

# Prise en compte du skew de corrélation dans le pricing des CDO<sup>2</sup>

Thierry Roncalli

3 juin 2005

## Résumé

Dans cette note, on propose une approche économique pour expliquer et donc prendre en compte le skew de corrélation des CDO. On présente des premiers résultats basés sur l'indice iTraxx.

## 1 Introduction

Ce document présente un modèle de pricing des CDO<sup>2</sup> tenant compte du skew de corrélation. C'est une variante du modèle à copule Normale ou du modèle Gaussien à barrière. L'interprétation de ce modèle comme un modèle factoriel permet d'adopter une approche plus économique de la dépendance des défauts. On peut alors construire un modèle factoriel plus réaliste qui permet d'intégrer le skew de corrélation dans le pricing des produits basket de crédit.

## 2 Rappel du modèle classique de pricing

Dans ce cadre d'analyse, le défaut  $D_i$  de la firme  $i$  se produit lorsqu'une variable latente  $Z_i$  passe en dessous d'une barrière  $B_i$  :

$$\{D_i = 1\} \Leftrightarrow \{Z_i < B_i\}$$

Comme  $Z_i$  est Gaussien, la barrière est identifiée à :

$$B_i = \Phi^{-1}(\Pr\{D_i = 1\})$$

La corrélation des temps de défaut est introduite en supposant que les variables latentes  $Z_1, \dots, Z_n$  forment un vecteur Gaussien standard de matrice de corrélation  $\Sigma$ , qui est le plus souvent une matrice de corrélation constante  $C_n(\rho)$ . Ce dernier cas est équivalent à considérer un modèle factoriel pour modéliser la variable latente  $Z_i$  :

$$Z_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i \tag{1}$$

avec  $X$  et  $\epsilon_i$  deux variables aléatoires Gaussiennes indépendantes.  $X$  s'interprète comme le facteur commun alors que  $\epsilon_i$  représente le facteur individuel.

Ce modèle très simple est largement utilisé pour valoriser les tranches de CDO. On définit la corrélation implicite d'une tranche comme la valeur du paramètre  $\rho$  qui permet de retrouver le spread de la tranche du CDO. En pratique, il apparaît que cette corrélation implicite dépend des points d'attachement et de détachement de la tranche. On observe alors un phénomène de skew de corrélation.

**Remarque 1.** Dans ce modèle, la dépendance entre les temps de défaut (ou entre les instants de défaut) est la même que celle d'une distribution Gaussienne multidimensionnelle. On dit alors que la copule (ou la fonction de dépendance) est Normale.

### 3 Interprétation économique du modèle précédent

Il est relativement facile de perturber le modèle précédent pour générer un skew de corrélation. Plusieurs pistes ont été explorées dernièrement (corrélation aléatoire, modèle à plusieurs facteurs, sensibilité au facteur commun hétérogène, approche factorielle conditionnelle, etc.). Bien que diverses, nous allons voir que ces approches reposent sur le même principe.

#### 3.1 Que représente le facteur commun ?

On interprète souvent le facteur commun  $X$  comme le cycle économique. Par exemple la nouvelle réforme du ratio de solvabilité Bâle II utilise le même type de modèle et fait explicitement référence au cycle long dont la durée moyenne est estimée à 7 ans. Dans ce cas, le bas d'un cycle correspond à des réalisations négatives du facteur  $X$  alors qu'une bonne conjoncture est associée à des valeurs positives de  $X$  (voir la figure 1).

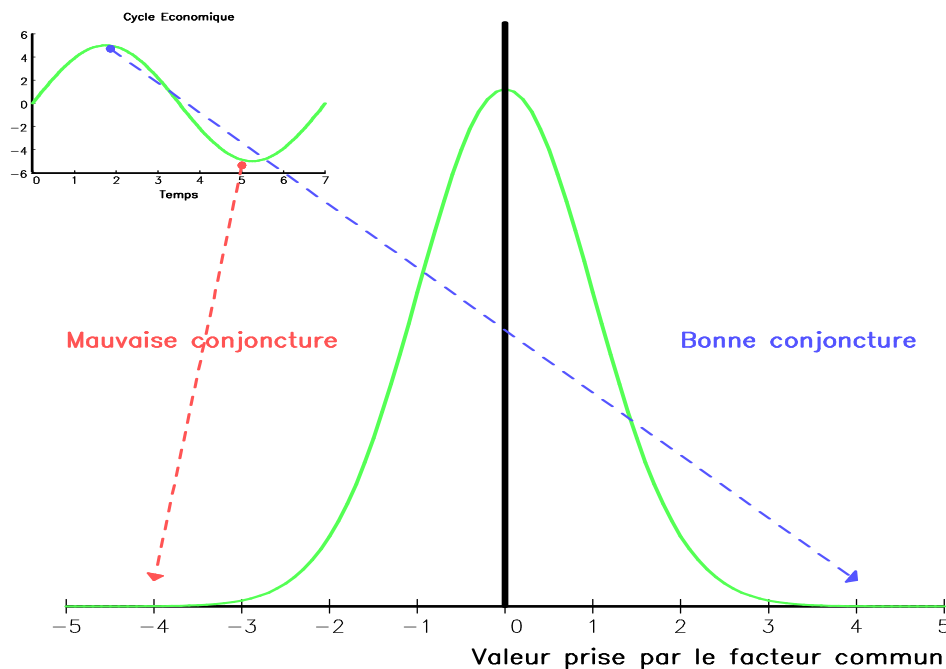


FIG. 1 – Interprétation du facteur commun

On remarque dans ce modèle factoriel que la dynamique du cycle n'est pas prise en compte et qu'elle est remplacée par une modélisation probabiliste de la position du cycle. C'est une approche qui est dite "Through-The-Cycle" par opposition à l'approche "Point-In-Time", ce qui implique que l'horizon de référence est le long terme.

### 3.2 Comment ce facteur commun intervient dans la valorisation d'une tranche de CDO ?

On considère un portefeuille de  $n$  créances. L'expression de la perte  $L$  est :

$$L = \sum_{i=1}^n N_i \times (1 - R_i) \times D_i$$

avec  $N_i$  et  $R_i$  le nominal et le taux de recouvrement de la  $i$ -ième créance. Soient  $K_-$  et  $K_+$  les points d'attachement et de détachement de la tranche. On a :

$$\mathbb{E}[L \mid K_- \leq L < K_+] = \mathbb{E}_X [L(X) \mid K_- \leq L < K_+]$$

où  $L(X)$  est la perte conditionnelle au facteur  $X$ .

La valorisation d'une tranche de CDO avec ce modèle considère donc l'ensemble des trajectoires possibles du cycle. Le phénomène de skew de corrélation pourrait s'expliquer par le fait que les agents financiers ont un horizon ne correspondant pas à l'horizon moyen d'un cycle économique. Mathématiquement, cela implique que la composante commune  $\sqrt{\rho}X$  n'est plus Gaussienne (en particulier, la distribution n'a plus lieu d'être symétrique).

**Remarque 2.** *Les différentes méthodes proposées actuellement pour prendre en compte le skew de corrélation essayent de "casser" cette symétrie. C'est notamment le cas lorsque la corrélation est aléatoire.*

## 4 Perturbation du modèle factoriel

On considère désormais que la variable latente est modélisée de la façon suivante :

$$Z_i = \beta(X) X + \sqrt{1 - \|\beta(X)\|^2} \epsilon_i \quad (2)$$

Cela implique que la sensibilité du facteur  $\beta$  n'est plus constante et égale à  $\sqrt{\rho}$ , mais qu'elle dépend de la valeur prise par le facteur, c'est-à-dire de la position dans le cycle. Cette spécification modifie la dépendance des défauts (ou de façon équivalente la dynamique des défauts).

### 4.1 Implication sur la dynamique des défauts

On considère l'exemple de la figure 2. La fonction  $\beta_0(X)$  est constante, ce qui correspond au modèle factoriel classique. La fonction  $\beta_1(X)$  décroît avec le facteur. Dans ce cas, on suppose que la sensibilité dépend de la position du cycle et qu'elle est d'autant plus forte que la conjoncture est mauvaise. On remarque que la distribution de la variable latente n'est plus une gaussienne et présente une kurtosis et une skewness, ce qui a une influence sur la probabilité conditionnelle de défaut<sup>1</sup>. Ceci se vérifie par exemple sur la figure 3 qui représente la densité normalisée de  $\beta(X) X$ .

<sup>1</sup>même si la probabilité de défaut non conditionnelle reste la même.

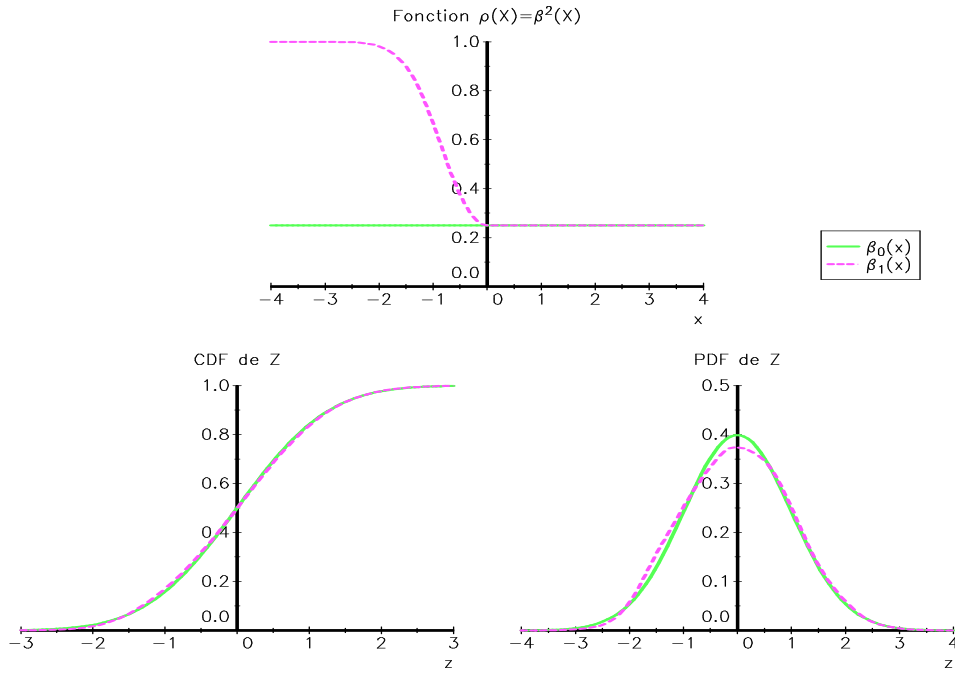


FIG. 2 – Distribution de la variable latente Z

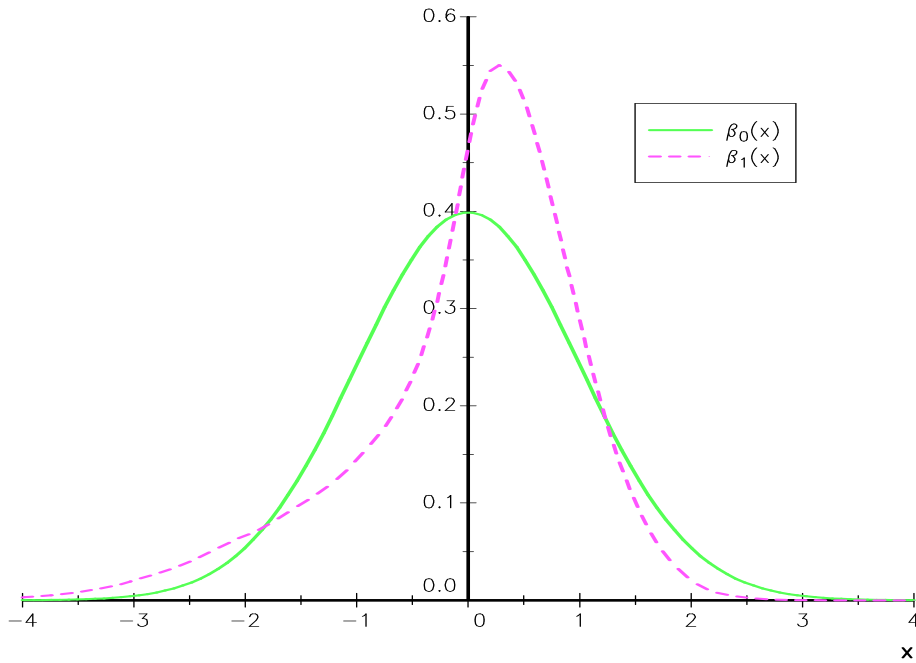


FIG. 3 – Densité normalisée du facteur commun

## 4.2 Implication sur la dépendance des défauts

Finalement, cette nouvelle spécification va avoir un impact sur la loi jointe des défauts. A titre d'illustration, on représente sur la figure 4 la copule empirique des temps de défauts dans le cas de la fonction  $\beta_1(X)$ . On remarque que cette copule n'est plus symétrique comme la copule Normale. On vérifie en particulier que la dépendance jointe entre les défauts est beaucoup plus forte.

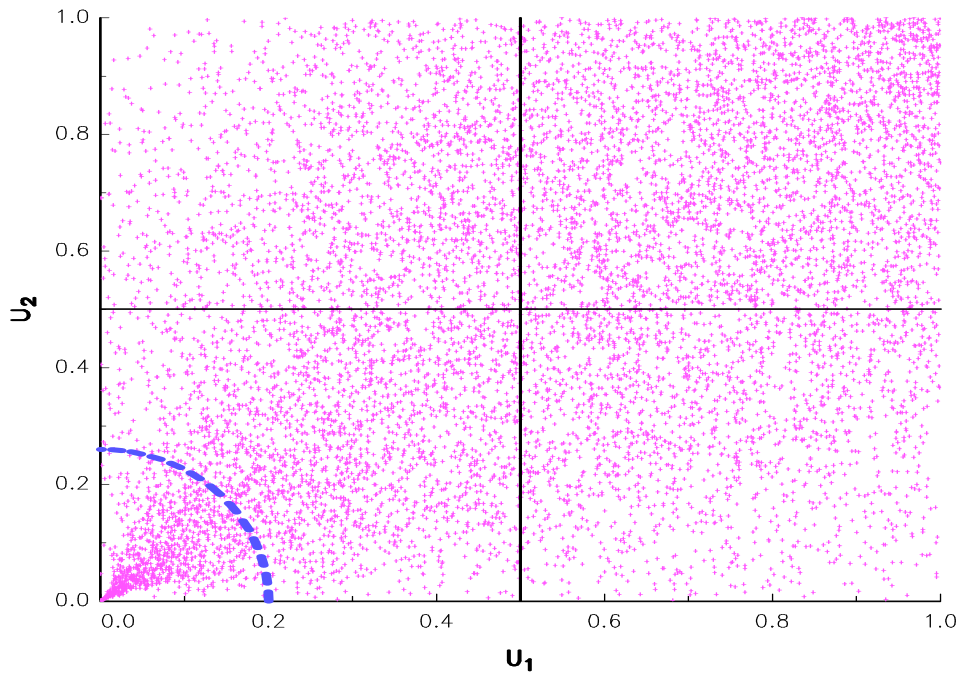


FIG. 4 – Dépendogramme de la copule des temps de défaut

## 4.3 Implication sur le skew de corrélation

On observe un skew de corrélation lorsque la sensibilité au facteur commun  $\beta(x)$  est une fonction décroissante. Des exemples sont présentées dans la section suivante.

**Remarque 3.** *Ce modèle explique le skew de corrélation en introduisant une asymétrie dans la prise en compte du facteur commun (bonne/mauvaise conjoncture). Cela revient à faire un changement de probabilité afin de pénaliser les états baissiers du cycle économique ou encore à considérer une prime de risque à cause du décalage entre l'horizon des agents et la durée des cycles économiques.*

## 5 Quelques exemples

On considère la paramétrisation suivante :

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \sqrt{\rho}) e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{\rho} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction  $\beta(x)$  dépend donc de deux paramètres  $\rho$  et  $\alpha$ . La corrélation locale  $\rho(x) = \beta^2(x)$  est représentée sur la figure 5.  $\rho$  s'interprète comme la corrélation de défaut lorsque le cycle économique est favorable (c'est-à-dire lorsque le facteur commun  $X$  est positif). On remarque aussi que la corrélation locale tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ . Cela implique une contagion complète des défauts lorsque la situation est extrêmement dramatique<sup>2</sup>. A titre complémentaire, la figure 6 donne une idée des corrélations locales  $\rho$  pour différents scénarios défavorables  $S$  en fonction des deux paramètres  $\rho$  et  $\alpha$ . Le caractère défavorable du scénario est appréhendé par la probabilité que le cycle soit plus bas que le scénario. Par exemple, le scénario  $S$  défini par  $\Pr\{X < S\} = 1\%$  correspond grosso modo à la pire année de ce siècle<sup>3</sup>.

Les graphiques suivants présentent différents skew de corrélation donnés par le modèle<sup>4</sup>. On remarque que le modèle génère un skew de corrélation concave "cohérent" avec les skew de marché.

**Remarque 4.** *La fonction précédente est intéressante puisque, pour un  $\alpha$  donné, une variation de  $\rho$  entraîne une quasi-translation du skew de corrélation<sup>5</sup>. En revanche, une modification de  $\alpha$  modifie à la fois la pente et le niveau du skew.*

<sup>2</sup>On peut par exemple penser à la situation de la deuxième guerre mondiale qui a paralysé complètement certains pays (Pologne, Belgique) pendant quelques jours ou semaines.

<sup>3</sup>si l'horizon temporel est l'année.

<sup>4</sup>On considère un CDO de maturité 5 ans (fréquence trimestrielle). Les noms qui composent le portefeuille sont homogènes (le spread est égal à 100 bp et le taux de recouvrement est fixé à 40%). Le pricing du CDO est fait par Monte Carlo avec 1 million de simulations. Pour calculer la corrélation implicite, on utilise l'approximation Back-To-Normal.

<sup>5</sup>Cette propriété est d'autant plus vérifiée que le portefeuille est homogène.

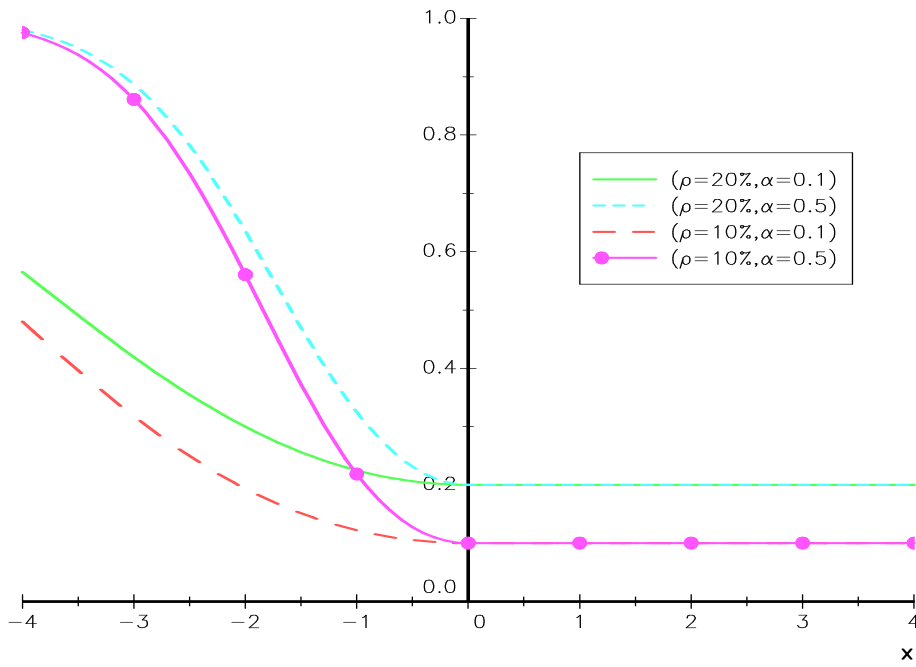


FIG. 5 – Fonction de corrélation locale  $\rho(x) = \beta^2(x)$

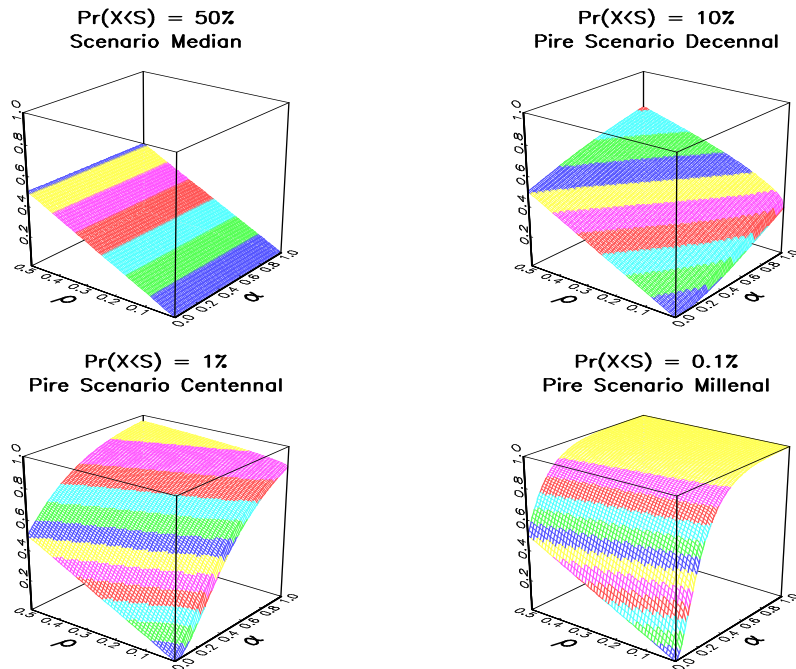


FIG. 6 – Corrélation locale et probabilité de scénario

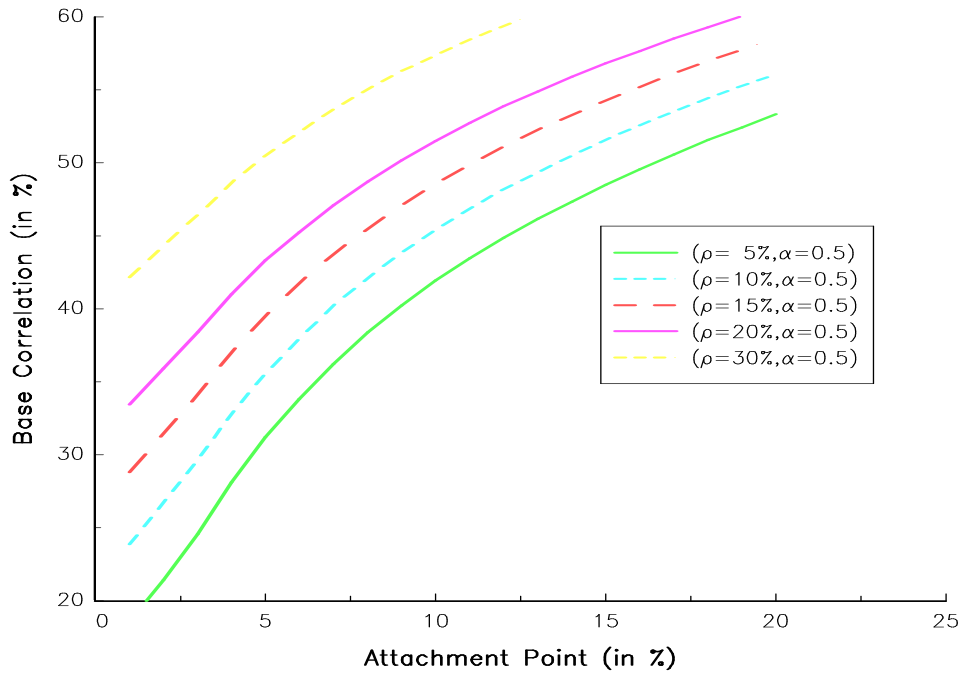


FIG. 7 – Skew de corrélation (influence du paramètre  $\rho$ )

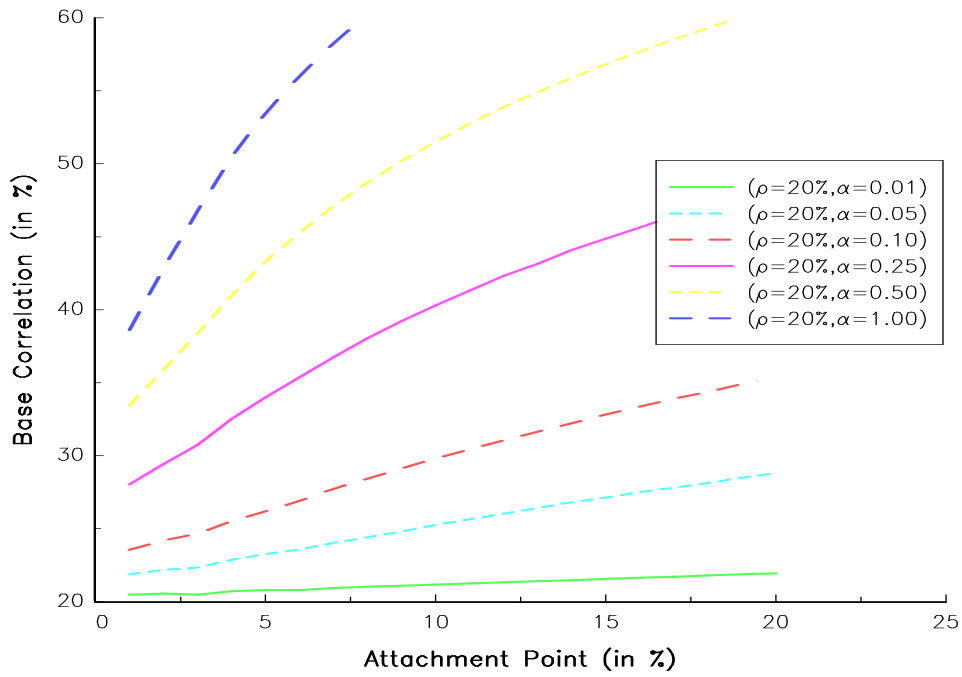


FIG. 8 – Skew de corrélation (influence du paramètre  $\alpha$ )



## 6 Illustration basée sur l'indice *European iTraxx*

On considère l'indice *European iTraxx* de JP Morgan. On représente la “base” corrélation pour différentes maturités et dates sur les graphiques 9 et 10.

On cherche à calibrer le modèle précédent – c'est-à-dire le couple  $(\rho, \alpha)$  – pour la corrélation 5Y du 14 juin 2005. Le graphique 11 présente plusieurs skew de corrélation du modèle. On remarque que les skew théoriques les plus proches de celui observé correspondent à un jeu de paramètre où  $\rho$  est très petit et  $\alpha$  relativement élevé. On a finalement retenu  $\rho = 0.5\%$  et  $\alpha = 0.6$  (voir le graphique 12). On remarque sur le graphique 13 que ce modèle correspond à une distribution du facteur commun “normalisé” très asymétrique avec une queue épaisse gauche très épaisse. Pour information, les courbes en rouge correspondent au modèle de copule Normale.

**Remarque 5.** *N'ayant pas la composition de l'indice *European iTraxx*, on a utilisé un portefeuille homogène de 100 noms avec un spread égal à 100 bp et un taux de recouvrement fixé à 40%. Ceci peut expliquer que l'on a quelques difficultés pour calibrer parfaitement le skew de corrélation.*

On peut en déduire les conclusions suivantes :

1. le marché considère un cycle économique asymétrique ;
2. la cause des défauts est principalement idiosyncratique, c'est-à-dire que les défauts sont indépendants ;
3. dans le cas où le cycle économique est très bas, la contagion des défauts est parfaite.

Ces conclusions nous permettent d'en déduire d'autres fonctions copules qui devraient calibrer le skew de marché. L'idée est de considérer une copule asymétrique avec une forte dépendance pour les événements extrêmes et une complète indépendance dans les autres cas. Par exemple, le graphique 14 correspond à une somme ordinale de deux fonctions copules<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>On découpe l'hypercube en deux hypercubes et on considère une fonction copule différente pour chaque hypercube.

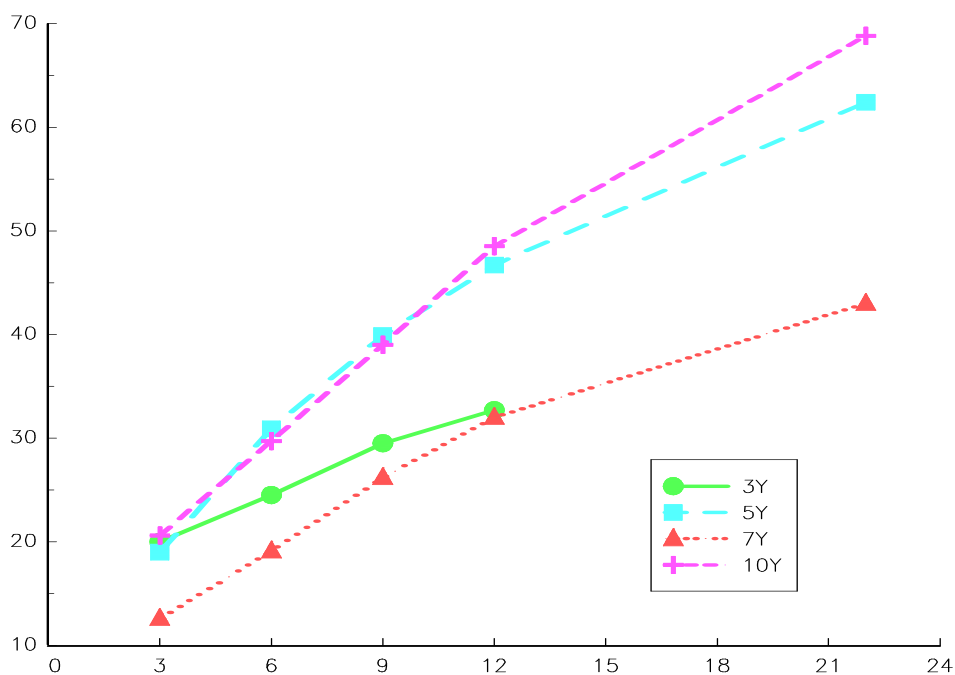


FIG. 9 – Base corrélation du 14/06/2005 pour différentes maturités

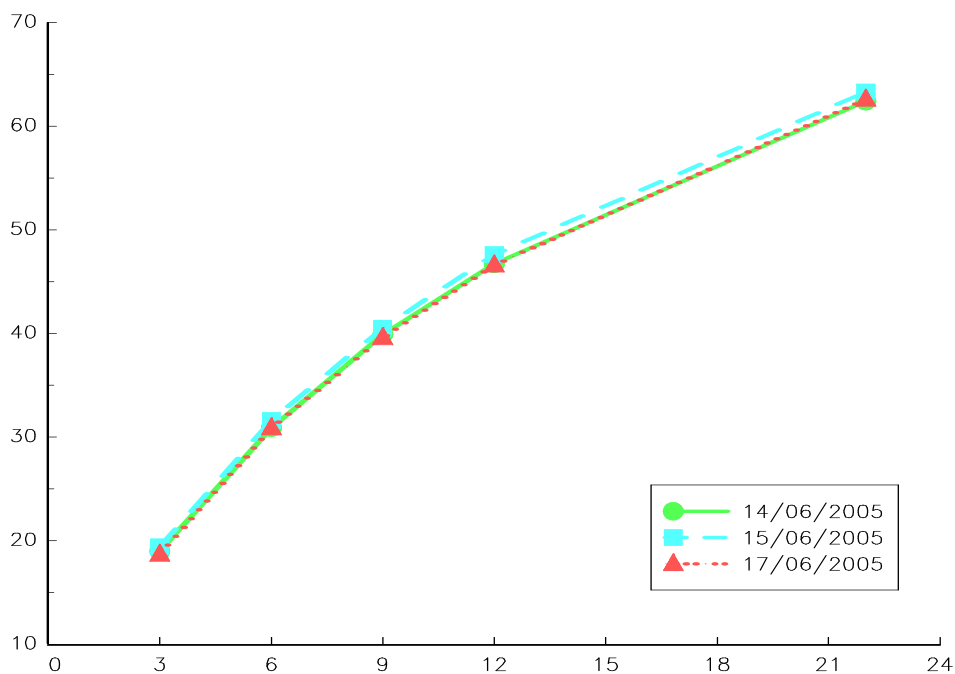


FIG. 10 – Base corrélation 5Y pour différentes dates

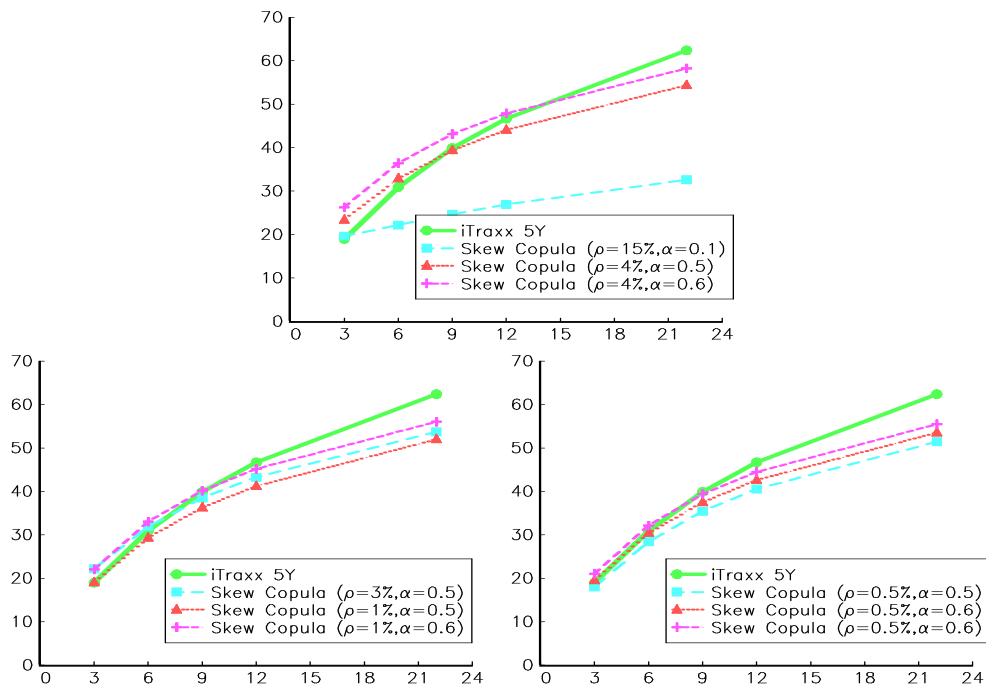


FIG. 11 – Calibration du skew de corrélation du 14/06/2005 (I)

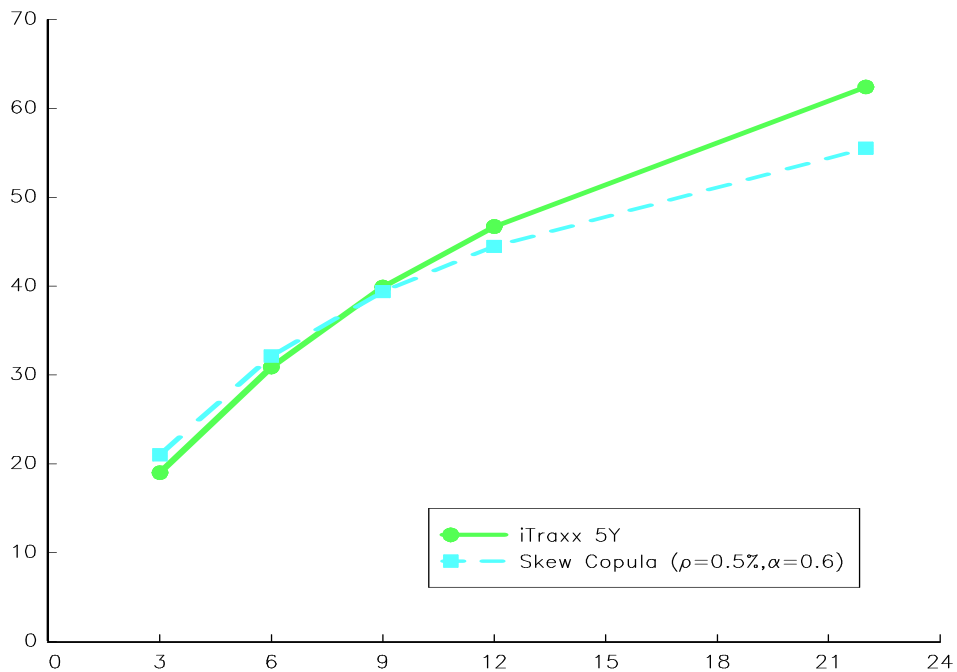


FIG. 12 – Calibration du skew de corrélation du 14/06/2005 (II)

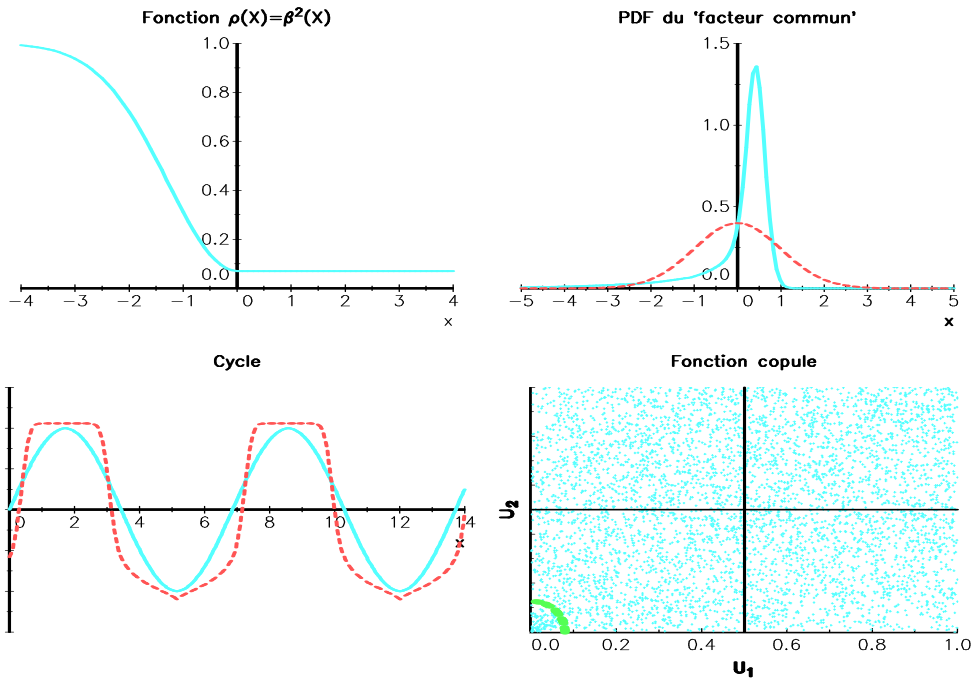


FIG. 13 – Quelques propriétés de la corrélation locale du 14/06/2005

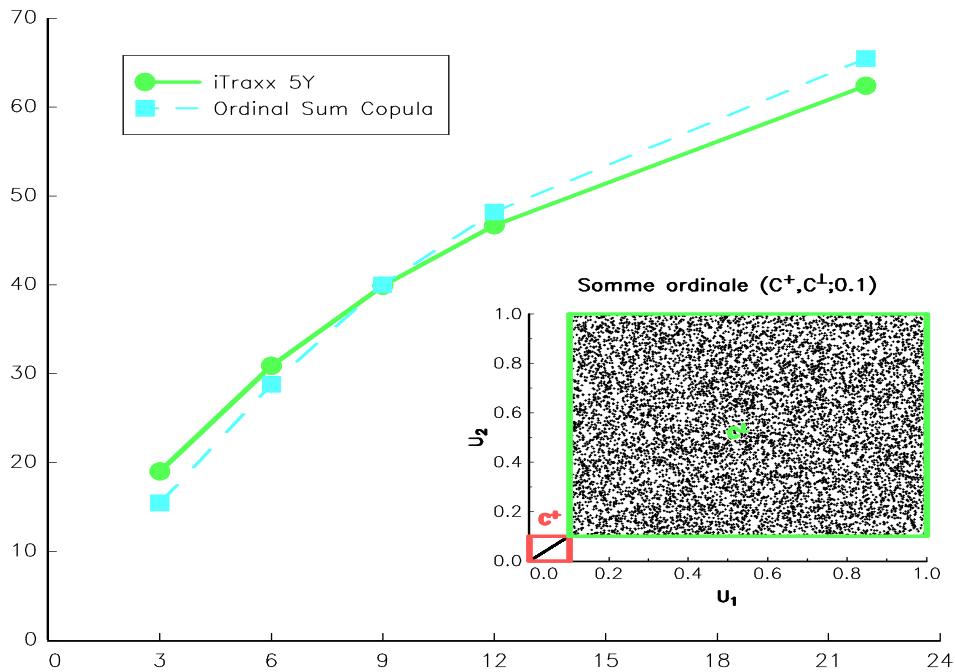


FIG. 14 – Calibration du skew de corrélation avec une somme ordinale de copules

## Annexes

### A Aspects techniques d'implémentation du modèle

On reprend le modèle factoriel donné par l'équation (2) et on considère la normalisation suivante :

$$Z_i^* = \frac{Z_i - m_Z}{\sigma_Z}$$

avec

$$m_Z = \mathbb{E}[Z_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x) x \phi(x) dx$$

et

$$\sigma_Z^2 = \text{var}[Z_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \beta^2(x) + \beta^2(x) x^2) \phi(x) dx - m_Z^2$$

On remarque que la distribution de la variable latente  $Z_i^*$  est :

$$F^*(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{m + \sigma z - \beta(x) x}{\sqrt{1 - \|\beta(x)\|^2}}\right) \phi(x) dx$$

Pour simuler les temps de défaut corrélés, on procède par inversion des variables aléatoires  $U_i = F^*(Z_i)$ .

**Remarque 6.** On calcule  $m_Z$ ,  $\sigma_Z$  et  $F^*(z)$  par intégration numérique (par exemple avec une quadrature de Gauss-Legendre<sup>7</sup>). Pour  $F^*(z)$ , on considère une grille finie  $(z_k)$ . Pour  $z \in (z_k, z_{k+1})$ , on procède par interpolation. On peut utiliser une interpolation linéaire ou une interpolation Gaussienne pour être cohérent avec le modèle Gaussien.

**Remarque 7.** La simulation des variables aléatoires  $U_i$  prend beaucoup de temps. Comme dans le cas des générateurs de type Sobol, il est préférable de stocker les nombres aléatoires et de les appeler au moment du pricing.

**Remarque 8.** La calibration du skew de corrélation dépend de la forme paramétrique  $\beta(x)$ . L'idéal est d'avoir une fonction à deux paramètres avec un des paramètres qui permet de contrôler le niveau et l'autre paramètre qui permet de modéliser la pente du skew.

<sup>7</sup>L'ordre est d'autant plus élevé que la perturbation est importante.

## B Compléments

La prise en compte d'une sensibilité qui dépend du facteur peut être rapproché d'une autre approche appelée "approche conditionnelle des scénarios". Dans ce cas, on ne valorise plus le prix de la tranche en considérant l'ensemble des états futurs du cycle, mais seulement une partie.

La méthode la plus simple consiste à considérer les scénarios  $\Omega$  tels que le cycle est plus bas qu'un scénario  $S$ . Dans ce cas, nous avons :

$$\mathbb{E}[L \mid K_- \leq L < K_+] = \mathbb{E}_X[L(X) \mid K_- \leq L < K_+, X \leq S]$$

On a repris les exemples précédents afin de calibrer le scénario  $S$  implicite au skew de corrélation et d'en déduire la probabilité  $\Pr\{X \leq S\}$ . Les résultats sont présentés sur le graphique 15.

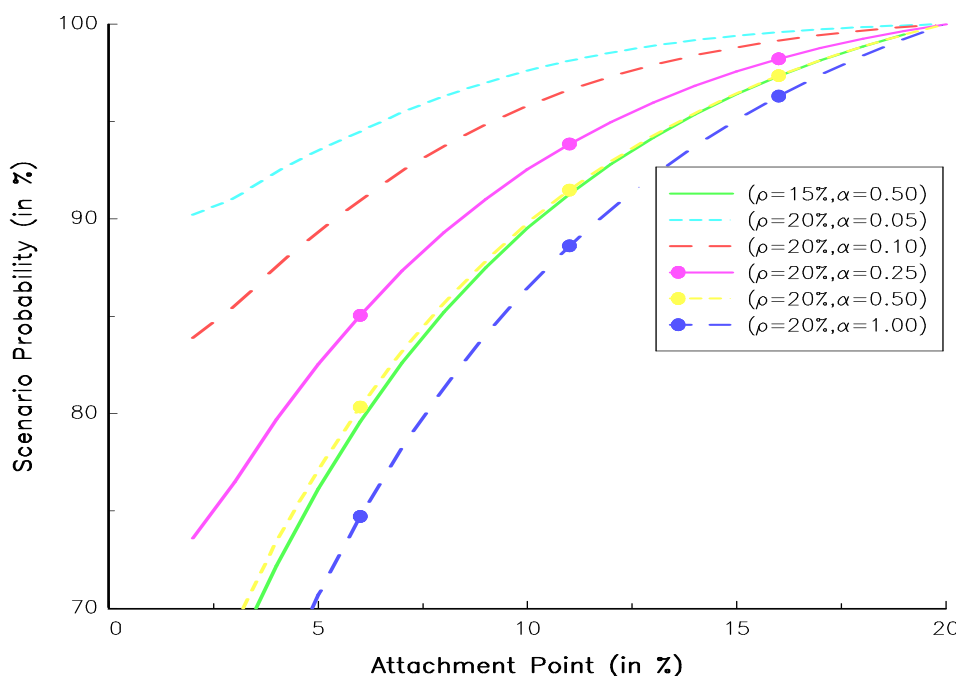


FIG. 15 – Scénarios implicites au skew de corrélation

**Remarque 9.** *En fait, on cherche à déterminer un ensemble  $\Omega$  qui ne dépend pas du point d'attachement (ce qui n'est pas le cas du graphique précédent).*