes bancaires),
- Crise immobilière (krach spéculatif),
- etc.

Ainsi plus leur niveau est élevé, plus la banque présente des gages de solidité (à activité bancaire constante).

## Fonds propres et *VaR* (suite)

**Résumé** : Les fonds propres (qui correspondent au capital de la banque) permettent de couvrir les risques (exceptionnels). C'est donc le moteur de l'activité bancaire.

⇒ Pour cela, ils sont rémunérés. Le taux de rémunération est appelé *Return on Equity* ou ROE.

Problématique de la banque :

Prendre le moins de risque et en même temps offrir le ROE le plus élevé à ses actionnaires.

Il faut donc savoir mesurer le risque.

⇒ *Value-at-Risk* ou *Valeur en Risque*

## Fonds propres et *VaR* (suite)

La *Value-at-Risk* est une mesure de perte **potentielle**. Elle permet de répondre à la question suivante :

Combien l'établissement financier peut-il perdre avec une probabilité  $1 - \alpha$  pour une période de temps  $T$  fixé ?

⇒ Combien = *Value-at-Risk* (montant en Francs ou Euros)

Interprétation statistique :

$$\textit{Value-at-Risk} = \text{Quantile}$$

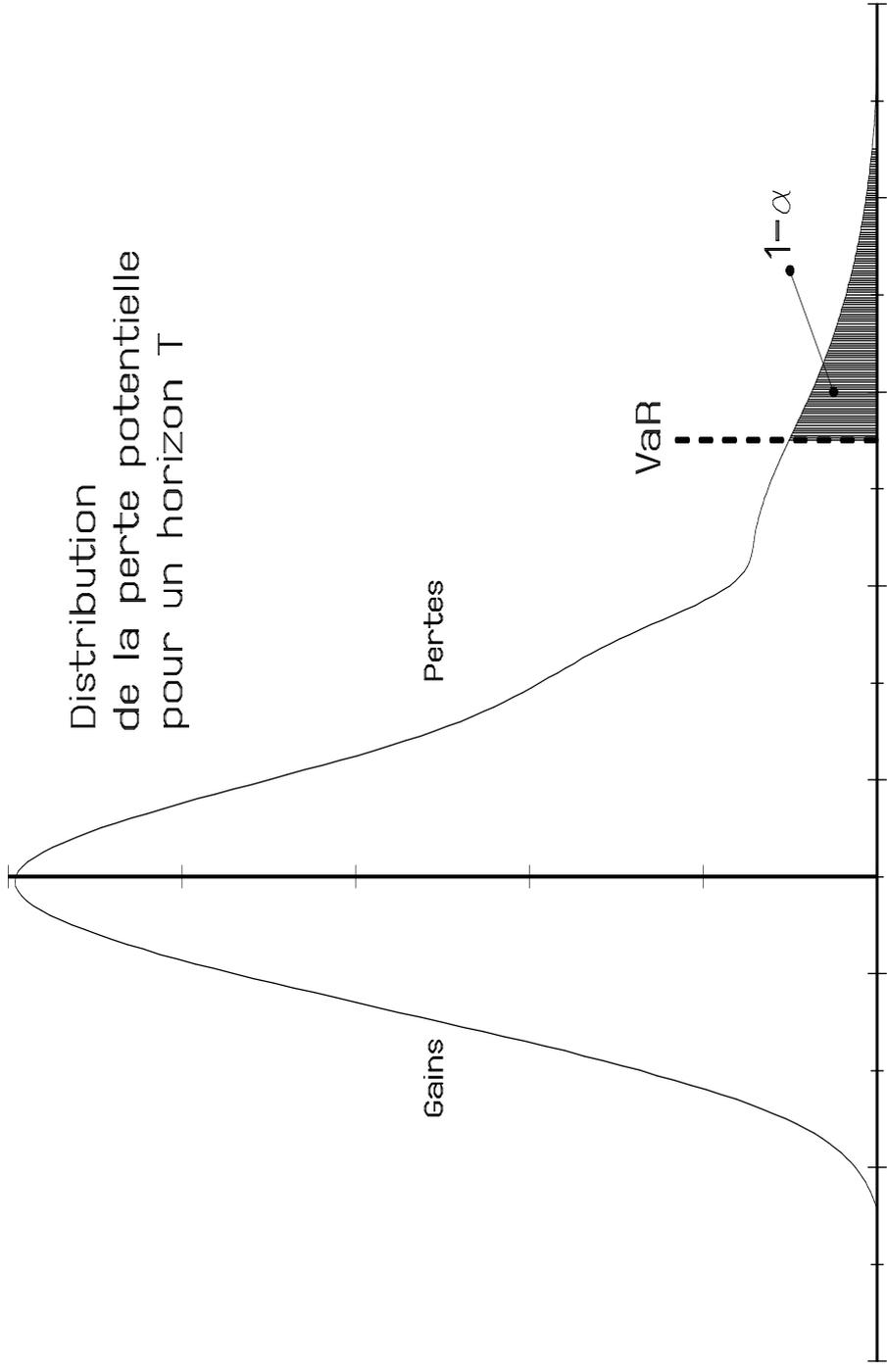


Figure 1: Représentation graphique de la Valeur en Risque

# Les exigences réglementaires

## Le texte de Bâle

Référence :

Amendment to the capital accord to incorporate market risks,  
*Basle Committee on Banking Supervision*, January 1996, N° 24

A l'époque, l'exigence en fonds propres était calculée à partir de **bases forfaitaires**.

Désormais, le comité de Bâle autorise les établissements financiers d'utiliser **les modèles internes** pour calculer l'exigence en fonds propres pour **les risques de marché**.

⇒ Légitimité réglementaire de la VaR

La VaR est très vite adoptée par les établissements financiers afin de réduire l'exigence en fonds propres.

⇒ Mise en place d'un cadre réglementaire pour utiliser les modèles internes.

## Exigences réglementaires (suite)

### L'exigence en fonds propres

Référence :

Modalités de Calcul du Ratio de Solvabilité — Actualisation au 31 décembre 1998, Commission Bancaire, Secrétariat Général, Service des Affaires Internationales, 30 décembre 1998

**Les établissements doivent calculer la perte potentielle quotidiennement pour une période de détention de 10 jours.**

Notons cette perte potentielle  $P(t)$  à la date  $t$  (jour ouvré). A chaque date  $t$ , l'établissement calcule l'exigence de fonds propres  $FP(t)$  de la façon suivante

$$FP(t) = \max \left( P(t-1), (3 + \xi) \times \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} P(t-i) \right)$$

avec  $\xi$  le complément éventuel ( $0 \leq \xi \leq 1$ ).

⇒ Il est donc important de **disposer d'une bonne mesure des risques** puisque celle-ci conditionne l'exigence en fonds propres.

## Exigences réglementaires (suite)

### Dispositif prudentiel

Les contrôles ex post visent à s'assurer que le degré de couverture observé correspond bien au niveau de confiance de 99%.

⇒ Le backtesting porte sur la VaR **un jour**, et non sur la VaR pour une période de détention de 10 jours.

⇒ La commission bancaire autorise le calcul de la VaR 10 jours à partir de la VaR 1 jour par **scaling**.

## Exigences réglementaires (suite)

### Dispositif prudentiel

⇒ Les contrôles doivent porter **sur les 250 derniers jours ouvrables**.

La Commission Bancaire définit alors trois zones pour évaluer les résultats des contrôles ex post et pour appliquer le complément éventuel au coefficient multiplicateur 3 :

Zone	Définition de la zone	Valeur de $\xi$
Verte	$\Pr(X \leq n) < 95\%$	<b>0</b>
Orange	$\Pr(X \leq n) < 99.99\%$	<b>0 – 1</b>
Rouge	$\Pr(X \leq n) \geq 99.99\%$	<b>1</b>

$\Pr(X \leq n)$  : Probabilité cumulée d'avoir  $n$  exceptions ⇒ Pour 250 jours, les zones sont les suivantes : Verte ( $n < 5$ ) – Orange ( $5 \leq n \leq 9$ ) – Rouge ( $n > 10$ )

## Exigences réglementaires (suite)

### Le facteur multiplicatif ( $3 + \xi$ )

⇒ Facteur de prudence.

Etant donné une variable aléatoire  $X$  de loi quelconque dont nous connaissons les deux premiers moments  $\mu$  et  $\sigma^2$ , à quelle distance relative par rapport à l'écart-type se situe le quantile  $\alpha$  ?

Pour cela, nous utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev :

$$\Pr (|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

## Exigences réglementaires (suite)

### Le facteur multiplicatif ( $3 + \xi$ )

Si la loi est symétrique, nous avons

$$\Pr(X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2k^2}$$

Or cette probabilité n'est rien d'autre que la fonction de répartition  $F$  :

$$F(\mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2k^2}$$

Au seuil de confiance de  $\alpha$  et si nous désignons par  $F^{-1}$  la fonction inverse de répartition (qui n'est rien d'autre que la fonction de quantile), nous en déduisons que

$$X \leq \mu + k\sigma \iff F^{-1}\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right) = \alpha$$

et donc

$$k \leq \sqrt{\frac{1}{2 - 2\alpha}}$$

## Exigences réglementaires (suite)

### Le facteur multiplicatif ( $3 + \xi$ )

En négligeant la tendance  $\mu$  et en assimilant  $X$  à la perte potentielle, celle-ci se situe donc à  $k$  écarts-types. Or la  $VaR$  telle qu'elle est calculée se situe à  $c = \Phi^{-1}(\alpha)$  écarts-types. Le ratio  $\frac{k}{c}$  est le coefficient de multiplication qui permet d'être sûr que la  $VaR$  correspond bien à un quantile au moins égal à  $\alpha$  lorsque nous utilisons une approximation gaussienne et ceci quelle que soit la vraie fonction de distribution.

Il est facile de montrer que lorsque la fonction de distribution est asymétrique, une borne supérieure de  $k$  est  $(1 - \alpha)^{-1}$ .

## Exigences réglementaires (suite)

### Le facteur multiplicatif ( $3 + \xi$ )

Le tableau suivant contient les valeurs du ratio pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

		symétrique		asymétrique	
$\alpha$	$c$	$k$	$k/c$	$k$	$k/c$
90.00	1.28	2.24	1.74	3.16	2.47
95.00	1.64	3.16	1.92	4.47	2.72
<b>99.00</b>	2.33	7.07	<b>3.04</b>	10.00	<b>4.30</b>
99.25	2.43	8.16	3.36	11.55	4.75
<b>99.50</b>	2.58	10.00	<b>3.88</b>	14.14	<b>5.49</b>
99.75	2.81	14.14	5.04	20.00	7.12
99.99	3.72	70.71	19.01	100.00	26.89

Pour  $\alpha = 99.5\%$ , le ratio est proche de **4**. Si les autorités réglementaires prenaient alors cette valeur pour fixer le coefficient multiplicateur, cette mesure aurait pour incidence **d'augmenter les fonds propres de 41.4% par rapport à la situation actuelle.**

## Exigences réglementaires (suite)

### Les réflexions actuelles sur le risque de crédit

Credit Risk Models at Major U.S. Banking Institutions: Current State of the Art and Implications for Assessments of Capital Adequacy, *Federal Reserve System Task Force on Internal Credit Risk Models*, may 1998

A new capital adequacy framework, *Basle Committee on Banking Supervision*, June 1999, N° 50

⇒ L'utilisation des modèles internes pour calculer l'exigence en fonds propres pourrait être étendue très prochainement aux **risques de crédit**.

# Allocation de fonds propres

- La problématique
- La notion de capital économique
- La construction d'un modèle interne
  1. L'approche *bottom-up*
  2. L'approche *top-down*

# Allocation de fonds propres (suite)

## La problématique

*Cadre d'analyse* : Utilisation d'un modèle interne d'allocation de fonds propres sur base économique.

*Objectif* : Création de valeur (**EVA**) pour les actionnaires (**S**hareholder **V**alue **A**dded analysis — **SVA**).

*Moyens* : Calcul de la rentabilité **économique** de chaque opération, de chaque projet (c-à-d. de la rentabilité de chaque projet en tenant compte du montant de fonds propres (*capital économique* consommé)).

## Allocation de fonds propres (suite)

### La notion de capital économique

Chaque opération (risquée) mobilise des fonds propres de la banque.

Ceux-ci peuvent être calculés de façon forfaitaire. Cependant, le calcul ne tient pas compte des effets de diversification, de la nature du portefeuille de la banque, de la signature (rating) de la contrepartie, etc.

⇒ Fonds propres forfaitaires

Ceux-ci peuvent être calculés à partir de modèles internes, qui sont (supposés être) plus rationnels.

⇒ Fonds propres économiques (ou capital économique = mesure juste du risque)

## Allocation de fonds propres (suite)

*VaR* : outil de mesure du capital économique.

La construction des VaRs va donc concerner l'ensemble des risques d'une banque :

1. Le risque de marché
2. Le risque de crédit
3. Le risque opérationnel

⇒ Sélectionner (et comparer) les projets en tenant compte du capital économique alloué.

⇒ Réduire au final les fonds propres alloués pour afficher une meilleure rentabilité (ROE).

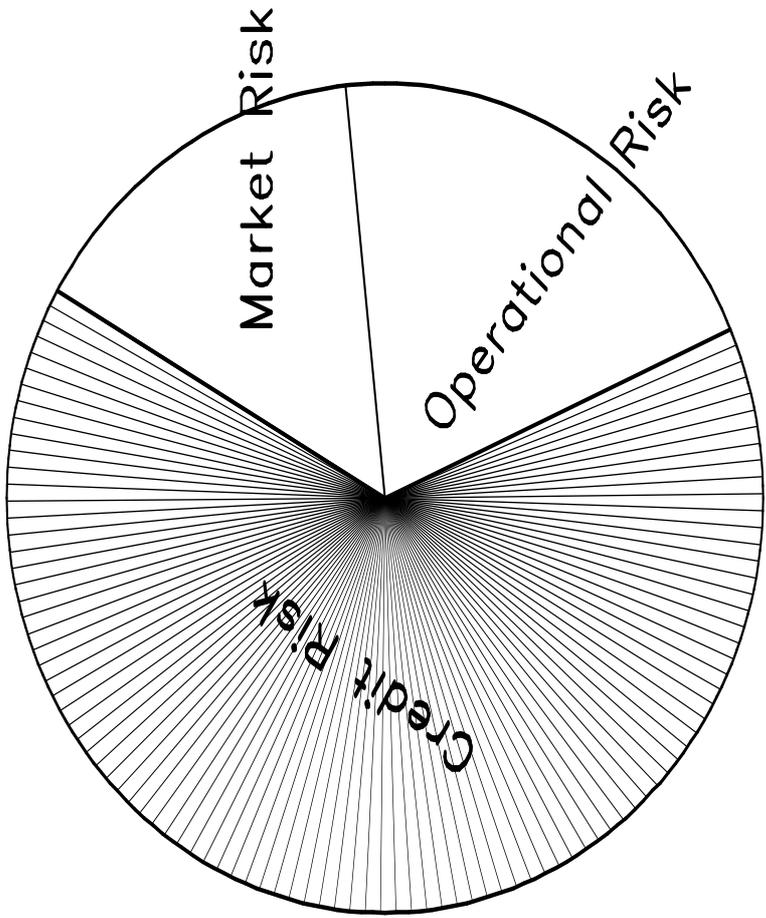


Figure 2: Les différents types de risque

## Allocation de fonds propres (suite)

### La construction d'un modèle interne

La VaR est l'outil de mesure (outil de référence) du capital économique. Elle permet donc de savoir combien il faut allouer de capital économique à un nouveau projet, mais ce n'est pas **un modèle d'allocation**.

Modèle d'allocation = modèle qui permet d'allouer de façon efficiente les fonds propres entre différentes activités ou différents projets.

⇒ 2 approches : *bottom-up* et *top-down*.

# Allocation de fonds propres (suite)

## L'approche *bottom-up*

Références :

Denault, M. [1999], Coherent allocation of risk capital, Swiss Federal Institute of Technology, *Working Paper*, October, <http://www.risklab.ch/Papers.html>

Froot, K.A. and J.C. Stein [1998], Risk management, capital budgeting, and capital structure policy for financial institutions: an integrated approach, *Journal of Financial Economics*, **47**, 55-82

## Allocation de fonds propres (suite)

Punjabi, S. [1998], Many happy returns, *Risk*, **June**, 71-76

Schmock, U. and D. Straumann [1999], Allocation of risk capital, RiskLab, Department of Mathematics, ETH Zürich, *Working Paper*,

<http://www.math.ethz.ch/schmock/ftp/slides/>

Tasche, D. [1999], Risk contributions and performance measurement, Zentrum Mathematik, TU München, *Working Paper*, July,

<http://www-m1.mathematik.tu-muenchen.de/m4/pers/tasche/>

## Allocation de fonds propres (suite)

L'approche bottom-up peut être considérée comme un modèle d'allocation de fonds propres **et/ou** comme un suivi de la consommation de fonds propres.

Le principe est de mesurer le capital économique au niveau le plus fin, c'est-à-dire au niveau de la transaction, puis de consolider ces capitaux économiques à des niveaux moins détaillés.

⇒ De par sa nature, l'approche *bottom-up* permet effectivement de suivre la consommation en fonds propres.

## Allocation de fonds propres (suite)

### Questions :

Comment décider la réalisation ou non d'une opération ?

Comment choisir entre deux opérations ?

Que faire lorsque l'enveloppe allouée est entièrement consommée ?

⇒ Nous voyons bien que dans ce contexte le principe de "premier arrivé, premier servi" ne tient plus.

## Allocation de fonds propres (suite)

Première approche : Le principe d'Euler

- Portefeuille avec un vecteur de stratégie  $u$
- Mesure de risque  $\mathcal{R}$
- Vecteur de capital économique  $\mathcal{K}$

⇒ Nous pouvons alors définir une mesure de performance *raisonnable* par (Tasche [1999], théorème 4.4) :

$$a(u) = \partial_u \mathcal{R}(u)$$

Le capital économique est alors défini par  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_i(u))$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i(u) &\equiv \frac{u_i}{\mathcal{R}(u)} a_i(u) \\ &= \frac{u_i}{\mathcal{R}(u)} \partial_u \mathcal{R}(u) \end{aligned}$$

Dans le cas d'une mesure de risque de type *Value-at-Risk* gaussienne, nous retrouvons le principe de covariance.

## Allocation de fonds propres (suite)

Deuxième approche : L'égalisation des mesures de performance ajustées du risque

**RAPM** : Risk-Ajusted Performance Measure

1. Roc (return on regulatory capital)
2. Rorac (return on risk-adjusted capital)
3. Raroc (risk-adjusted return on regulatory capital)
4. Rarorac (risk-adjusted return on risk-adjusted capital)

$$\text{RORAC} = \frac{\text{Revenu net}}{\text{Capital économique}}$$

L'idée sous-jacente est de comparer cette mesure à une cible, et seuls les projets qui présentent des performances supérieures à cette cible seront retenus.

## Allocation de fonds propres (suite)

Considérons  $M$  activités relativement indépendantes. Notons  $\mathcal{K}_m$  le capital économique alloué à la  $m$ -ième activité. Soit  $\varphi(\mathcal{K})$  la fonction qui relie le capital économique et le RORAC.  $\mathbf{C}$  représente le capital de la banque. Nous pouvons alors formaliser le problème d'allocation de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_M \leq \mathbf{C} \\ \varphi_m(\mathcal{K}_m) = \varphi_{m'}(\mathcal{K}_{m'}) \end{cases}$$

⇒ A moins de considérer l'indépendance entre les différentes activités (ou de faire des hypothèses simplificatrices), l'approche *bottom-up* est difficile à utiliser pour faire un véritable exercice d'allocation de fonds propres. En fait, cette approche est beaucoup plus appropriée pour suivre la consommation de fonds propres, et à posteriori pour mesurer la véritable rentabilité de chaque activité.

## Allocation de fonds propres (suite)

### L'approche *top-down*

Référence :

Baud, N., A. Frachot, P. Igigabel, P. Martineu et T. Roncalli [1999], An Analysis Framework for Bank Capital Allocation, Groupe de Recherche Opérationnelle, *Working Paper*

Contrairement à l'approche *bottom-up* qui consiste à consolider le risque du portefeuille bancaire depuis le niveau élémentaire (la transaction) jusqu'à l'unité d'allocation (la ligne métier), l'approche *top-down* consiste à désagréger une information mesurée sur l'ensemble du portefeuille bancaire, celle-ci étant utilisée comme un **proxy** pour la mesure de risque.

## Allocation de fonds propres (suite)

Concrètement, selon la méthodologie EaR (Earnings-at-Risk) usuellement mise en œuvre dans ce contexte, le risque d'une activité est directement relié à la volatilité de son résultat. De ce point de vue, le volatilité est perçue comme un **intégrateur de l'ensemble des risques** associés à cette activité. Cette démarche est une étape préliminaire naturelle de l'allocation puisqu'elle adopte le point de vue de l'actionnaire qui investit son capital dans différentes activités bancaires assimilées à autant d'actifs financiers.

⇒ Théorie du portefeuille, mais avec des particularités liées à l'activité bancaire.

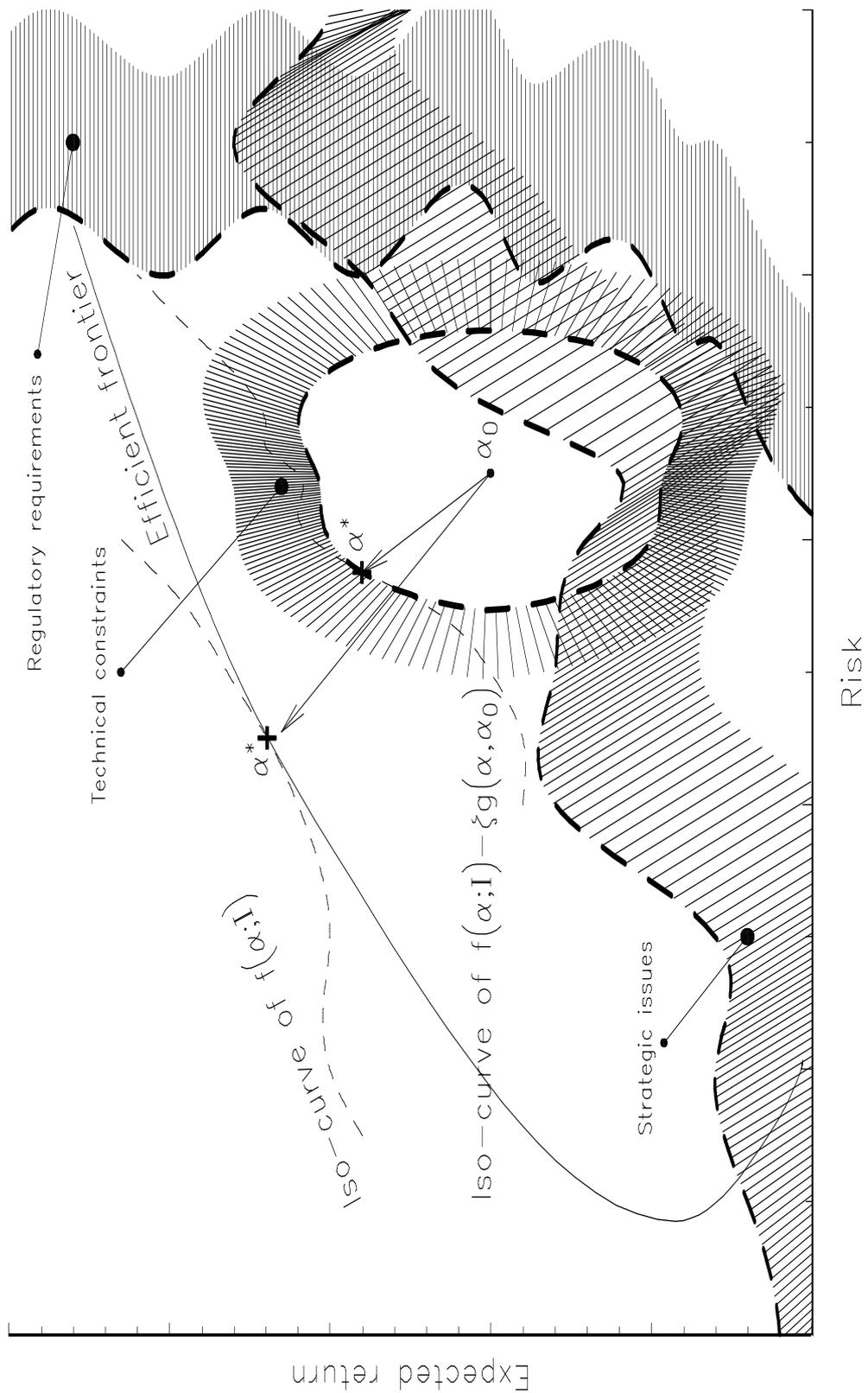


Figure 3: Représentation graphique du problème d'optimisation

## Allocation de fonds propres (suite)

L'approche retenue :

- Découpage de la banque en  $M$  *business lines* ( $M = 16$ )
- **proxy** pour la mesure du risque : volatilité des résultats
- modèle suffisamment flexible pour pouvoir intégrer de nombreuses contraintes et des éléments stratégiques

⇒ Problème : il va nous falloir à un certain moment une matrice de corrélation de la rentabilité des capitaux économiques :

**Matrice de corrélation *top-down*.**

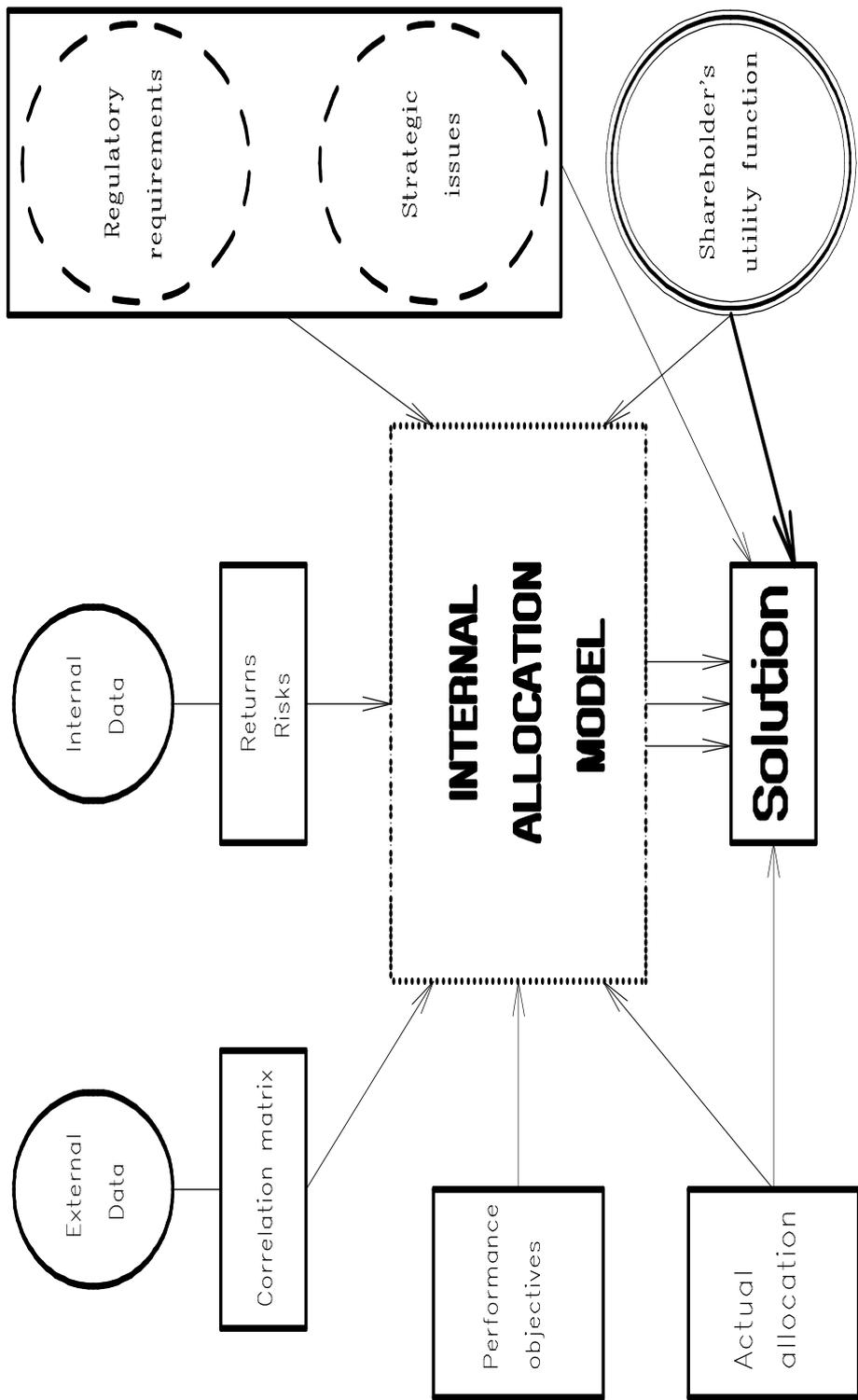


Figure 4: Schéma de construction d'un modèle interne top-down

## Allocation de fonds propres (suite)

Comment définir cette matrice de corrélation *top-down* ?

- avis des experts
- utilisation de données internes
- utilisation de données externes

⇒ La solution retenue est de considérer les rendements des cours boursiers et de décomposer ceux-ci en une composante “commune” qui reflète la rentabilité des capitaux économiques et une composante “spécifique” :

$$r_{t,n} = \alpha_{t,n}^{\top} f_t + u_{t,n}$$

## Allocation de fonds propres (suite)

- $r_{t,n}$  est le rendement de l'établissement financier  $n$  à la date  $t$
- $\alpha_{t,n}$  est le vecteur des sensibilités aux facteurs  $f_t$
- $f_t$  est le vecteur aléatoire  $M \times 1$  des rendements des capitaux économiques
- $u_{t,n}$  est la composante idiosyncratique qui reflète les spécificités de l'établissement financier

$\Rightarrow \alpha_{t,n}^\top f_t$  est une composante de marché.

$\Rightarrow$  Modèle factoriel de type APT.

## Allocation de fonds propres (suite)

Ecriture du modèle statistique :

$$\mathbf{r}_t = A_t f_t + \mathbf{u}_t$$

avec

$$f_t \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

et

$$\mathbf{u}_t \sim \mathcal{N}(0, D)$$

De plus, nous supposons que  $f_t \perp \mathbf{u}_t$ .

⇒ Nous avons donc un modèle factoriel classique, sauf que  $A_t$  est une matrice connue (pas d'estimation des sensibilités).

$A_t$  est la matrice des allocations de capitaux économiques.

## Allocation de fonds propres (suite)

Ecriture de la vraisemblance :

$$\ell(\mu, \Sigma, D | \mathbf{r}) \equiv \sum_{t=1}^T \ell_t(\mu, \Sigma, D | \mathbf{r}_t)$$

$$\begin{aligned} \ell &= -\frac{NT}{2} \ln 2\pi \\ &\quad -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |A_t \Sigma A_t^\top + D| \\ &\quad -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (r_t - A_t \mu)^\top (A_t \Sigma A_t^\top + D)^{-1} (r_t - A_t \mu) \end{aligned}$$

Notons  $\theta = (\mu, \Sigma, D)$  le vecteur des paramètres. L'estimateur du Maximum de Vraisemblance est la solution du problème suivant d'optimisation :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\text{ML}} &= \arg \max \ell(r | \mu, \Sigma, D) \\ \text{s.c.} &\quad \begin{cases} \Sigma > 0 \\ D > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## Allocation de fonds propres (suite)

⇒ Résolution numérique (algorithme de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno + SQP).

Problème :  $M = 16$ ,  $N = 173$  et  $T = 1400$ .

Dimension du vecteur  $\theta$  : 445

⇒ Réduire la complexité du problème.

1. Nous supposons que  $A_t$  est une matrice invariante dans le temps.

2. Nous concentrons la vraisemblance.

Notons  $V = A\Sigma A^\top + D$ . Nous avons

$$\frac{\partial \ell}{\partial V^{-1}} = \frac{T}{2}V - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (r_t - A_t\mu)^\top (r_t - A_t\mu)$$

d'où

$$V(\mu) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - A_t\mu)^\top (r_t - A_t\mu)$$

## Allocation de fonds propres (suite)

En utilisant les propriétés de l'opérateur trace, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T (r_t - A\mu)^\top (A\Sigma A^\top + D)^{-1} (r_t - A\mu) \\ &= \sum_{t=1}^T \left( \text{tr} \left( V^{-1} (r_t - A\mu)^\top (r_t - A\mu) \right) \right) \\ &= \text{tr} \left( V^{-1} \sum_{t=1}^T (r_t - A\mu)^\top (r_t - A\mu) \right) \\ &= \text{tr} \left( V^{-1} TV \right) \\ &= NT \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que la valeur de la vraisemblance concentrée est

$$\begin{aligned} \ell^c &= -\frac{NT}{2} (\ln 2\pi + 1) + \frac{T}{2} \ln T \\ &\quad - \frac{T}{2} \ln \sum_{t=1}^T (r_t - A_t\mu)^\top (r_t - A_t\mu) \end{aligned}$$

Maximiser la vraisemblance concentrée revient donc à minimiser la forme quadratique.  $\hat{\mu}_{ML}$  correspond donc à  $A^\dagger \hat{r}$  avec  $A^\dagger$  la pseudo-inverse de Moore-Penrose et  $\hat{r}$  le vecteur des moyennes des rendements.

## Allocation de fonds propres (suite)

3. Nous transformons l'optimisation contrainte (dans un cône) en une optimisation sur un domaine ouvert :

$$V = AHH^T A^T + \Delta^2$$

avec  $H$  une matrice triangulaire inférieure (décomposition de Cholesky de  $\Sigma$ ) et  $\Delta$  une matrice diagonale.

⇒ Le vecteur des paramètres  $\theta$  devient

$$\theta = \begin{bmatrix} \text{vech}H \\ \text{Diag}\Delta \end{bmatrix}$$

Ainsi, la dimension du vecteur  $\theta$  devient 309.

## Allocation de fonds propres (suite)

4. Nous reformulons la vraisemblance :

$$\begin{aligned}\ell &\propto -\frac{T}{2} \ln |AHH^T A^T + \Delta^2| \\ &\quad -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{r})^T (AHH^T A^T + \Delta^2)^{-1} (r_t - \hat{r}) \\ &\propto -\frac{T}{2} \ln |AHH^T A^T + \Delta^2| \\ &\quad -\frac{T}{2} \text{tr} \left( (AHH^T A^T + \Delta^2)^{-1} \hat{V} \right)\end{aligned}$$

avec

$$\hat{V} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \hat{r})^T (r_t - \hat{r})$$

## Allocation de fonds propres (suite)

5. Nous calculons le vecteur score de la vraisemblance. Nous avons

$$\Delta_V \ell = -\frac{T}{2} (V^{-1} - V^{-1} \hat{V} V^{-1})$$

Nous en déduisons que

$$\mathbf{g}(\theta | \mathbf{r}) = - \begin{bmatrix} \text{vech} \left( T A^\top (V^{-1} - V^{-1} \hat{V} V^{-1}) A H \right) \\ \text{Diag} \left( T \Delta (V^{-1} - V^{-1} \hat{V} V^{-1}) \right) \end{bmatrix}$$

⇒ Optimisation numérique de type quasi-Newton (BFGS) avec gradient analytique.

⇒ Les valeurs de départ sont obtenues à partir de la solution OLS ou GLS.

## Allocation de fonds propres (suite)

⇒ Nous obtenons finalement une estimation de la matrice de corrélation *top-down*  $\rho$  :

$$(\hat{\rho}_{ML})_{i,j} = \frac{(\hat{H}_{ML} \hat{H}_{ML}^T)_{i,j}}{\sqrt{(\hat{H}_{ML} \hat{H}_{ML}^T)_{i,i} (\hat{H}_{ML} \hat{H}_{ML}^T)_{j,j}}}$$

⇒ Notons aussi que nous disposons d'une estimation **mondiale** de l'espérance mathématique et de la variance du rendement des capitaux économiques.

⇒ Possibilité d'inférence statistique (en supposant certaines hypothèses : PML (Gouriéroux, Monfort et Trognon [1984], distribution asymptotique, etc. ).

## Allocation de fonds propres (suite)

Que pouvons-nous faire avec cette matrice de corrélation *top-down* ?

1. Gestion de portefeuille (allocation et ré-allocation)
2. Construction de signaux de ré-allocation (à partir des programmes duaux)
3. Analyse comparée des résultats de la banque avec les résultats de l'estimation
4. etc.

⇒ Le périmètre est constitué de 16 *business units*.

⇒ Dans cette optique, chaque *business unit* se voit allouer une enveloppe globale de fonds propres (un certain montant de capital économique).

⇒ Chaque *business unit* doit ensuite répartir cette enveloppe :

Désagrégation des capitaux économiques



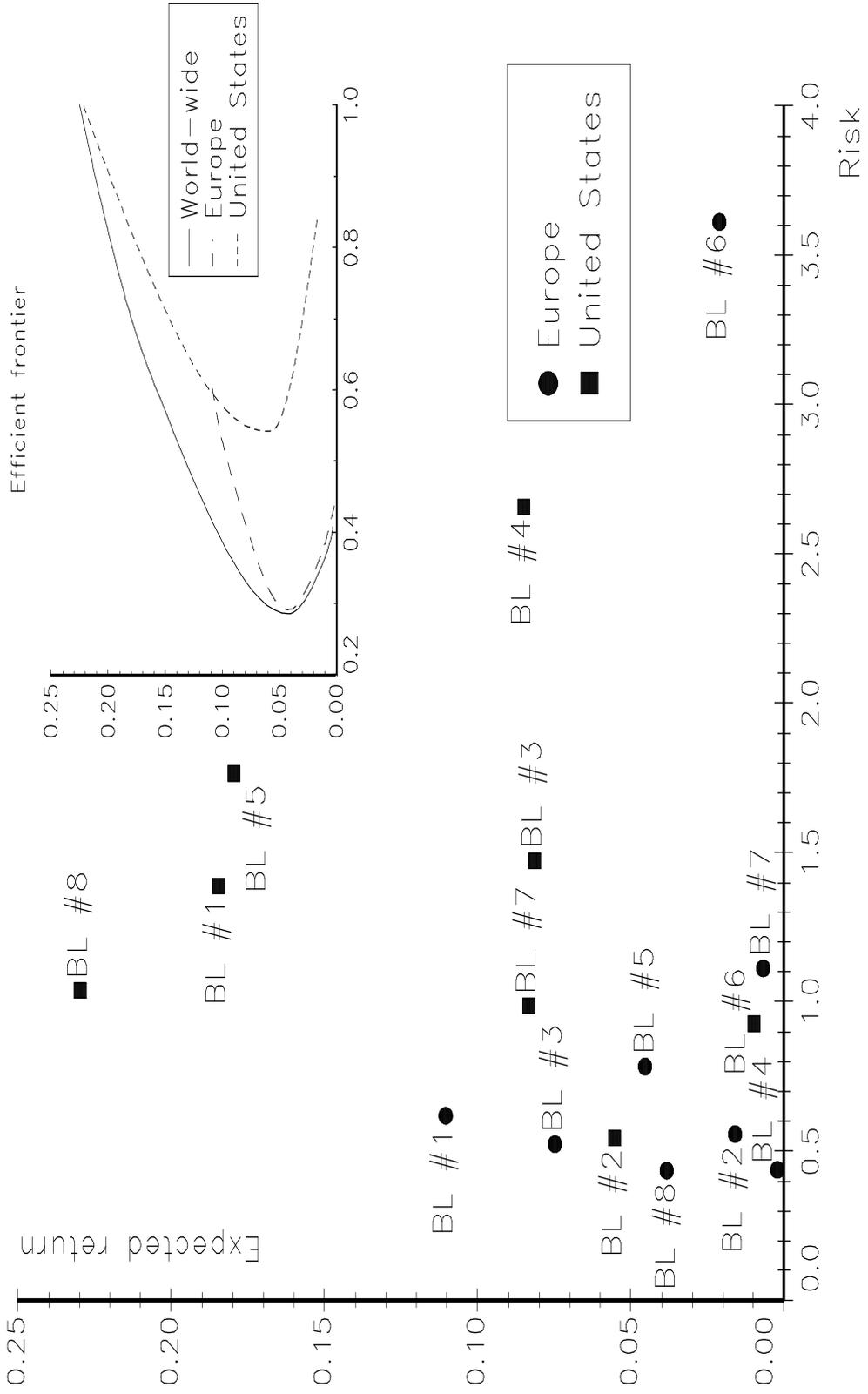


Figure 5: Graphe moyenne-variance

## 2 Mesures des risques de marché

- Un rappel sur les aspects réglementaires
- La Valeur en Risque
- Les problèmes liés à la construction de la VaR
- La VaR est-elle une bonne mesure des risques ?

### **3 L'utilisation de la VaR pour les autres risques**

- Le risque de crédit
- Le risque opérationnel

## Le risque de crédit

Credit Risk Models at Major U.S. Banking Institutions: Current State of the Art and Implications for Assessments of Capital Adequacy, *Federal Reserve System Task Force on Internal Credit Risk Models*, may 1998

CreditMetrics : <http://www.riskmetrics.com/>

CreditRisk+ : <http://www.csfp.csh.com/>

KMV : <http://www.kmv.com/>

## Le risque de crédit (suite)

Crouhy, M. [1999], Measuring Credit Risk: Comparative Analysis of CreditVaR Models, TABE, 30 Mars 1999

<http://www.cabe.ca/tabe/crouhy.pdf>

Gordy, M.B. [1998], A comparative anatomy of credit risk models, Board of Governors of the Federal Reserve System, *Working Paper*, **47**, December

<http://www.bog.frb.fed.us/pubs/feds/1998/index.html>

Lehrbass, F. [1999], Rethinking risk-adjusted returns, *Credit Risk Special Report*, **Risk April**

Lucas, A., P. Klaassen, P. Spreij et S. Straetmans [1999], An analytic approach to credit risk of large corporate bond and loan portfolios, Serie Research Memoranda, **1999-18**, Vrije Universiteit

<http://www.econ.vu.nl/bfs/papers/unpublis.htm>

# Le risque opérationnel

Référence :

Ceske, R. et J. Hernández [1999], Where theory meets practice, *Operational Risk Special Report*, **Risk November**

## Répertorier les différents risques opérationnels

1. Les désastres,
2. Les fraudes et les vols,
3. etc.

## Modéliser la distribution des pertes pour chaque risque

- Définir un horizon temporel (1 an par exemple)
- Définir la distribution d'une perte
- Définir le processus de comptage (nombre d'occurrences)

## Le risque opérationnel (suite)

L'idée sous-jacente est de ne pas modéliser directement la perte totale (annuelle) liée à un type de risque, mais de distinguer la **fréquence des sinistres** – frequency loss distribution – et la **perte unitaire** – severity loss distribution – et de composer ces deux distributions pour obtenir la distribution de la **perte totale**.

Quelques difficultés qui concernent :

- la disponibilité des données (internes) ;
- la qualité et la pertinence de ces données ;
- la prise en compte des queues de distribution ;
- le support de la distribution de la perte unitaire ;
- la sensibilité des résultats.

## Le risque opérationnel (suite)

### Un exemple de calcul de capital économique

Nous notons  $\zeta$  la perte liée à un type de risque.

Généralement,  $\zeta$  peut prendre des valeurs allant de quelques centaines de francs à plusieurs milliards de francs.

Nous supposons que  $\zeta$  est une variable aléatoire Log-normale :

$$\zeta \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$$

Nous pouvons alors estimer les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  par la méthode du maximum de vraisemblance (ML) ou la méthode des moments généralisés (GMM).

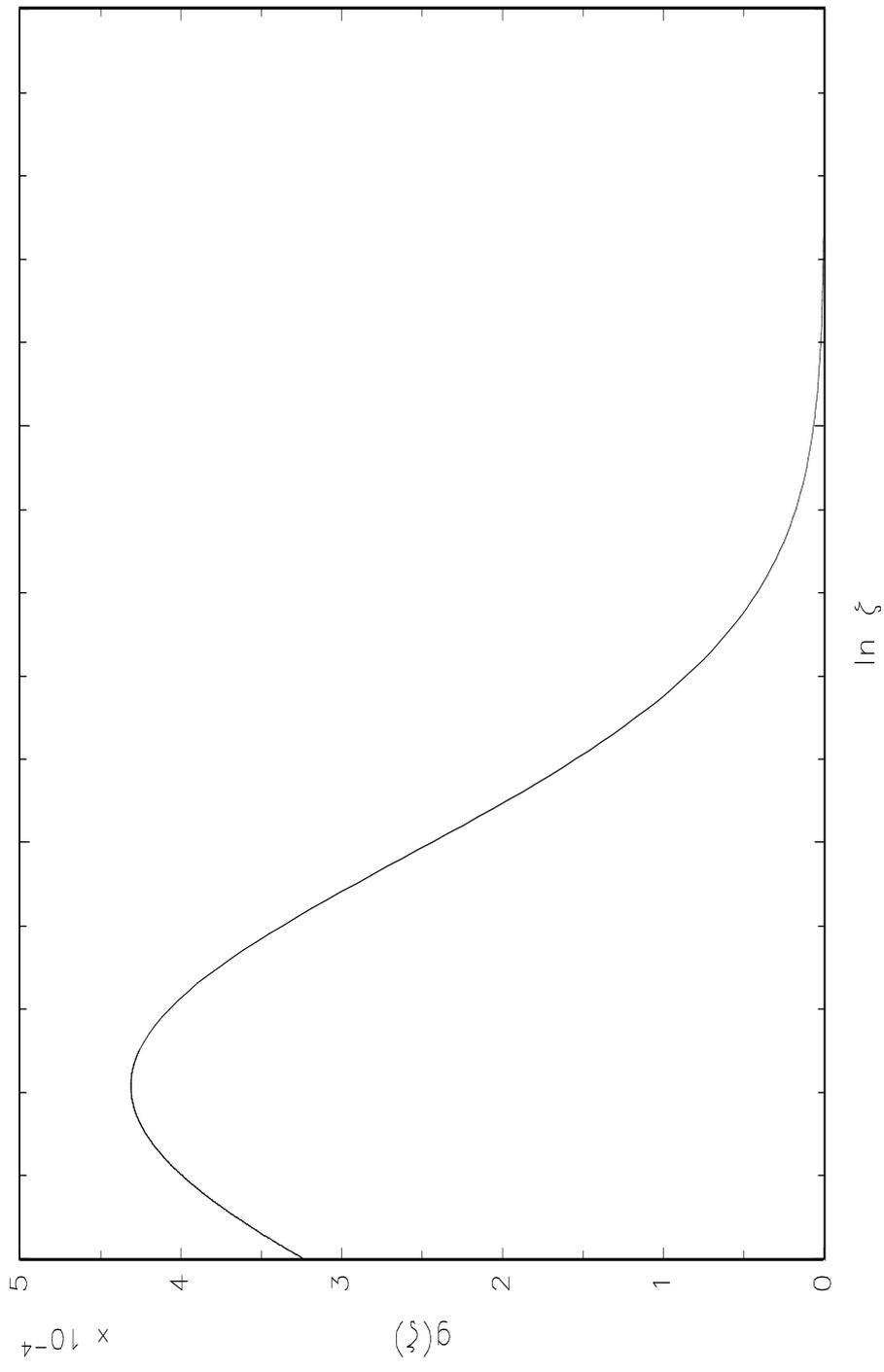


Figure 6: Distribution de la perte unitaire

## Le risque opérationnel (suite)

Nous notons  $N(t)$  le processus d'arrivée des évènements. Soit  $\mathbf{N}(t; \tau)$  la variable aléatoire représentant le nombre d'occurrences pendant la période  $[t, t + \tau]$ . Nous avons :

$$\mathbf{N}(t; \tau) = \int_t^{t+\tau} N(s) ds$$

Nous supposons que  $\mathbf{N}(t; \tau)$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Généralement,  $\tau$  est fixé à une année dans le cadre d'un modèle d'allocation de fonds propres.

Nous pouvons estimer le paramètre  $\lambda$  par les méthodes précédentes.

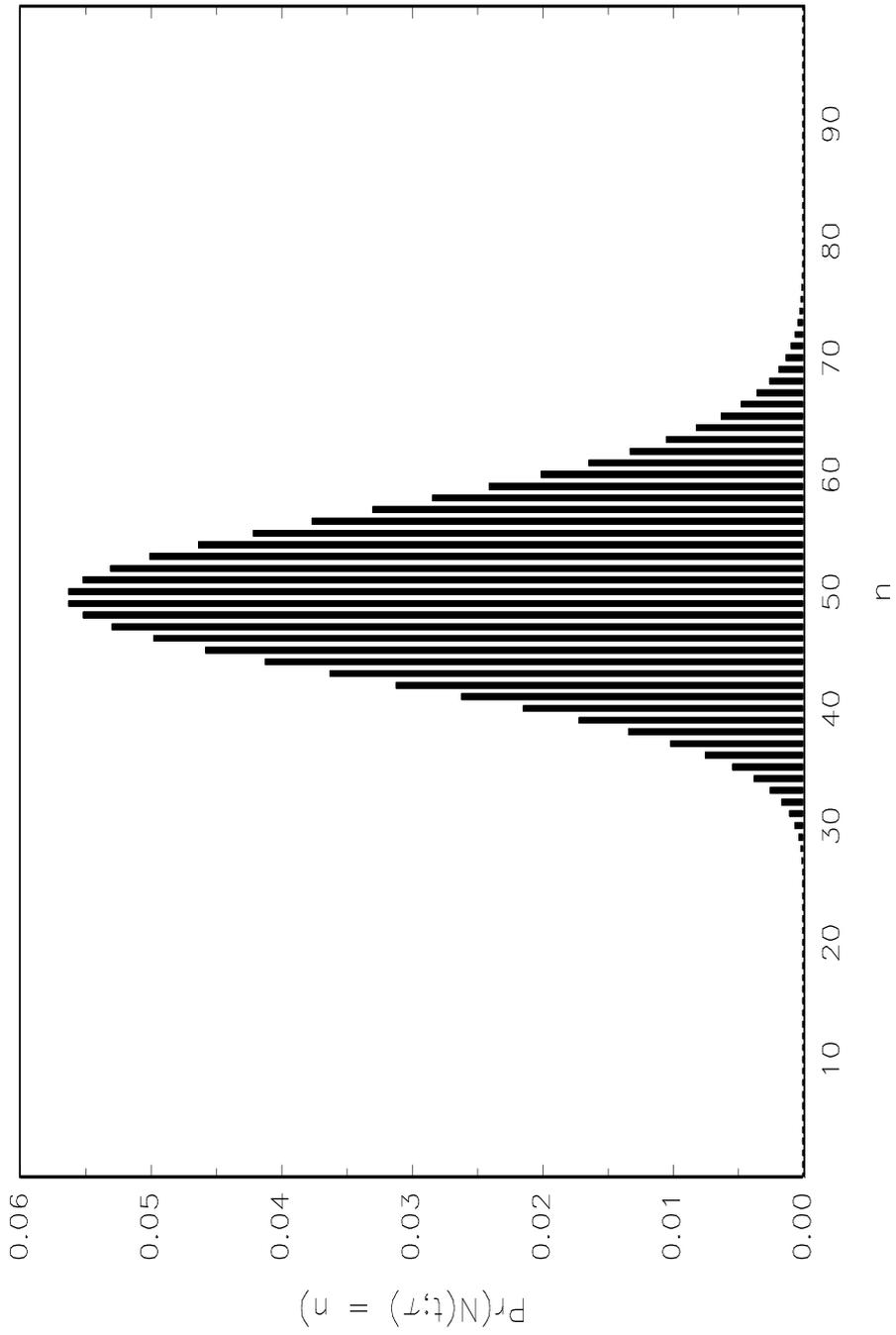


Figure 7: Distribution de la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 50$ .

## Le risque opérationnel (suite)

La variable aléatoire régissant la distribution des pertes  $F_{\varrho}$  est donnée par

$$\varrho(t) = \sum_{j=1}^{N(t;\tau)} \zeta_j$$

Nous définissons alors le *Capital Economique* comme le quantile  $\alpha$  de la distribution des pertes  $F_{\varrho}$

$$EC = \underbrace{F_{\varrho}^{-1}(\alpha)}_{\text{Unexpected Loss}}$$

⇒ Ce quantile est calculé par la méthode de Monte Carlo.

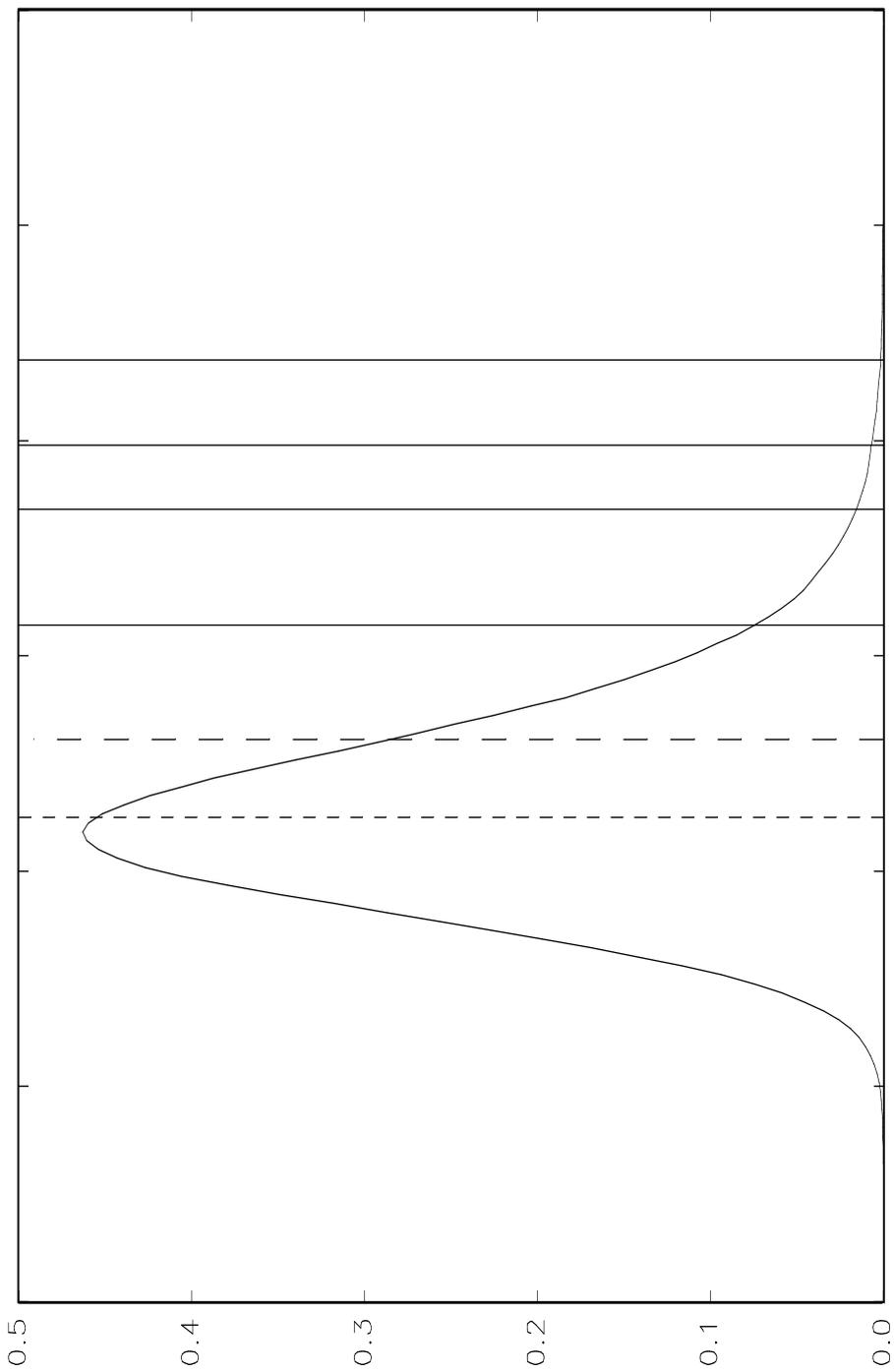


Figure 8: Distribution de la perte **annuelle** (pdf)

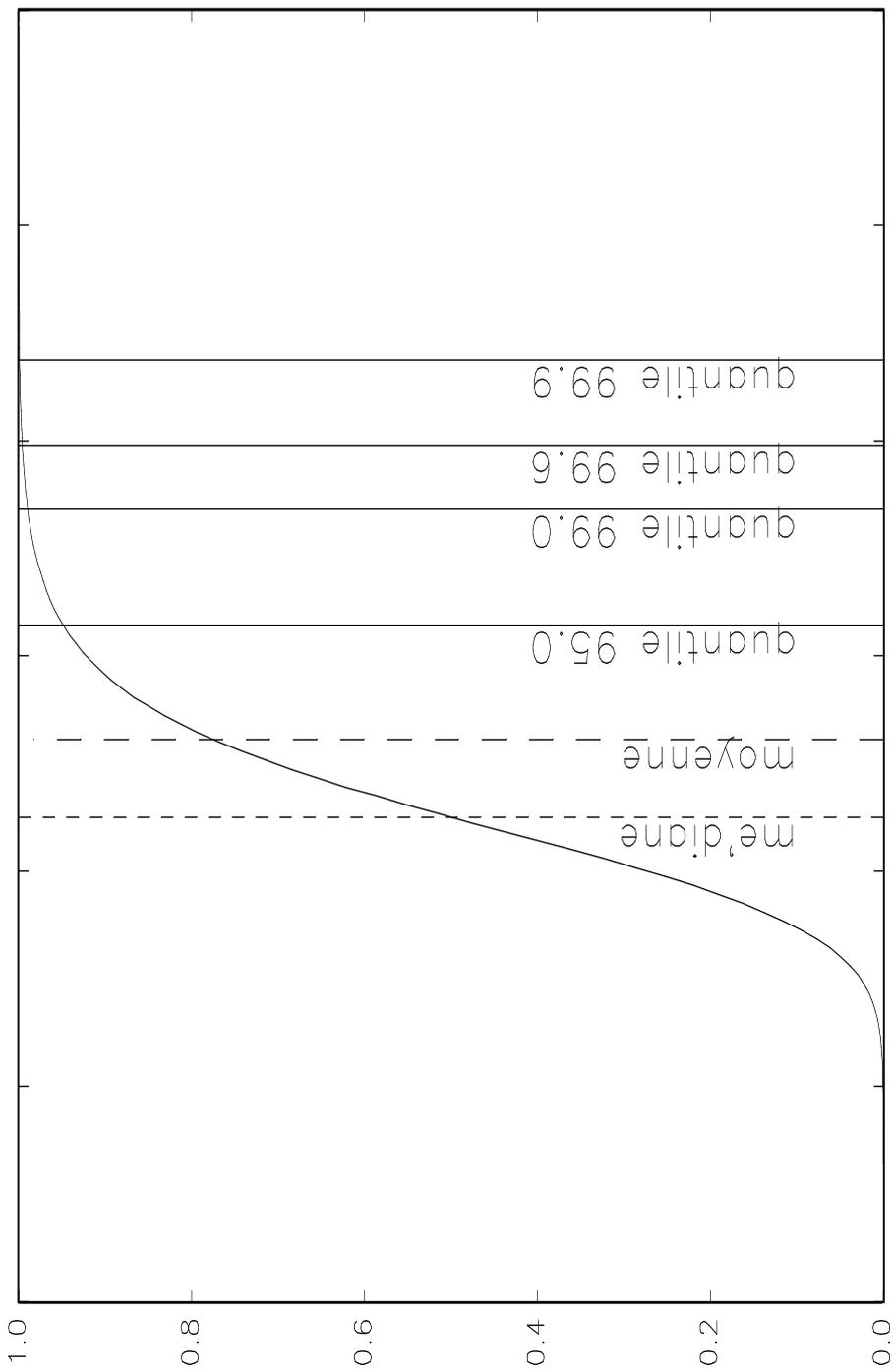


Figure 9: Distribution de la perte annuelle (cdf)

## Le risque opérationnel (suite)

### Les problèmes statistiques

- Le problème de l'estimation de la distribution de la perte unitaire
  - Le choix de la méthode d'estimation
  - Le choix de la distribution
  - Les queues de distribution (loi du maximum, etc.)
- Le problème de l'estimation du processus de comptage
- Le traitement des agrégats

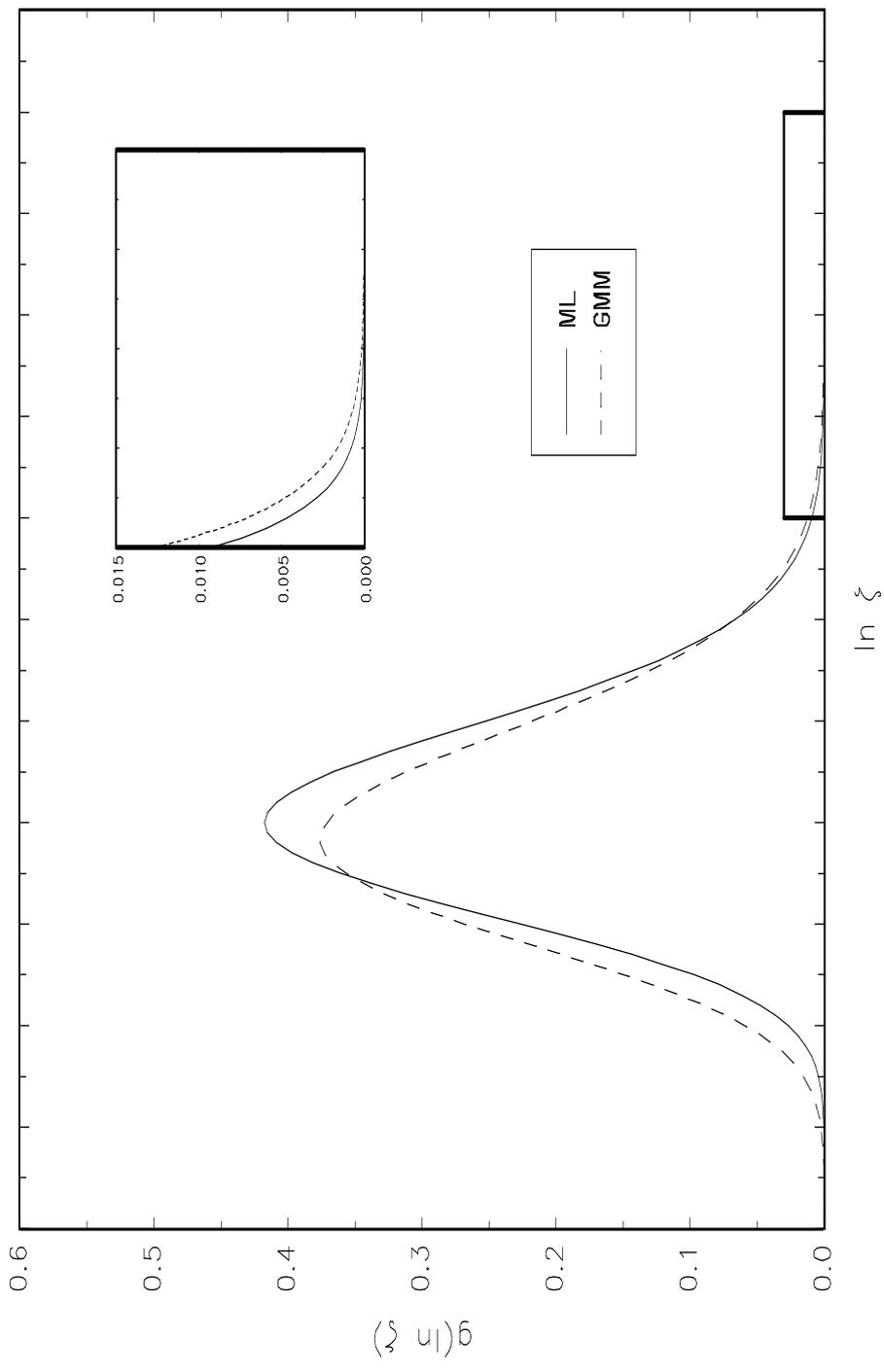


Figure 10: Le choix de la méthode d'estimation

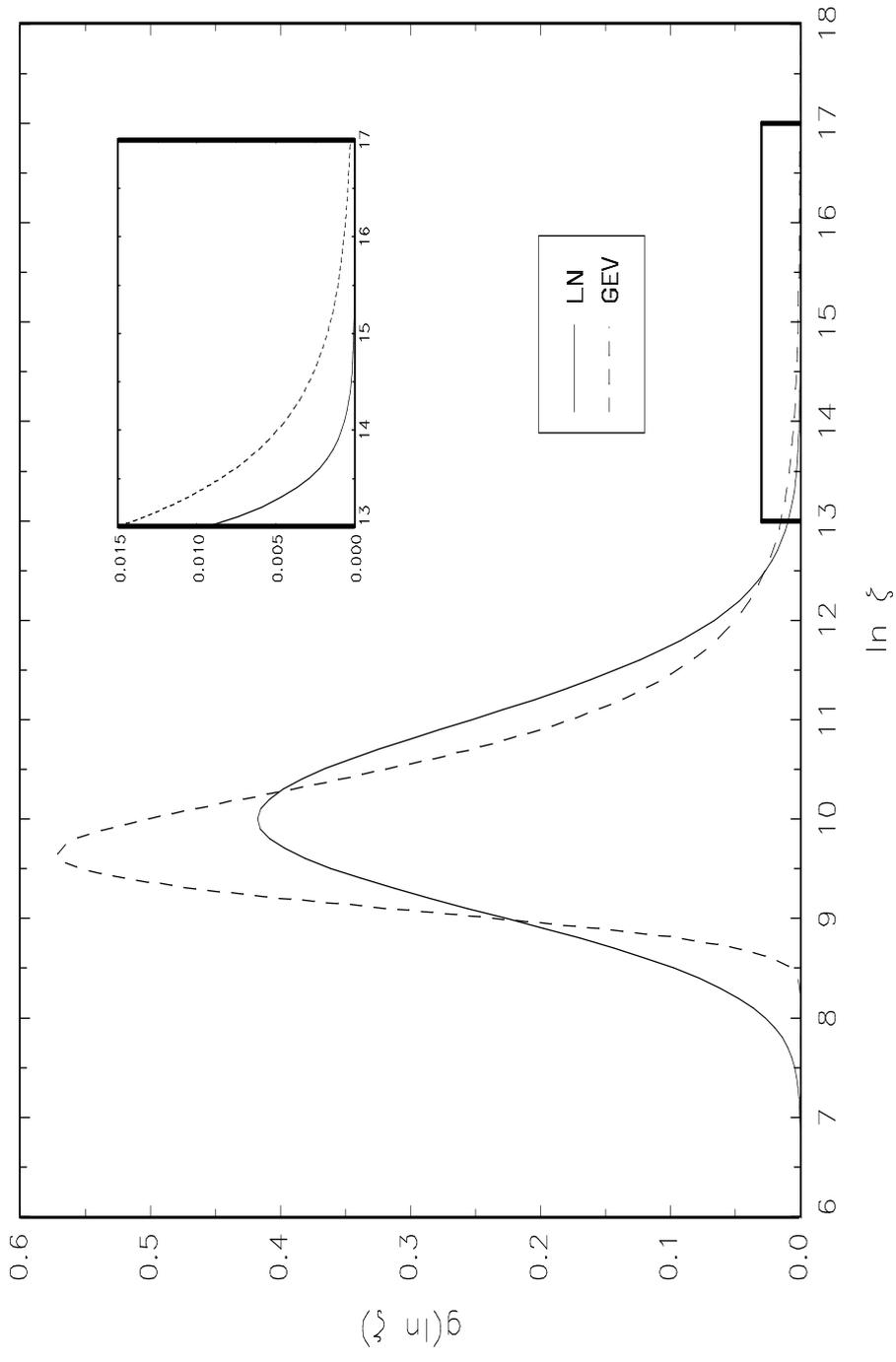


Figure 11: Le choix de la distribution

## Le risque opérationnel (suite)

### La distribution du maximum $\zeta_N^+$

Nous considérons la distribution du maximum  $\zeta_N^+ = \max(\zeta_1, \dots, \zeta_n, \dots, \zeta_N)$  pour  $N$  évènements. Si les variables aléatoires  $\zeta_n$  sont indépendantes de même distribution  $\mathbf{F}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_N(\zeta) &= \Pr(\zeta_N^+ \leq \zeta) \\ &= \Pr(\zeta_1 \leq \zeta, \dots, \zeta_n \leq \zeta, \dots, \zeta_N \leq \zeta) \\ &= \mathbf{F}(\zeta)^N \end{aligned}$$

Soient  $g_N$  et  $f$  les fonctions de densité correspondantes.  $g_N$  est alors donné par la formule suivante

$$\begin{aligned} g_N(\zeta) &= \partial_\zeta \mathbf{G}_N(\zeta) \\ &= N \mathbf{F}(\zeta)^{N-1} f(\zeta) \end{aligned}$$

La fonction inverse (fonction de quantile) s'obtient directement à partir de  $\mathbf{F}^{-1}$

$$\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha) = \mathbf{F}^{-1}\left(\alpha^{\frac{1}{N}}\right)$$

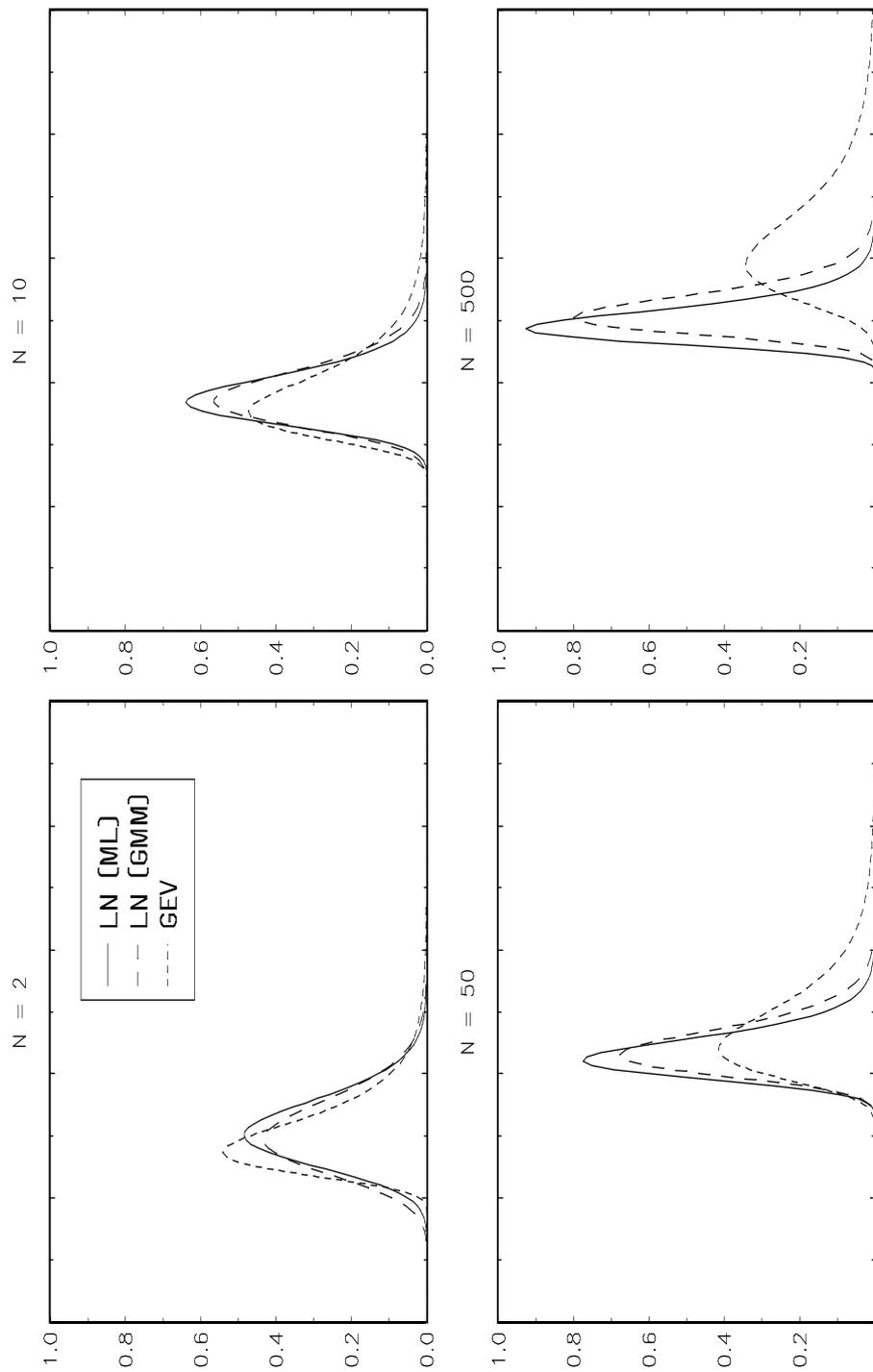


Figure 12: Déformation de la distribution du maximum  $\zeta_N^+$

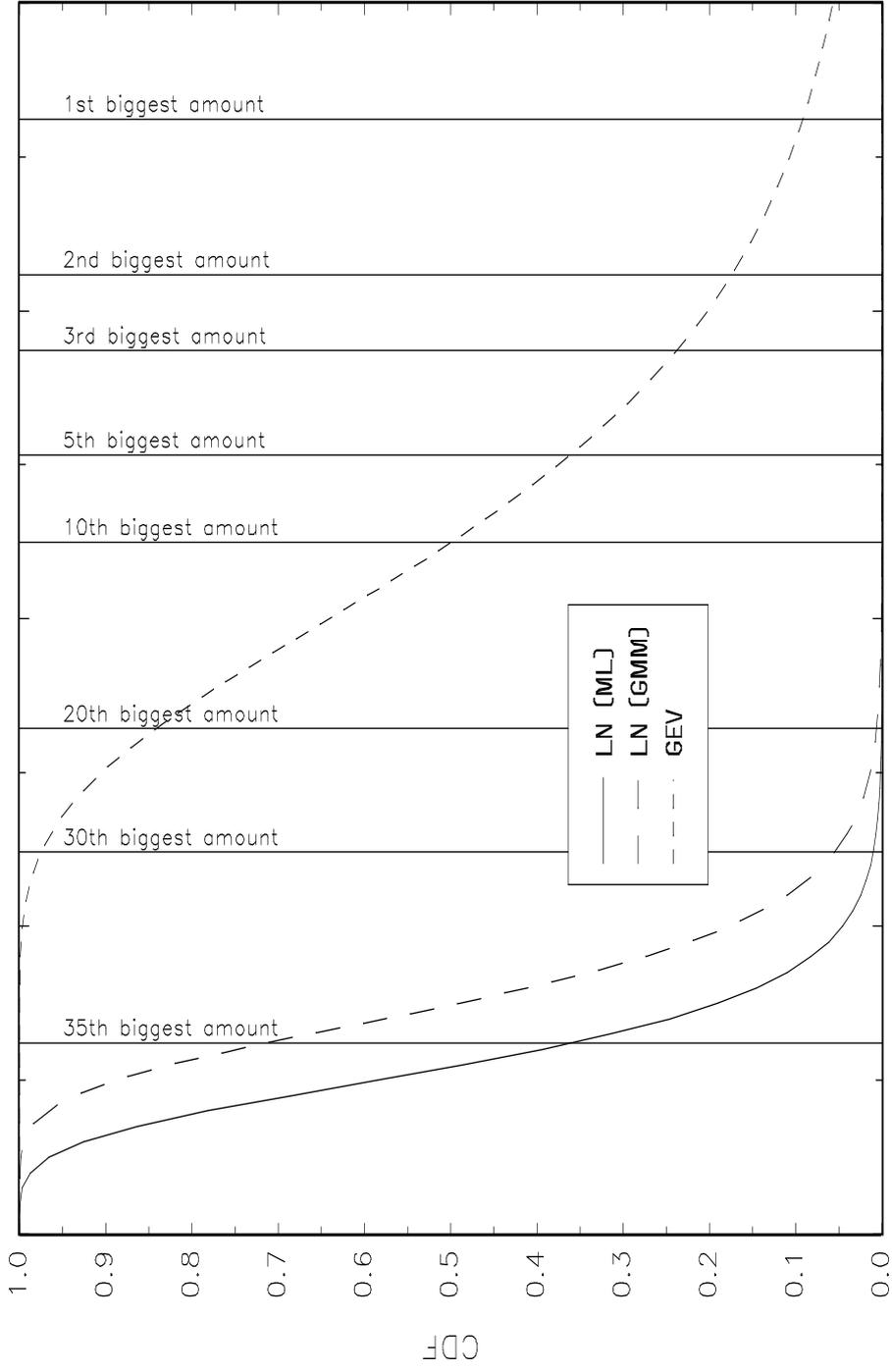


Figure 13: Confrontation de la distribution du maximum avec les réalisations

## Le risque opérationnel (suite)

### Le traitement des agrégats

Ce problème est lié à la collecte des données. Lorsque les données sont remontées pour alimenter la base des données, certaines observations ne correspondent pas à des évènements (1 observation = 1 évènement), mais à des groupes d'évènements (1 observation = plusieurs évènements).

⇒ pb de la construction de la base de données (les projets sont relativement récents).

## Le risque opérationnel (suite)

- Première approche : Remplacer l'observation  $t$  correspondant à un agrégat  $X_t = \sum_{j=1}^{n_t} \zeta_j$  par  $n_t$  observations de montant  $Y_t = \frac{X_t}{n_t}$   
⇒ Apparition de biais (mauvaise estimation de la variance)
- Deuxième approche : Remplacer l'observation  $t$  correspondant à un agrégat  $X_t = \sum_{j=1}^{n_t} \zeta_j$  par **une seule** observation de montant  $Y_t = \frac{X_t}{n_t}$ .
- Troisième approche : Ne pas utiliser les observations qui correspondent à des agrégats
- Quatrième approche : Utiliser les agrégats, et donc toute l'information disponible

## Le risque opérationnel (suite)

L'idée sous-jacente est que les agrégats contiennent en fait une information (sûrement) plus pertinente que les événements unitaires. Pourquoi ?

Soient  $m$  et  $v$  la moyenne et la variance de  $\zeta$ .  
Nous avons

$$\mathbb{E} [X_t] = n_t \times m$$

et

$$\text{var} [X_t] = n_t \times v$$

⇒ L'agrégat révèle donc une information sur la moyenne et la variance.

## Le risque opérationnel (suite)

Pour exploiter toute l'information de la base de données, il faut utiliser des méthodes d'inférence statistique particulières :

1. Méthode des moments généralisés
2. Méthode des moments simulés
3. Méthode du maximum de vraisemblance simulée
4. Inférence indirecte

Dans ce cas, nous considérons que chaque observation correspond à un agrégat (les observations qui correspondent à un seul évènement peuvent être traités comme des agrégats) et l'inférence statistique porte sur les agrégats, et non sur les évènements.

**Problème** : Déterminer la distribution de  $X_t$ .

⇒ Utilisation extensive des méthodes numériques (quadratures de Gauss-Legendre, simulation, etc.)

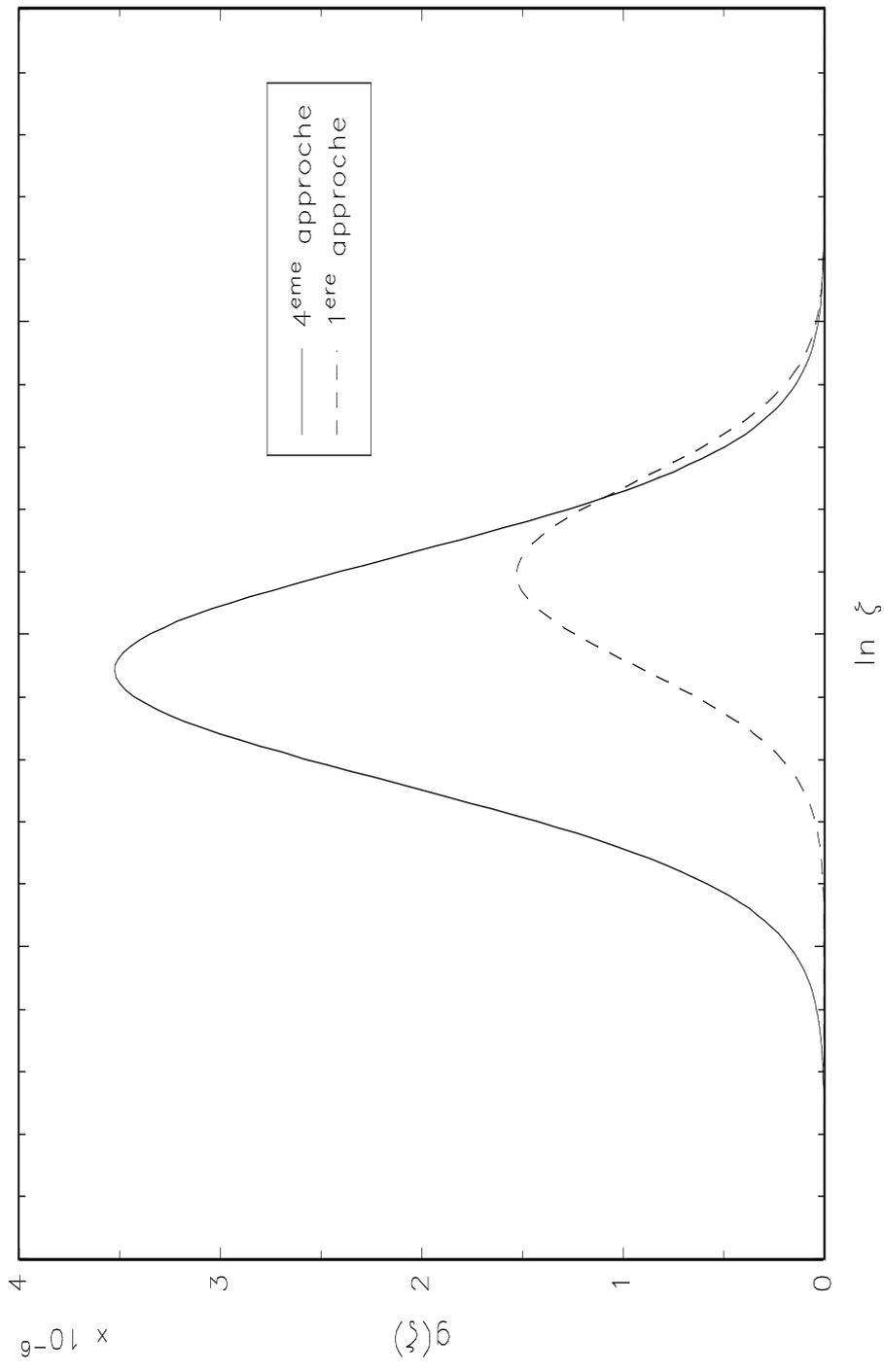


Figure 14: Traitement des agrégats

## 4 Le problème de l'agrégation

Références :

Wang, S. S. [1997], Aggregation of correlated risk portfolios: Models & algorithms, CAS Committee on Theory of Risk, *Working Paper*, <http://www.casact.org/library/wang.htm>

Embrechts, P., McNeil, A.J. et D. Straumann [1999], Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls, Departement Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint, <http://www.math.ethz.ch/baltes/ftp/papers.html>

# Mesure agrégée et contribution

Hallerbach, W. [1999], Decomposing portfolio value-at-risk: a general analysis, *Discussion Paper*, Tinbergen Institute, **TI99-0.34/2**, <http://www.tinbinst.nl/papers/TI99034.pdf>

**Problématique** : Décomposer la VaR d'un portefeuille.

⇒ VaR marginale, VaR incrémentale, etc.

Ces réponses sont cependant insuffisantes et mal adaptées.

⇒ Autres méthodologies : Principe d'Euler, Shapley Value, etc.

## Dépendance et corrélation

La corrélation est une mesure de dépendance.

Quelle mesure de corrélation doit-on utiliser ?

⇒ Coefficient de corrélation  $\rho$  de Pearson :

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)}$$

⇒ Coefficient de corrélation  $\tau$  de Kendall :

$$\begin{aligned}\tau(X_1, X_2) &= \Pr\left\{\left(X_1^2 - X_1^1\right)\left(X_2^2 - X_2^1\right) \geq 0\right\} \\ &\quad - \Pr\left\{\left(X_1^2 - X_1^1\right)\left(X_2^2 - X_2^1\right) < 0\right\}\end{aligned}$$

⇒ Coefficient de corrélation  $\varsigma$  de Kendall :

$$\varsigma(X_1, X_2) = \rho(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$$

## Dépendance et corrélation (suite)

Distribution elliptique  $\Rightarrow$  Ces trois mesures sont équivalentes.

Exemple de la loi normale bi-dimensionnelle :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$$

$$\varsigma = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}$$

- Loi gaussienne : non valable pour les risques de crédit et les risques opérationnels.
- Approximation gaussienne : non pertinente pour les risques de marché lors des crises (exemple de LTCM).

## Dépendance et corrélation (suite)

**Question** : La corrélation est-elle une bonne mesure de dépendance pour modéliser les risques ?

**Idée sous-jacente** : La connaissance des lois marginales et des corrélations est-elle suffisante ? Peut-on se passer de la loi jointe ?

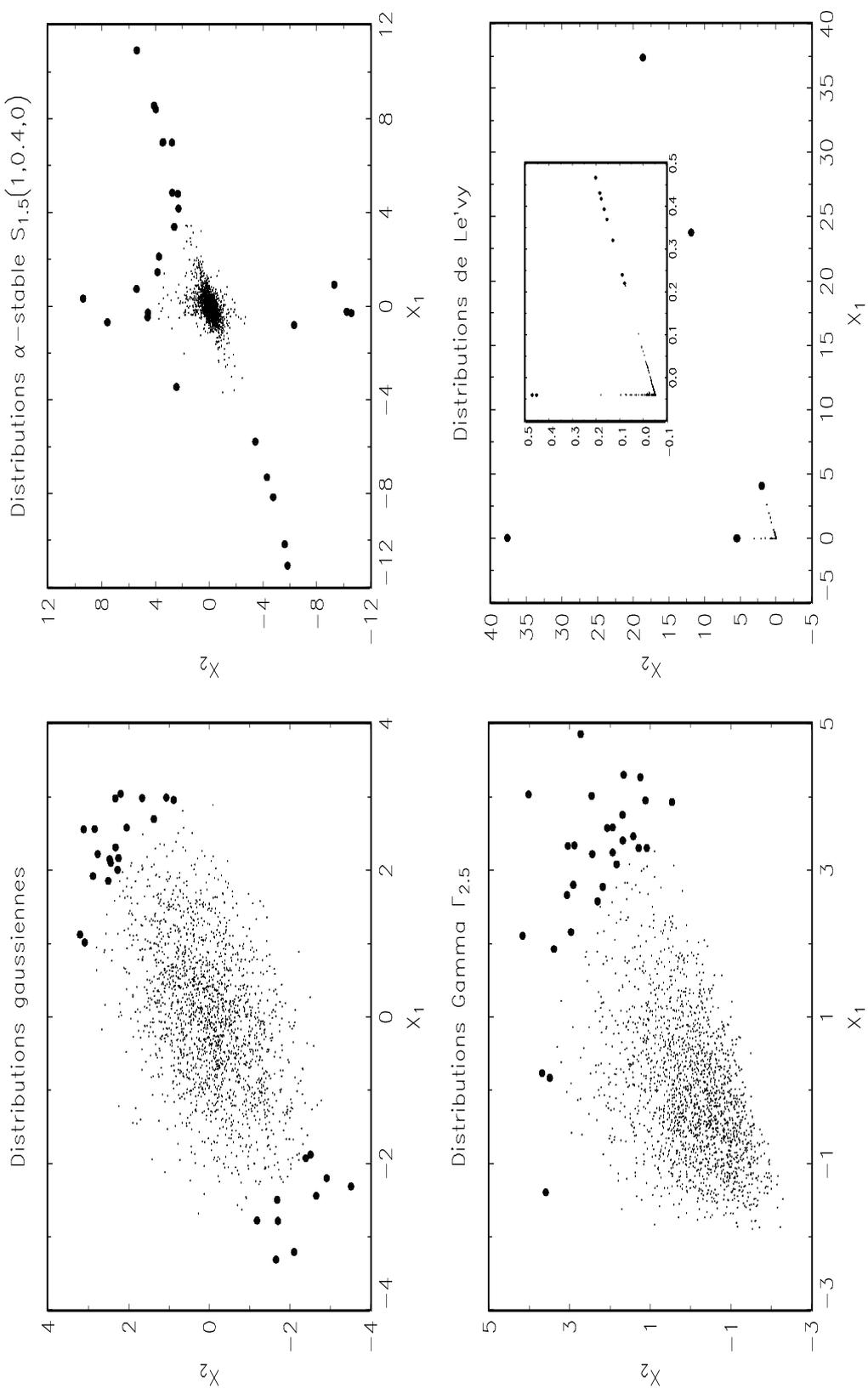


Figure 15: Dépendance et corrélation

## La théorie des copules

Références :

Frees, E.W. et E.A. Valdez [1997],  
Understanding relationships using copulas,  
*North American Actuarial Journal*, **2-1**, 1-25,  
<http://www.soa.org/pubs/najjan.html>

Joe, H. [1997], *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman & Hall, London

Nelsen, R.B. [1998], *An Introduction to Copulas*, *Lecture Notes in Statistics*, **139**, Springer Verlag, New York

Coles, S., J. Currie et J. Tawn [1999],  
Dependence measures for extreme value  
analyses, Lancaster University, *Working  
Paper*, <http://www.maths.lancs.ac.uk/coless/>

Bouyé, E. et M. Salmon [1999], Copulas: an  
empirical investigation for asset return,  
*Working Paper* non disponible

## La théorie des copules (suite)

**Idée générale** : Comment modéliser la loi jointe de  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  à partir des lois marginales de  $X_1, X_2, \dots, X_N$  ?

### Définition d'une copule :

Une copule  $C$  est une fonction de probabilité jointe de  $N$  variables aléatoires uniformes :

$$C(u_1, \dots, u_n, \dots, u_N) =$$

$$\Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n, \dots, U_N \leq u_N)$$

## La théorie des copules (suite)

**Conséquence** : Soit  $X_1, \dots, X_n, \dots, X_N$   $N$  variables aléatoires de fonction de densité  $\mathbf{F}_n$ , alors nous avons

$$C(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_N(x_N)) = \mathbf{F}(x_1, \dots, x_N)$$

**Théorème (Sklar [1959])** : Toute fonction de distribution multidimensionnelle  $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_N)$  peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_N) = C(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_N(x_N))$$

$\Rightarrow$  Toute fonction de distribution multidimensionnelle admet une représentation sous la forme d'une copule.

## La théorie des copules (suite)

**Propriétés :**

$$\varsigma(X_1, X_2) = 12 \int \int_{[0,1]^2} [C(u, v) - uv] du dv$$

$$\tau(X_1, X_2) = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

**Bornes de Fréchet :**

$$\max \{F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0\} \leq F(x_1, x_2)$$

$$F(x_1, x_2) \leq \min \{F_1(x_1), F_2(x_2)\}$$

⇒ La borne inférieure est atteinte pour la copule  $C_-(u_1, u_2) = \max \{u_1 + u_2 - 1, 0\}$  et la borne supérieure correspond à la copule

$$C_+(u_1, u_2) = \min \{u_1, u_2\}.$$

$$\Rightarrow C_-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C_+(u_1, u_2)$$

## La théorie des copules (suite)

Quelques exemples de fonction copule :

- copule de Cook-Johnson

$$C(u_1, \dots, u_N) = \left\{ \sum_{n=1}^N u_n^{-1/\alpha} - N + 1 \right\}^{-\alpha}$$

- copule gaussienne

$$C(u_1, \dots, u_N) = \Phi_\rho \left( \Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_N) \right)$$

⇒ Illustrations numériques :

- La dépendance ne peut se résumer à la notion de corrélation.
- Notion de dépendance extrême.
- Importance des loi marginales.

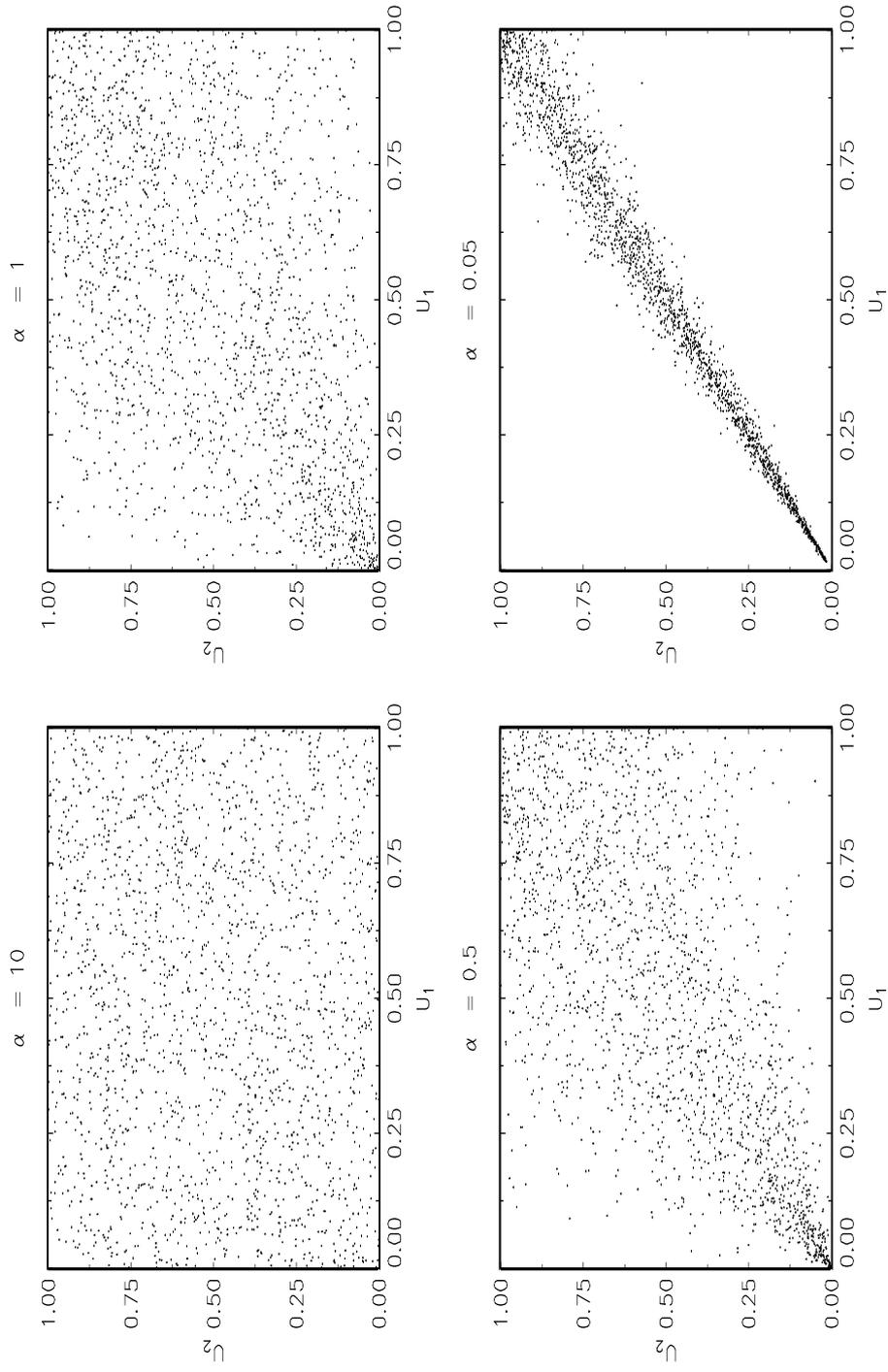


Figure 16: Simulation d'une copule de Cook-Johnson

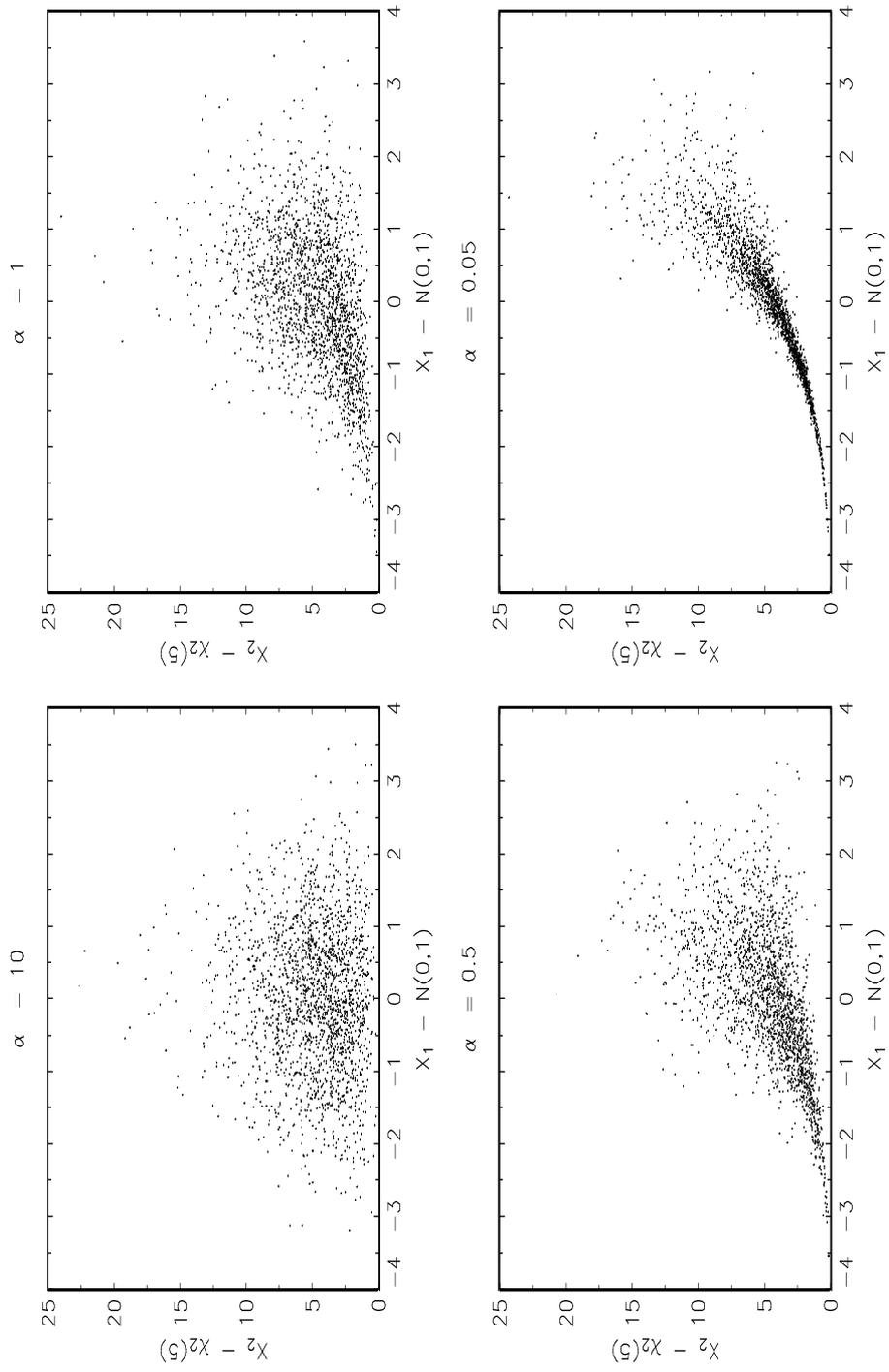


Figure 17: Lois marginales et dépendance

## La théorie des copules (suite)

Considérons l'indice de dépendance extrême  $\chi$  défini par

$$\chi = \lim_{x_1 \rightarrow \sup \Delta_{x_1}} \Pr (X_2 > x_1 | X_1 > x_1)$$

$\chi$  est donc la probabilité limite d'un extrême conditionnelle à un autre extrême. On montre alors que

$$\chi = \lim_{u \rightarrow 1^-} \chi(u)$$

avec

$$\chi(u) = 2 - \frac{\ln C(u, u)}{\ln u}$$

La mesure  $\chi$  permet donc de mesurer une "probabilité de dépendance entre les extrêmes". Par exemple, si nous l'appliquons à la *VaR*, nous avons :

$$\begin{aligned} \chi &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Pr (X_2 > \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha) | X_1 > \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Pr (X_2 > VaR_\alpha(X_2) | X_1 > VaR_1(X_2)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

## La théorie des copules (suite)

Comme  $\chi$  est une probabilité, le support de  $\chi$  est donc  $[0, 1]$ . Nous devons remarquer que cette mesure ne dépend que de la fonction *copula* et est indépendante des distributions marginales. Nous considérons maintenant une seconde mesure de dépendance  $\bar{\chi}$  définie de la façon suivante :

$$\bar{\chi} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \bar{\chi}(u)$$

avec

$$\bar{\chi}(u) = 2 \frac{\ln(\Pr(X_2 > x_1))}{\ln(\Pr(X_2 > x_1 | X_1 > x_1))} - 1$$

Une nouvelle fois, nous pouvons montrer que  $\bar{\chi}$  ne dépend que du *copula*. Ici, le support de  $\bar{\chi}$  est  $[-1, 1]$ , tout comme le support de la corrélation.

**Remarque :** Dans le cas d'un vecteur gaussien à deux dimensions présentant une corrélation égale à  $\rho$ , la mesure de dépendance  $\bar{\chi}$  est égale à  $\rho$ .