

# **Gestion des Risques Multiples**

ou

**Copules et Aspects Multidimensionnels du Risque**

**Cours ENSAI de 3<sup>ème</sup> année**

**Thierry RONCALLI**

Notes de cours écrites avec la collaboration de Nicolas Baud et Jean-Frédéric Jouanin

Groupe de Recherche Opérationnelle  
Crédit Lyonnais  
Bercy-Expo – Immeuble Bercy Sud – 4<sup>ème</sup> étage  
90, Quai de Bercy — 75613 Paris Cedex 12  
France

[thierry.roncalli@creditlyonnais.fr](mailto:thierry.roncalli@creditlyonnais.fr)

Février 2002



# Table des matières

Table des graphiques	ix
Table des procédures GAUSS	xii
Liste des documents distribués en cours	xiii
Introduction	1
<b>I Copules et Dépendance Stochastique</b>	<b>3</b>
<b>1 Représentation canonique d'une distribution de probabilité multidimensionnelle</b>	<b>5</b>
1.1 Théorème de Sklar	5
1.2 Expression de la densité bidimensionnelle	7
1.3 Propriétés des fonctions copules	10
1.4 Extension au cas multidimensionnel	11
1.5 Représentation graphique d'une copule	12
1.6 Repères historiques	15
<b>2 Les classes de Fréchet</b>	<b>19</b>
2.1 Définition	19
2.2 Ordre stochastique de concordance	22
2.3 Repères historiques	25
<b>3 Copules et variables aléatoires</b>	<b>27</b>
3.1 Principaux résultats	27
3.2 Composantes singulières	29
3.3 Mesures de dépendance	30
3.4 Et la corrélation ?	37
3.5 Le tau de Kendall et le rho de Spearman	39
3.6 Autres concepts de dépendance	47
3.7 La dépendance de queue ( <i>tail dependence</i> )	47
3.8 Repères historiques	52
<b>4 Les copules paramétriques</b>	<b>55</b>
4.1 Les copules Archimédiennes	55
4.2 La copule Normale	58

4.3	La copule <b>t</b> de Student . . . . .	61
4.4	Comparaison des copules Normale et Student . . . . .	68
4.5	Copules paramétriques bivariées avec plusieurs paramètres . . . . .	71
4.6	Repères historiques . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Les copules de valeurs extrêmes</b>	<b>75</b>
5.1	Théorie des valeurs extrêmes multiples . . . . .	75
5.1.1	Une introduction rapide . . . . .	75
5.1.2	Compléments mathématiques . . . . .	76
5.1.3	Le cas bivarié . . . . .	79
5.2	Caractérisation des domaines d'attraction . . . . .	80
5.3	L'exemple des copules Archimax . . . . .	82
5.4	Repères historiques . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Simulation et méthodes de Monte Carlo</b>	<b>85</b>
6.1	Simulation de variables aléatoires uniformes indépendantes . . . . .	85
6.2	La méthode des distributions . . . . .	86
6.3	La méthode des distributions conditionnelles . . . . .	89
6.4	Les méthodes dites analytiques . . . . .	95
6.5	La méthode des quantiles empiriques . . . . .	96
6.6	Repères historiques . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Inférence statistique des copules</b>	<b>99</b>
7.1	La copule empirique de Paul Deheuvels . . . . .	99
7.2	L'identification d'une copule Archimédienne . . . . .	107
7.3	La méthode des moments . . . . .	108
7.4	La méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	110
7.5	La méthode IFM . . . . .	111
7.6	L'estimateur omnibus . . . . .	112
7.7	Repères historiques . . . . .	118
<b>II</b>	<b>Aspects Multidimensionnels du Risque</b>	<b>121</b>
<b>8</b>	<b>Le problème de l'agrégation de (et dans) la valeur en risque</b>	<b>123</b>
8.1	L'effet de diversification . . . . .	123
8.2	L'influence de la dépendance dans la VaR marché . . . . .	126
8.3	Construire une VaR marché semi-historique . . . . .	129
8.4	Calcul de la charge en capital pour le risque opérationnel . . . . .	132
<b>9</b>	<b>Construction et évaluation de scénarios de crise</b>	<b>137</b>
9.1	Le cas unidimensionnel . . . . .	137
9.2	Le cas bidimensionnel . . . . .	141
9.3	Le cas multidimensionnel . . . . .	142
<b>10</b>	<b>Modélisation des survies multidimensionnelles</b>	<b>147</b>
10.1	Copules de survie et fonction de survie multivariée . . . . .	147
10.2	Les copules Frailty . . . . .	150
10.3	Inférence statistique . . . . .	151
10.4	Les modèles de compétition de risques . . . . .	151
<b>11</b>	<b>Application au risque de crédit</b>	<b>157</b>
11.1	Le modèle <b>CreditMetrics</b> . . . . .	157
11.1.1	La distribution de probabilité de transition . . . . .	157
11.1.2	Etude du cas bivarié . . . . .	159
11.1.3	Simulation de changements de rating . . . . .	164
11.1.4	Simulation de trajectoires dynamiques de rating . . . . .	167
11.1.5	Calcul de la valeur en risque . . . . .	167

11.1.6	Procédures GAUSS . . . . .	167
11.2	La copule implicite du modèle <b>CreditRisk+</b> . . . . .	178
11.2.1	Fonction de dépendance avec un facteur commun de risque . . . . .	178
11.2.2	Fonction de dépendance avec différents facteurs de risque . . . . .	180
11.3	L'approche par processus d'intensité . . . . .	181
<b>12</b>	<b>Risque de modèle et risque de paramètre</b>	<b>185</b>
 <b>Annexes</b>		<b>189</b>
<b>A</b>	<b>Hoeffding revisited</b>	<b>189</b>
<b>B</b>	<b>The uniform representation of Kimeldorf and Samson</b>	<b>193</b>
<b>C</b>	<b>The dependence function of Paul Deheuvels</b>	<b>199</b>
<b>D</b>	<b>Markov Operators and Copulas</b>	<b>201</b>
D.1	The characterizations of Brown and Ryff . . . . .	201
D.2	The isomorphism of Olsen, Darsow and Nguyen . . . . .	203
D.3	The Markov algebra $(\mathcal{C}, *)$ and its extreme points . . . . .	205
D.4	Uniform convergence versus strong convergence . . . . .	207
<b>E</b>	<b>Copulas and markov processes</b>	<b>213</b>
E.1	The Chapman-Kolmogorov equation and the $*$ product . . . . .	213
E.2	The Markov property and the $\star$ product . . . . .	215
E.3	Properties of some Markov copulas . . . . .	216
E.3.1	The Brownian copula . . . . .	216
E.3.2	The Ornstein-Uhlenbeck copula . . . . .	216
E.3.3	The Relected Brownian copula . . . . .	217
E.4	Backward and forward Kolmogorov equations . . . . .	218



# Table des figures

1	Roger Nelsen . . . . .	1
1.1	Berthold Schweizer . . . . .	5
1.2	Un exemple de distribution bivariee avec des marges donnees . . . . .	10
1.3	Distribution de la copule <b>Logistic Gumbel</b> . . . . .	12
1.4	Courbes $w = \mathbf{C}(u_1, u_2)$ pour des valeurs donnees de $u_2$ . . . . .	13
1.5	Lignes de niveau de la distribution de la copule <b>Logistic Gumbel</b> . . . . .	13
1.6	Densite des copules <b>Logistic Gumbel</b> et <b>Normale</b> . . . . .	14
1.7	Courbes de niveau des densites des copules <b>Logistic Gumbel</b> et <b>Normale</b> . . . . .	14
2.1	Maurice Fréchet . . . . .	19
2.2	Les trois copules $\mathbf{C}^-$ , $\mathbf{C}^\perp$ et $\mathbf{C}^+$ . . . . .	22
2.3	La region triangle contenant les lignes de niveau $\mathbf{C}(u_1, u_2) = \alpha$ . . . . .	23
2.4	Copules de <b>Frank</b> et ordre de concordance . . . . .	24
3.1	Mesure de singularite de la copule <b>Marshall-Olkin</b> . . . . .	30
3.2	Support, fonction de repartition et fonction quantile de la variable aleatoire $\xi$ . . . . .	31
3.3	Support des differentes copules et distributions . . . . .	31
3.4	Support de la distribution du vecteur aleatoire $(\xi_1, \xi_2)$ lorsque la copule est <b>Marshall-Olkin</b> . . . . .	32
3.5	Supports de la copule <b>Marshall-Olkin</b> correspondants aux courbes <b>(a)</b> , <b>(b)</b> et <b>(c)</b> du graphique 3.4 . . . . .	32
3.6	Mesures de dependance $\sigma$ et $\Phi^2$ pour la copule <b>Normale</b> . . . . .	37
3.7	Intervalle de correlation $[\rho^-, \rho^+]$ lorsque $(S_1(t), S_2(t))$ est un processus <b>GBM</b> bidimensionnel . . . . .	39
3.8	Courbes de niveau de densites bivariees (copule <b>Normale</b> ) . . . . .	44
3.9	Courbes de niveau de densites bivariees (copule <b>Frank</b> ) . . . . .	44
3.10	Courbes de niveau de densites bivariees (copule <b>Gumbel</b> ) . . . . .	45
3.11	Region atteignable des statistiques $(\tau, \varrho)$ . . . . .	46
3.12	Mesures de dependance $\lambda_U(\alpha)$ et $\lambda_L(\alpha)$ . . . . .	51
3.13	Comparaison des dependances de queues des copules <b>Gumbel</b> et <b>Clayton</b> . . . . .	52
4.1	Christian Genest . . . . .	55
4.2	Mesure de dependance $\lambda_U(\alpha)$ de la copule <b>Normale</b> . . . . .	62
4.3	Diagramme $(\tau, \varrho)$ de la copule <b>Student</b> . . . . .	65
4.4	Mesure de dependance $\lambda_U(\alpha)$ de la copule <b>Student</b> ( $\nu = 1$ ) . . . . .	67
4.5	Mesure de dependance $\lambda_U(\alpha)$ de la copule <b>Student</b> ( $\nu = 4$ ) . . . . .	67
4.6	Mesure de dependance $\lambda$ de la copule <b>Student</b> — relation entre $\nu$ et $\lambda$ . . . . .	68
4.7	Mesure de dependance $\lambda$ de la copule <b>Student</b> — relation entre $\rho$ et $\lambda$ . . . . .	69
4.8	Mesure de dependance $\lambda$ de la copule <b>Student</b> — parametre implicite $\rho$ . . . . .	69

4.9	Régression quantile (copules Normale et Student avec $\rho = 0.25$ et $\nu = 1$ ) . . . . .	71
4.10	Régression quantile (copules Normale et Student avec $\rho = -0.75$ et $\nu = 1$ ) . . . . .	72
4.11	Régression quantile (copules Student avec $\rho = 0.25$ , $\nu = 2$ et $\nu = 5$ ) . . . . .	72
5.1	Exemples de distribution de valeurs extrêmes bivariées . . . . .	77
6.1	Simulation de 4 distributions (générateur LCG) . . . . .	87
6.2	Simulation de 4 distributions (générateur SOBOL) . . . . .	88
6.3	Simulation de la copule Normale . . . . .	88
6.4	Simulation de la copule Student ( $\nu = 1$ ) . . . . .	90
6.5	Simulation de 4 distributions avec une copule Student ( $\rho = 0.5$ , $\nu = 1$ ) . . . . .	90
6.6	Comparaison des copules Normale et Student . . . . .	91
6.7	Simulation des copules Normale, Student, Frank et Gumbel (marges uniformes) . . . . .	94
6.8	Simulation des copules Normale, Student, Frank et Gumbel (marges $t_3$ ) . . . . .	95
6.9	Convergence de la méthode des quantiles empiriques vers la méthode des distributions . . . . .	97
6.10	Une distribution bivariee dont les marges sont $\mathcal{N}(0, 1) + \Gamma(1, 2)$ et $\mathcal{N}(0, 1) \times \Gamma(1, 2)$ . . . . .	98
7.1	Comparaison de la copule empirique et de la copule Normale associée à la distribution normale bivariée . . . . .	102
7.2	Dépendogramme des rendements (AL,AL-15) . . . . .	104
7.3	Dépendogramme des simulations de la copule Normale de paramètre 0.8192 . . . . .	104
7.4	Ellipses de covariance de la copule Normale . . . . .	105
7.5	Observations en dehors de l'ellipse de covariance à 90% . . . . .	106
7.6	$QQ$ -plot de $\alpha$ et $q(\alpha)$ . . . . .	106
7.7	Comparaison de $\hat{\mathbf{K}}(u)$ et $\mathbf{K}(u)$ pour les données (AL,CU) . . . . .	108
7.8	Courbes de niveau de densités bivariées (copule Normale) . . . . .	117
7.9	Lignes de niveau de la densité de la copule $\gamma$ -Frank avec $\gamma(x) = h(x)$ ( $\theta_1 = 1$ , $\theta_2 = 0.025$ ) . . . . .	118
8.1	Fonction $\varpi(x)$ pour différentes fonctions $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ . . . . .	124
8.2	VaR( $X_1 + X_2; \alpha$ ) lorsque $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , $X_2 \sim t_3$ et $\mathbf{C}(X_1, X_2)$ est une copule Normale . . . . .	125
8.3	Comparaison de la mesure VaR( $X_1 + X_2; 99\%$ ) (copules Normale et $t_1$ ) . . . . .	126
8.4	Impact de la fonction de dépendance sur la distribution de la perte totale . . . . .	135
8.5	Impact du paramètre $\rho$ sur la charge en capital . . . . .	135
9.1	Distribution GEV des minimums . . . . .	138
9.2	Distribution GEV des maximums . . . . .	139
9.3	Zone de défaillance pour le couple (CAC40,DowJones) et un temps de retour de 5 ans . . . . .	142
10.1	Density function of order statistics $T_{i:n}$ — Graphique 10 de GEORGES et al. [2001] . . . . .	154
11.1	Probabilités de défaillance jointe à un an (en %) . . . . .	160
11.2	Probabilités de défaillance jointe à cinq ans (en %) . . . . .	161
11.3	Corrélation discrète de défaillance $\rho_D(C_1, C_2)$ . . . . .	162
11.4	Odds ratio $\theta_D(C_1, C_2)$ . . . . .	162
11.5	Probabilités de défaillance jointe à un an (en %) . . . . .	163
11.6	Probabilités de défaillance jointe à cinq ans (en %) . . . . .	163
11.7	Probabilités de défaillance jointe à cinq ans (en %) pour des portefeuilles de 4 crédits . . . . .	164
11.8	Simulation de cinq trajectoires 30 ans (matrice de paramètres $\rho_1$ ) . . . . .	168
11.9	Simulation de cinq trajectoires 30 ans (matrice de paramètres $\rho_1$ ) . . . . .	169
11.10	Simulation de cinq trajectoires 30 ans (matrice de paramètres $\rho_2$ ) . . . . .	169
11.11	Simulation de cinq trajectoires 30 ans (matrice de paramètres $\rho_2$ ) . . . . .	170
11.12	Simulation de cinq trajectoires 90 ans (matrice de paramètres $\rho_2$ ) . . . . .	170
A.1	Wassily Hoeffding . . . . .	189
A.2	The contour lines of the Normal standardized density (HOEFFDING [1940]) . . . . .	191
B.1	Support of the distribution of $(U_3, V_3)$ (KIMELDORF and SAMPSON [1978]) . . . . .	196
B.2	Illustration of the convergence to the product copula $\mathbf{C}^\perp$ . . . . .	196

D.1	Quasi-random bivariate uniform numbers generated by $T_{200}$	208
D.2	Pseudo-random bivariate uniform numbers generated by $T_{200}$	208



# Table des procédures **GAUSS**

1	Distribution et densité de la copule <b>Gumbel-Barnett</b> . . . . .	8
2	Distribution et densité de la copule <b>Normale</b> . . . . .	9
3	Distribution, densité et courbes de niveau de la copule <b>Logistic Gumbel</b> . . . . .	15
4	Fonction de distribution des trois copules <b>C<sup>-</sup></b> , <b>C<sup>⊥</sup></b> et <b>C<sup>+</sup></b> . . . . .	21
5	Distribution, densité et courbes de niveau de la copule <b>Frank</b> . . . . .	24
6	Distribution de la copule <b>FGM</b> . . . . .	25
7	Calcul du tau de Kendall par intégration numérique . . . . .	33
8	Calcul du rho de Spearman par intégration numérique . . . . .	35
9	Calcul du coefficient de Gini par intégration numérique . . . . .	35
10	Calcul numérique de $\sigma$ et $\Phi^2$ . . . . .	36
11	Distribution et densité de la copule <b>Gumbel</b> . . . . .	40
12	Distribution des copules <b>Clayton</b> et <b>AMH</b> . . . . .	40
13	Calcul analytique des $\tau$ et $\rho$ de certaines copules . . . . .	41
14	Distributions des copules <b>Plackett</b> , <b>Galambos</b> et <b>Hüsler-Reiss</b> . . . . .	45
15	Bornes $\mathcal{B}(\tau, \rho)$ . . . . .	46
16	Dépendances quantile-quantile upper et lower . . . . .	51
17	Distribution et densité de la copule <b>Normale</b> . . . . .	58
18	Distribution et densité de la copule <b>Student</b> . . . . .	63
19	Calcul numérique des $\tau$ et $\rho$ de de la copule <b>Student</b> . . . . .	64
20	Régression quantile des copules <b>Normale</b> et <b>Student</b> . . . . .	70
21	Générateurs <b>LCG</b> et <b>SOBOL</b> de nombres aléatoires uniformes et gaussiens . . . . .	85
22	Simulation de la copule <b>Normale</b> . . . . .	86
23	Simulation de la copule <b>Student</b> . . . . .	87
24	Simulation de la copule <b>Frank</b> . . . . .	91
25	Simulation d'une copule bivariable par la méthode des distributions conditionnelles . . . . .	92
26	Simulation de la copule <b>Gumbel</b> (première version) . . . . .	93
27	Simulation de la copule <b>Gumbel</b> (deuxième version) . . . . .	93
28	Simulation de la copule <b>Clayton</b> . . . . .	95
29	Simulation de la distribution multidimensionnelle <b>F</b> par la méthode des quantiles empiriques . . . . .	96
30	Distribution de la copule empirique ( $n = 2$ ) . . . . .	100
31	Dépendogramme de la copule empirique . . . . .	102
32	Ellipse de covariance de la copule <b>Normale</b> . . . . .	105
33	Calcul de $\hat{\mathbf{K}}(u)$ . . . . .	107
34	Estimateur du tau de Kendall . . . . .	109
35	Estimateur du rho de Spearman . . . . .	109
36	Estimation de la matrice $\rho$ des paramètres de la copule <b>Normale</b> . . . . .	113
37	Estimation de la matrice $\rho$ des paramètres de la copule <b>Student</b> . . . . .	113

38	Calcul numérique de la densité d'une copule . . . . .	115
39	Calcul de la valeur en risque gaussienne . . . . .	129
40	Calcul de la valeur en risque historique . . . . .	130
41	Calcul de la valeur en risque semi-historique (copule Normale) . . . . .	131
42	Calcul de la valeur en risque semi-historique (copule Student) . . . . .	131
43	Simulation de $\vartheta_1$ et $\vartheta_2$ avec une copule Normale ( $\zeta_1 \sim \mathcal{LN}(\mu_1, \sigma_1)$ , $\zeta_2 \sim \mathcal{LN}(\mu_2, \sigma_2)$ , $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $N_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ ) . . . . .	134
44	Distribution GEV . . . . .	137
45	Estimation ML des paramètres de la distribution GEV . . . . .	140
46	Distribution et densité de la copule $\mathbf{C}^{\mathbb{N}}$ . . . . .	142
47	Distribution de la copule de survie $\check{\mathbf{C}}$ . . . . .	148
48	Distribution des statistiques d'ordre $\mathbf{F}_{i:n}(t)$ . . . . .	152
49	Procédures de gestion des matrices de transition . . . . .	167
50	Procédure de mapping $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^*$ et $\mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}$ . . . . .	172
51	Calcul de la fonction de probabilités $\pi(s, i; t, j)$ . . . . .	173
52	Calcul de la distribution de probabilités $\Pi(s, i; t, j)$ . . . . .	174
53	Calcul de la matrice des probabilités $\pi(i_1, i_2; j_1, j_2)$ . . . . .	175
54	Calcul des mesures de dépendance $\rho_{\mathbf{D}} \langle C_1, C_2 \rangle$ et $\theta_{\mathbf{D}} \langle C_1, C_2 \rangle$ . . . . .	176
55	Simulation de changements de rating . . . . .	177
56	Simulation de trajectoires de rating . . . . .	177

# Liste des documents distribués en cours

1. JOUANIN, J-F., G. RAPUCH, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2001], Modelling dependence for credit derivatives with copulas, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
2. SCHMIDT, W. et I. WARD [2002], Pricing default baskets, *Risk*, 111-114, January
3. WANG, S.S. [1999], Aggregation of correlated risk portfolios : models & algorithms, CAS Committee on Theory of Risk, *preprint*



# Introduction

Ce cours est consacré aux aspects multidimensionnels du risque. Je suppose donc que les aspects unidimensionnels sont connus. Le problème concerne alors la dépendance des facteurs. Pour cela, nous utiliserons les copules qui sont un outil parfaitement adapté à ce type de problématique.

Pour des raisons de temps, il m'est difficile d'aborder de façon exhaustive les différents sujets. De même, je considère qu'un cours théorique sur les copules n'a pas de sens. Il existe tellement de cours sur la gestion des risques qui n'ont aucun lien (ou si peu) avec les applications professionnelles ou les futures applications professionnelles. C'est pourquoi j'ai privilégié les aspects numériques (aspects qui sont souvent passés sous silence, et qui sont pourtant essentiels pour un professionnel) en relation avec les applications financières.



Graphique 1. Roger Nelsen

Les aspects mathématiques des copules sont présentés dans l'excellent ouvrage de NELSEN [1999]. Roger Nelsen, qui est professeur de mathématiques au département des sciences mathématiques de Lewis & Clark College à Portland, est l'un des chercheurs les plus intéressants dans ce champ de recherche. **Le cours s'inspire très largement de son livre.** Il est difficile d'écrire quelque chose d'original sur le sujet. Néanmoins, par rapport à NELSEN [1999], j'adopterai une vision plus 'historique' du développement des copules. C'est l'occasion de parler des gens qui ont véritablement compté. Bien sûr, j'évoquerai Abe Sklar, Berthold Schweizer, Maurice Fréchet, Giorgio Dall'Aglio, Christian Genest ou Roger Nelsen, mais aussi des noms moins connus (par les financiers qui travaillent sur les copules, mais ce sont tous de très grands statisticiens) : Wassily Hoeffding, Georges Kimmeldorf, Allan Sampson, Paul Deheuvels, Elwood Olsen, William Darsow, Richard Vitale, etc.

Concernant les ouvrages/références que nous utiliserons en cours, je mentionne bien sûr NELSEN [1999], mais aussi JOE [1997] ainsi que HUTCHINSON et LAI [1990]. La plupart des applications financières sont issues des travaux de recherche du Groupe de Recherche Opérationnelle (GRO, Crédit Lyonnais). Ils sont disponibles à l'adresse internet :

[http://gro.creditlyonnais.fr/content/rd/home\\_copulas.htm](http://gro.creditlyonnais.fr/content/rd/home_copulas.htm)

L'annexe E a été rédigée avec la collaboration précieuse de Jean-Frédéric Jouanin. Nicolas Baud a participé à la programmation des méthodes de Monte Carlo (chapitre 6) et à la rédaction du chapitre 8 sur la valeur en risque.

Une partie du cours se déroule en salle informatique avec le logiciel **GAUSS**. Pour accéder à l'ensemble des procédures, vous devez activer la bibliothèque **COPULA** avec l'instruction suivante :

```
library copula;
```

Certaines procédures font appel à la bibliothèque d'optimisation **OPTMUM** et à la bibliothèque **MVT**. Dans ce cas, il est nécessaire de modifier la ligne de commande (la bibliothèque **MVT** est intégrée dans la bibliothèque **COPULA**) :

```
library copula,optmum;
```

Les procédures de la bibliothèque **COPULA** sont dans le répertoire `copula`. Les programmes utilisés pour ces notes de cours sont dans le répertoire `gdrm`. Ainsi, les fichiers `chap1-*.prg` correspondent aux programmes du premier chapitre, les fichiers `chap2-*.prg` correspondent aux programmes du second chapitre, etc. Concernant les annexes, les noms des programmes sont de la forme `app1-*.prg`, `app2-*.prg`, etc.

## Références

- [1] JOE, H. [1997], Multivariate Models and Dependence Concepts, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, **73**, Chapman & Hall, London
- [2] HUTCHINSON, T. P. et C.D. LAI [1990], Continuous Bivariate Distributions, Emphasising Applications, Rumbsey Scientific Publishing, Adelaide
- [3] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, *Lectures Notes in Statistics*, **139**, Springer Verlag, New York

Première partie

# Copules et Dépendance Stochastique

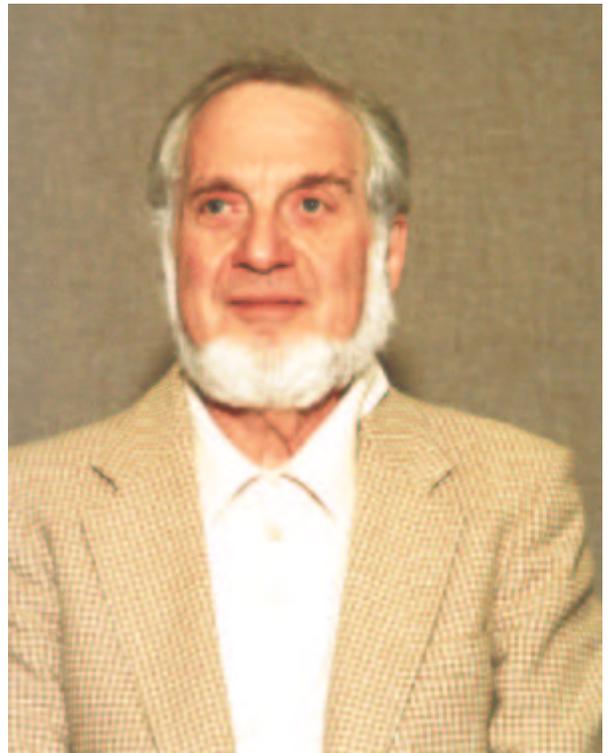


# 1

## Représentation canonique d'une distribution de probabilité multidimensionnelle

Le concept de copule a été introduit par Sklar en 1959 pour résoudre un problème de probabilité énoncé par Maurice Fréchet. A l'époque, Abe Sklar et Berthold Schweizer travaillent sur les travaux de Karl Menger concernant les espaces métriques aléatoires (**Probabilistic Metric Space** ou PMS), qui sont une généralisation de l'espace métrique usuel introduit par Fréchet en 1906. Même si les copules occupent une place importante dans l'œuvre de Sklar et Schweizer, elles ne sont pas l'objet central de leurs recherches. L'utilisation des copules par Sklar et Schweizer est assez originale : elles interviennent pour résoudre certains problèmes et ne font pas l'objet véritablement d'études appropriées.

Pendant de nombreuses années, les copules sont peu (ou pas) utilisées en statistiques. Il y a les travaux sur la dépendance de Kimeldorf et Sampson dans les années 1975 ou encore les recherches de Paul Deheuvels à la fin des années 1970, mais il faut attendre le milieu des années 1980 pour que celles-ci fassent l'objet d'une étude systématique par quelques statisticiens. Le point de départ est bien sûr l'article *The joy of copulas* de GENEST et MACKKEY [1986] publié dans *The American Statistician*. Suivront de nombreux travaux de Christian Genest avec différents co-auteurs (MacKey, Louis-Paul Rivest,...). Maintenant, les copules sont un outil standard largement utilisé pour étudier la dépendance, les modèles de survie, etc.



Graphique 1.1. Berthold Schweizer

### 1.1 Théorème de Sklar

Une copule est un outil statistique relativement ancien introduit par SKLAR [1959].

**Définition 1** Une copule bidimensionnelle (ou 2-copula) est une fonction  $\mathbf{C}$  qui possède les propriétés suivantes :

1.  $\text{Dom } \mathbf{C} = [0, 1] \times [0, 1]$  ;
2.  $\mathbf{C}(0, u) = \mathbf{C}(u, 0) = 0$  et  $\mathbf{C}(u, 1) = \mathbf{C}(1, u) = u$  pour tout  $u$  dans  $[0, 1]$  ;

3.  $\mathbf{C}$  est 2-increasing :

$$\mathbf{C}(v_1, v_2) - \mathbf{C}(v_1, u_2) - \mathbf{C}(u_1, v_2) + \mathbf{C}(u_1, u_2) \geq 0 \quad (1.1)$$

pour tout  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ ,  $(v_1, v_2) \in [0, 1]^2$  tel que  $0 \leq u_1 \leq v_1 \leq 1$  et  $0 \leq u_2 \leq v_2 \leq 1$ .

Cette définition veut dire que  $\mathbf{C}$  est une distribution avec des marges uniformes. Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux variables aléatoires uniformes. Considérons le vecteur aléatoire  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ . Nous avons

$$\mathbf{C}(u_1, u_2) = \Pr \{U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2\} \quad (1.2)$$

Le support<sup>1</sup> de  $\mathbf{U}$  est donc le carré unité  $[0, 1]^2$ . La propriété  $\mathbf{C}(0, u) = \mathbf{C}(u, 0) = 0$  implique que

$$\Pr \{U_1 \leq 0, U_2 \leq u\} = \Pr \{U_1 \leq u, U_2 \leq 0\} = 0 \quad (1.3)$$

En anglais, on dit que  $\mathbf{C}$  est une fonction *grounded*. Les marges de la distribution jointe sont des marges uniformes.  $\mathbf{C}$  doit donc vérifier la condition suivante :

$$\Pr \{U_1 \leq 1, U_2 \leq u\} = \Pr \{U_1 \leq u, U_2 \leq 1\} = u \quad (1.4)$$

Enfin,  $\mathbf{C}$  est une distribution de probabilité, ce qui implique que

$$\Pr \{u_1 \leq U_1 \leq v_1, u_2 \leq U_2 \leq v_2\} = \mathbf{C}(v_1, v_2) - \mathbf{C}(v_1, u_2) - \mathbf{C}(u_1, v_2) + \mathbf{C}(u_1, u_2) \geq 0 \quad (1.5)$$

En anglais, la qualification de cette fonction est *2-increasing*.

**Remarque 1** Plus simplement, on dit que  $\mathbf{C}$  est une distribution uniforme multidimensionnelle.

**Exemple 1** Il est facile de montrer que  $\mathbf{C}^\perp(u_1, u_2) = u_1 u_2$  est une fonction copule. Considérons uniquement la propriété 2-increasing. Nous avons  $v_2 - u_2 \geq 0$  et  $v_1 \geq u_1$ . Nous en déduisons que

$$v_1(v_2 - u_2) \geq u_1(v_2 - u_2) \quad (1.6)$$

et

$$v_1 v_2 + u_1 u_2 - u_1 v_2 - v_1 u_2 \geq 0 \quad (1.7)$$

Soient  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  deux distributions de probabilité. Il est évident que  $\mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2))$  définit une distribution de probabilité bidimensionnelle  $\mathbf{F}(x_1, x_2)$  dont les marges sont données. En effet, nous savons que  $U_i = \mathbf{F}_i(X_i)$  définit une transformation uniforme<sup>2</sup> (*Probability Integral Transformation* ou **PIT**). De plus, nous vérifions que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(\infty)) &= \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), 1) \\ &= \mathbf{F}_1(x_1) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Les copules sont donc un outil très puissant pour construire des distributions multidimensionnelles dont les marges sont données (“**Distributions with Given Marginals**”).

SKLAR [1959] a prouvé un résultat encore plus intéressant :

**Théorème 1** Soit  $\mathbf{F}$  une fonction de distribution bidimensionnelle dont les marges sont  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$ . Alors  $\mathbf{F}$  admet une représentation copule :

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \quad (1.10)$$

La copule  $\mathbf{C}$  est unique si les marges sont continues. Sinon, seule la sous-copule est déterminée de façon unique sur  $\text{Ran } \mathbf{F}_1 \times \text{Ran } \mathbf{F}_2$ .

<sup>1</sup>Dans ce cours, j'utilise parfois le terme ‘support’ de façon abusive pour désigner la notion ‘range’ en anglais.

<sup>2</sup>Soit  $U = \mathbf{F}(X)$ . Le support de  $U$  est évidemment  $[0, 1]$ . Et nous vérifions que la distribution de  $U$  est uniforme :

$$\begin{aligned} \Pr \{U \leq u\} &= \Pr \{\mathbf{F}(X) \leq u\} \\ &= \Pr \{X \leq \mathbf{F}^{-1}(u)\} \quad (\text{car } \mathbf{F} \text{ est une fonction croissante}) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{F}^{-1}(u)) \\ &= u \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ce théorème est très important, puisque nous pouvons associer à chaque distribution bidimensionnelle une copule (qui peut être unique). Nous avons donc une représentation canonique de la distribution : d'un côté, nous avons les marges  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$ , c'est-à-dire les directions unidimensionnelles ; d'un autre côté, nous avons la copule qui permet de relier ces marges, elle exprime la dépendance entre les directions unidimensionnelles.

Le théorème de Sklar peut être utilisé pour construire des fonctions copules à partir des distributions bidimensionnelles.

**Exemple 2** *La distribution logistique bivariée de Gumbel est*

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_1} + e^{-x_2})^{-1} \quad (1.11)$$

définie sur  $\mathbb{R}^2$ . Nous pouvons montrer que les marges sont  $\mathbf{F}_1(x_1) \equiv \mathbf{F}(x_1, \infty) = (1 + e^{-x_1})^{-1}$  et  $\mathbf{F}_2(x_2) \equiv (1 + e^{-x_2})^{-1}$ . Les fonctions quantiles sont donc  $\mathbf{F}_1^{-1}(u_1) = \ln u_1 - \ln(1 - u_1)$  et  $\mathbf{F}_2^{-1}(u_2) = \ln u_2 - \ln(1 - u_2)$ . Nous en déduisons que la fonction copule est

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1, u_2) &= \mathbf{F}(\mathbf{F}_1^{-1}(u_1), \mathbf{F}_2^{-1}(u_2)) \\ &= \left(1 + \frac{1 - u_1}{u_1} + \frac{1 - u_2}{u_2}\right)^{-1} \\ &= \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Cette copule est appelée la copule logistique de Gumbel (*Gumbel Logistic copula*).

## 1.2 Expression de la densité bidimensionnelle

Si la distribution bivariée est absolument continue, alors elle admet une densité et nous avons

$$f(x_1, x_2) = c(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \times f_1(x_1) \times f_2(x_2) \quad (1.13)$$

avec  $c(u_1, u_2)$  la densité de la copule  $\mathbf{C}$ . Notons que la condition

$$\mathbf{C}(v_1, v_2) - \mathbf{C}(v_1, u_2) - \mathbf{C}(u_1, v_2) + \mathbf{C}(u_1, u_2) \geq 0 \quad (1.14)$$

est alors équivalente à la positivité de la densité

$$c(u_1, u_2) = \partial_{1,2}^2 \mathbf{C}(u_1, u_2) \geq 0 \quad (1.15)$$

lorsque celle-ci existe.

**Exemple 3** *Reprenons la copule logistique de Gumbel. L'expression de la densité est la suivante :*

$$c(u_1, u_2) = \frac{2u_1 u_2}{(u_1 + u_2 - u_1 u_2)^3} \quad (1.16)$$

Il est alors facile de vérifier la propriété 2-increasing.

**Exemple 4** *Considérons la famille des copules Gumbel-Barnett :*

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta) = u_1 u_2 \exp(-\theta \ln u_1 \ln u_2) \quad (1.17)$$

Nous vérifions que

$$\mathbf{C}(0, u; \theta) = \mathbf{C}(u, 0; \theta) = 0 \quad (1.18)$$

et

$$\mathbf{C}(1, u; \theta) = \mathbf{C}(u, 1; \theta) = u \exp(-\theta \ln u \ln 1) = u \quad (1.19)$$

L'expression de la densité est (voir l'équation (7) de BARNETT [1980]) :

$$c(u_1, u_2; \theta) = (1 - \theta - \theta(\ln u_1 + \ln u_2) + \theta^2 \ln u_1 \ln u_2) \exp(-\theta \ln u_1 \ln u_2) \quad (1.20)$$

Pour prouver que  $\mathbf{C}$  est une copule, nous devons prouver que

$$g(\theta) = \theta^2 \ln u_1 \ln u_2 - \theta(1 + \ln u_1 + \ln u_2) + 1 \geq 0 \quad (1.21)$$

pour tout  $(u_1, u_2)$  dans  $[0, 1]^2$ . Il est facile de montrer que le minimum de  $g(\theta)$  est atteint lorsque  $u_1$  et  $u_2$  tendent vers zéro. Dans ce cas, nous avons

$$\lim_{u_1 \rightarrow 0^+, u_2 \rightarrow 0^+} \theta^2 \ln u_1 \ln u_2 - \theta(1 + \ln u_1 + \ln u_2) + 1 = 0^+ \quad (1.22)$$

### Code GAUSS 1 (Distribution et densité de la copule Gumbel-Barnett)

```

/*
**> cdfCopulaGumbelBarnett
**
*/

proc cdfCopulaGumbelBarnett(u1,u2,theta);
  u1 = miss(u1,0); u2 = miss(u2,0);
  retp( u1 .* u2 .* exp(-theta .* ln(u1) .* ln(u2)) );
endp;

/*
**> pdfCopulaGumbelBarnett
**
*/

proc pdfCopulaGumbelBarnett(u1,u2,theta);
  u1 = miss(u1,0); u2 = miss(u2,0);
  retp( (1 - theta - theta .* (ln(u1) + ln(u2)) + theta^2 .* ln(u1) .* ln(u2)) .*
        exp(-theta .* ln(u1) .* ln(u2)) );
endp;

```

A partir de la relation (1.13), nous pouvons calculer l'expression de la densité de la copule. Nous avons

$$c(u_1, u_2) = \frac{f(\mathbf{F}_1^{-1}(u_1), \mathbf{F}_2^{-1}(u_2))}{f_1(\mathbf{F}_1^{-1}(u_1)) \times f_2(\mathbf{F}_2^{-1}(u_2))} \quad (1.23)$$

Nous obtenons une seconde représentation canonique, mais qui porte désormais sur les densités.

**Exemple 5** La copule  $\mathbf{C}^\perp(u_1, u_2) = u_1 u_2$  est la copule produit (*Product copula*). Nous avons

$$c^\perp(u_1, u_2) = 1 \quad (1.24)$$

Nous en déduisons que toute distribution bidimensionnelle construite avec cette copule vérifie

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) \quad (1.25)$$

La copule produit caractérise donc l'indépendance entre deux variables aléatoires.

Pour certaines distributions bivariées, il n'existe pas d'expression analytique. C'est par exemple le cas de la copule Normale. Nous avons

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho) = \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho) \quad (1.26)$$

Cependant, nous pouvons utiliser la relation (1.13) pour caractériser sa densité :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2)\right) = c(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right) \quad (1.27)$$

d'où

$$c(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2); \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) \quad (1.28)$$

Nous en déduisons que

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) \quad (1.29)$$

avec  $x_1 = \mathbf{F}_1^{-1}(u_1)$  et  $x_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(u_2)$ .

#### Code GAUSS 2 (Distribution et densité de la copule Normale)

```

/*
**> cdfCopulaNormal2
**
*/

proc cdfCopulaNormal2(u1,u2,rho);
  retp( cdfbvn(cdfni(u1),cdfni(u2),rho) );
endp;

/*
**> pdfCopulaNormal2
**
*/

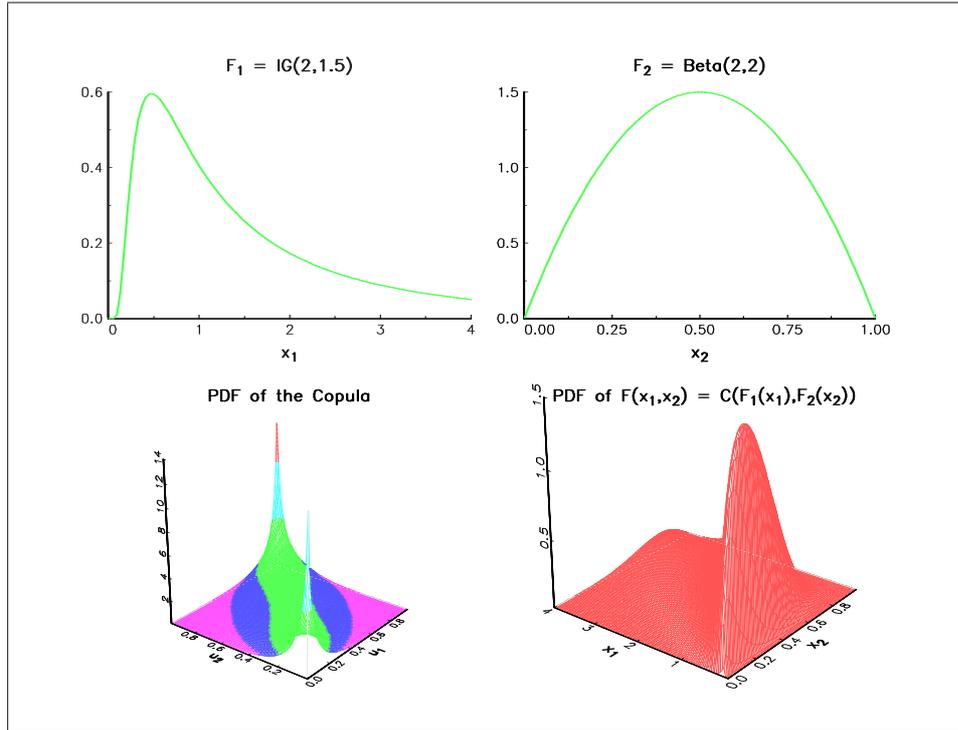
proc pdfCopulaNormal2(u1,u2,rho);
  local x1,x2,x1_sqr,x2_sqr,rho_sqr;

  x1 = cdfni(u1); x2 = cdfni(u2);
  x1_sqr = x1^2; x2_sqr = x2^2;
  rho_sqr = rho^2;

  retp( exp(-0.5 ./ (1-rho_sqr) .* (x1_sqr + x2_sqr - 2*rho.*x1.*x2)) .*
        exp(0.5 * (x1_sqr + x2_sqr)) ./ sqrt(1-rho_sqr) );
endp;

```

**Remarque 2** La construction de modèles multidimensionnels non gaussiens est très (ou relativement) difficile. Par exemple, si nous prenons l'ouvrage classique de KOTZ, BALAKRISHNAN et JOHNSON [2000] sur les distributions multivariées continues, nous avons très peu de familles de probabilité (Exponentielle, Gamma, Dirichlet, Liouville, logistique, Pareto, Exponentielle naturelle). De plus, ces différentes distributions de probabilité présentent l'inconvénient que les marges sont de même type. Il n'est donc pas possible d'avoir une distribution avec une marge gaussienne, une marge uniforme, une marge Pareto, etc. Les copules permettent de résoudre ce problème. Par exemple, nous représentons sur le graphique 1.2 une distribution bivariée dont les marges sont une Inverse Gaussienne et une Beta. La copule correspond à une copule Normale présentant un tau de Kendall égal à 1/2.



Graphique 1.2. Un exemple de distribution bivariee avec des marges donnees

### 1.3 Propriétés des fonctions copules

Avant d'aborder deux propriétés fondamentales des copules, considérons quelques exercices simples de probabilité. Nous avons

$$\begin{aligned} \Pr \{U_1 \leq u_1, U_2 > u_2\} &= \Pr \{U_1 \leq u_1\} - \Pr \{U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2\} \\ &= u_1 - \mathbf{C}(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \Pr \{U_1 \leq u_1 \mid U_2 \leq u_2\} &= \frac{\Pr \{U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2\}}{\Pr \{U_2 \leq u_2\}} \\ &= \frac{\mathbf{C}(u_1, u_2)}{u_2} \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \Pr \{U_1 \leq u_1 \mid U_2 > u_2\} &= \frac{\Pr \{U_1 \leq u_1, U_2 > u_2\}}{\Pr \{U_2 > u_2\}} \\ &= \frac{u_1 - \mathbf{C}(u_1, u_2)}{1 - u_2} \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \Pr \{U_1 > u_1, U_2 > u_2\} &= \Pr \{U_1 > u_1\} - \Pr \{U_1 > u_1, U_2 \leq u_2\} \\ &= 1 - u_1 - u_2 + \mathbf{C}(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \Pr \{U_1 > u_1 \mid U_2 > u_2\} &= \frac{\Pr \{U_1 > u_1, U_2 > u_2\}}{\Pr \{U_2 > u_2\}} \\ &= \frac{1 - u_1 - u_2 + \mathbf{C}(u_1, u_2)}{1 - u_2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

La distribution conditionnelle a pour expression

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{1|2}(u_1, u_2) &= \Pr \{U_1 \leq u_1 \mid U_2 = u_2\} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0^+} \frac{\Pr \{U_1 \leq u_1, u_2 \leq U_2 \leq u_2 + \Delta u\}}{\Pr \{u_2 \leq U_2 \leq u_2 + \Delta u\}} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{C}(u_1, u_2 + \Delta u) - \mathbf{C}(u_1, u_2)}{\Delta u} \\ &= \partial_2 \mathbf{C}(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (1.35)$$

A partir de la copule  $\mathbf{C}$ , nous pouvons construire trois autres copules :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{C}}(u_1, u_2) &= u_1 + u_2 - 1 + \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_2) \\ \tilde{\mathbf{C}}(u_1, u_2) &= u_1 + u_2 - \mathbf{C}(u_1, u_2) \\ \mathbf{C}^*(u_1, u_2) &= 1 - \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_2)\end{aligned}\tag{1.36}$$

Les copules  $\hat{\mathbf{C}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\mathbf{C}^*$  sont appelées respectivement la copule de survie (*survival copula*), la copule duale (*dual of the copula*) et la co-copule (*co-copula*). Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires. Les interprétations probabilistes sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\Pr\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} &= \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \\ \Pr\{X_1 > x_1, X_2 > x_2\} &= \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(x_1), \mathbf{S}_2(x_2)) \\ \Pr\{X_1 \leq x_1 \text{ ou } X_2 \leq x_2\} &= \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \\ \Pr\{X_1 > x_1 \text{ ou } X_2 > x_2\} &= \mathbf{C}^*(\mathbf{S}_1(x_1), \mathbf{S}_2(x_2))\end{aligned}\tag{1.37}$$

avec  $\mathbf{S}(x) = 1 - \mathbf{F}(x)$  la fonction de survie.

Nous énonçons maintenant deux propriétés importantes :

**Théorème 2** *Une copule  $\mathbf{C}$  est uniformément continue sur son domaine. En particulier, nous avons*

$$|\mathbf{C}(v_1, v_2) - \mathbf{C}(u_1, u_2)| \leq |v_1 - u_1| + |v_2 - u_2|\tag{1.38}$$

**Théorème 3** *Les dérivées partielles  $\partial_1 \mathbf{C}$  et  $\partial_2 \mathbf{C}$  existent (presque sûrement) pour tout  $(u_1, u_2)$  dans  $[0, 1]^2$ . Elles satisfont les conditions suivantes  $0 \leq \partial_1 \mathbf{C}(u_1, u_2) \leq 1$  et  $0 \leq \partial_2 \mathbf{C}(u_1, u_2) \leq 1$ .*

La preuve du premier théorème est immédiate si on considère l'inégalité triangulaire (voir par exemple DEHEUVELS [1978] ou SCHWEIZER et SKLAR [1983]). La démonstration rigoureuse du second théorème est plus délicate (voir DARSOW, NGUYEN et OLSEN [1992] ou même Hoeffding [1940]).

## 1.4 Extension au cas multidimensionnel

Cette extension est immédiate. Par exemple, la décomposition canonique d'une distribution multivariée est

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_n(x_n))\tag{1.39}$$

On note  $\mathbf{C}_E$  la sous-copule de  $\mathbf{C}$  telle que les arguments n'appartenant pas à  $E$  valent 1. Prenons une copule de dimension 4. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_1(x) &= \mathbf{C}(x, 1, 1, 1) \\ \mathbf{C}_{12}(x, y) &= \mathbf{C}(x, y, 1, 1) \\ \mathbf{C}_{124}(x, y, z) &= \mathbf{C}(x, y, 1, z)\end{aligned}\tag{1.40}$$

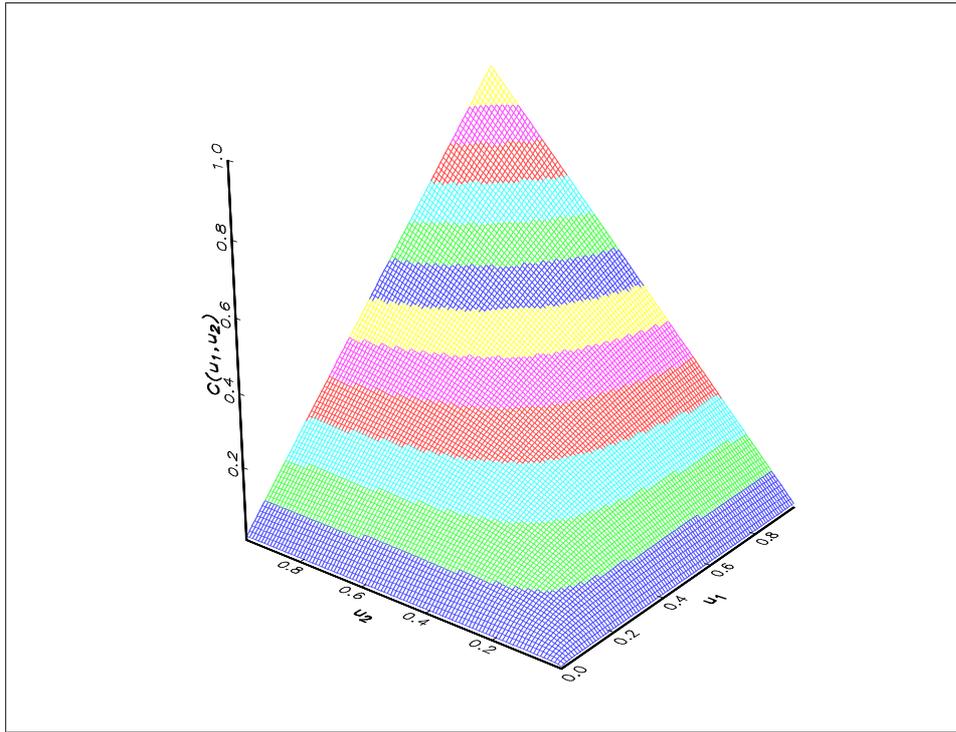
Considérons deux copules  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  de dimensions 2. A quelles conditions la fonction  $\mathbf{C}_1(u_1, \mathbf{C}_2(u_2, u_3))$  définit-elle une copule? La question est naturelle puisque il semble logique de construire des copules de dimension supérieure avec des copules de dimension plus petite. La réponse est donnée dans les articles de QUESADA MOLINA et RODRIGUEZ LALLENA [1994] et GENEST, QUESADA MOLINA et RODRIGUEZ LALLENA [1995]. En fait,  $\mathbf{C}_1(u_1, \mathbf{C}_2(u_2, u_3))$  n'est pas une copule dans la plupart des cas (théorème de l'impossibilité de GENEST, QUESADA MOLINA et RODRIGUEZ LALLENA [1995]). Prenons par exemple la copule  $\mathbf{C}^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$ . Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^-(u_1, \mathbf{C}^-(u_2, u_3)) &= \max(u_1 + \max(u_2 + u_3 - 1, 0) - 1, 0) \\ &= \max(u_1 + u_2 + u_3 - 2, 0) \\ &= \mathbf{C}^-(u_1, u_2, u_3)\end{aligned}\tag{1.41}$$

$\mathbf{C}^-(u_1, u_2, u_3)$  n'est pas une copule. Il convient donc d'être prudent lorsque nous travaillons avec des dimensions supérieures à 2, car certaines évidences sont trompeuses...

## 1.5 Représentation graphique d'une copule

Afin de bien comprendre la structure de dépendance induite par une copule, nous pouvons faire une représentation graphique. Considérons par exemple la copule **Logistic Gumbel**. Nous représentons la fonction  $\mathbf{C}(u_1, u_2)$  sur le graphique 1.3. Il n'est pas évident de comparer cette copule avec par exemple les copules  $\mathbf{C}^-$ ,  $\mathbf{C}^\perp$  et  $\mathbf{C}^+$  du graphique 2.2 (voir le chapitre suivant page 22). En général, un graphe 3D de  $w = \mathbf{C}(u_1, u_2)$  ne permet pas une interprétation intéressante de la dépendance. Une autre méthode est de considérer des courbes particulières de  $w = \mathbf{C}(u_1, u_2)$  pour des valeurs données de  $u_1$  et/ou  $u_2$ . Le graphique 1.4 représente ces courbes lorsque  $u_2$  vaut respectivement 0.25, 0.50 and 0.75, ainsi que celles de  $w = \mathbf{C}^-(u_1, u_2)$ ,  $w = \mathbf{C}^\perp(u_1, u_2)$  et  $w = \mathbf{C}^+(u_1, u_2)$ . Cela donne une idée de la 'distance' qui sépare la copule **Logistic Gumbel** des trois autres copules. Nous remarquons que les inégalités  $\mathbf{C}^\perp(u_1, u_2) \leq \mathbf{C}(u_1, u_2) \leq \mathbf{C}^+(u_1, u_2)$  sont vérifiées pour les trois valeurs de  $u_2$ . En fait, elles sont vérifiées pour tout  $(u_1, u_2)$  dans  $[0, 1]^2$  (remarquez que  $0 \leq u_1 + u_2 - u_1 u_2 \leq 1$ ).



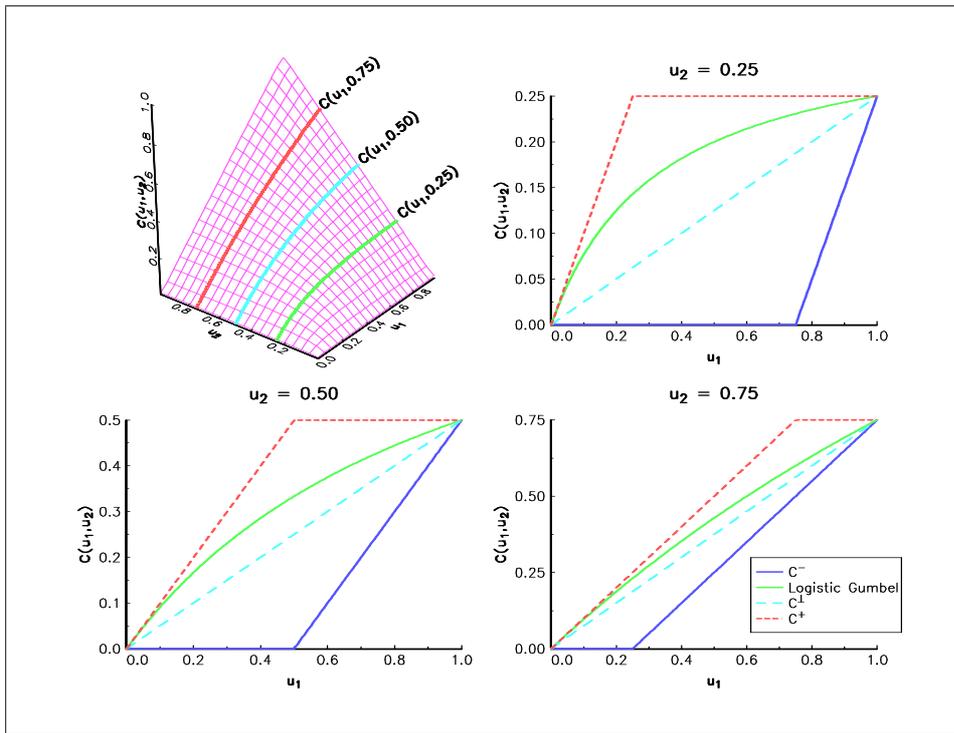
Graphique 1.3. Distribution de la copule Logistic Gumbel

Néanmoins, la meilleure façon de faire une représentation graphique de la distribution d'une copule est certainement de grapher les lignes de niveaux. Soit  $\mathbf{L} \langle \mathbf{C} \rangle (\alpha)$  l'ensemble des points de  $[0, 1]^n$  défini par  $\{\mathbf{u} : \mathbf{C}(\mathbf{u}) = \alpha\}$ . Dans le cas bivarié,  $\mathbf{L} \langle \mathbf{C} \rangle (\alpha)$  correspond à l'ensemble  $\{(u_1, u_2) \in [0, 1]^2 : u_2 = \varphi_\alpha(u_1)\}$  avec  $\varphi_\alpha$  une fonction non-croissante —  $u \leq v \Rightarrow \varphi_\alpha(v) \leq \varphi_\alpha(u)$  — car  $\mathbf{C}$  est 2-increasing. Par exemple, dans le cas de la copule Logistic Gumbel, la fonction  $\varphi_\alpha$  est

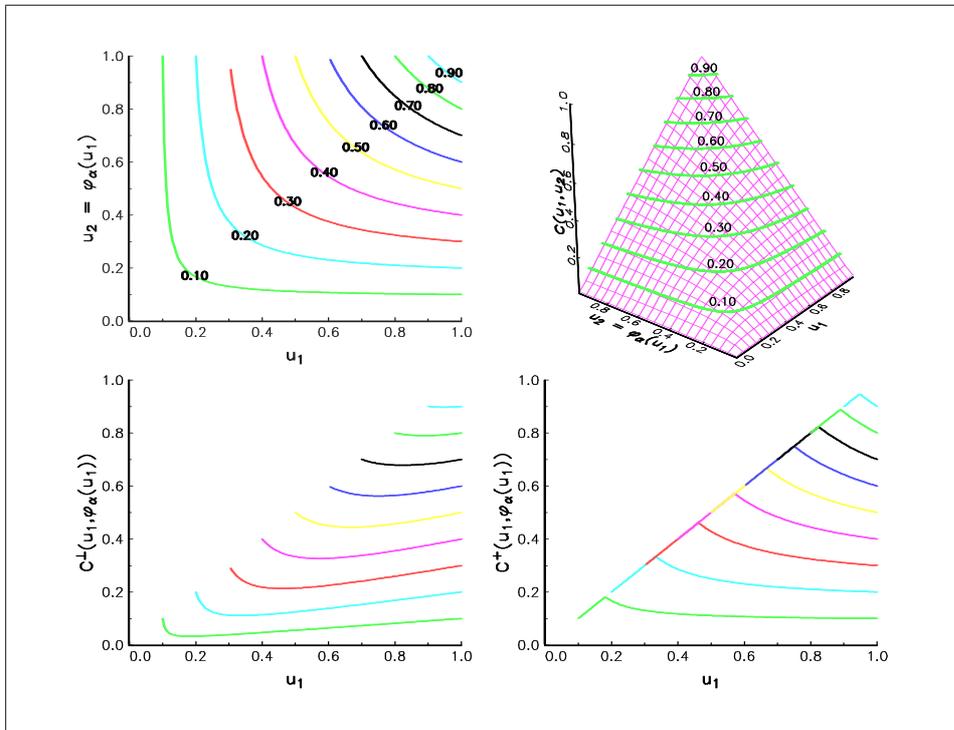
$$u_2 = \varphi_\alpha(u_1) = \frac{\alpha u_1}{u_1 + \alpha(u_1 - 1)} \quad (1.42)$$

Nous représentons les lignes de niveau de cette copule sur le graphique 1.5, ainsi que les courbes  $\mathbf{C}^\perp(u_1, \varphi_\alpha(u_1))$  et  $\mathbf{C}^+(u_1, \varphi_\alpha(u_1))$  avec  $\varphi_\alpha$  la fonction définie par l'expression (1.42). A première vue, il semble que la copule Logistic Gumbel soit plus proche de la copule  $\mathbf{C}^\perp$  que de la copule  $\mathbf{C}^+$  — les courbes  $\mathbf{C}^\perp(u_1, \varphi_\alpha(u_1))$  sont plus proches de la forme d'une droite que les courbes  $\mathbf{C}^+(u_1, \varphi_\alpha(u_1))$ .

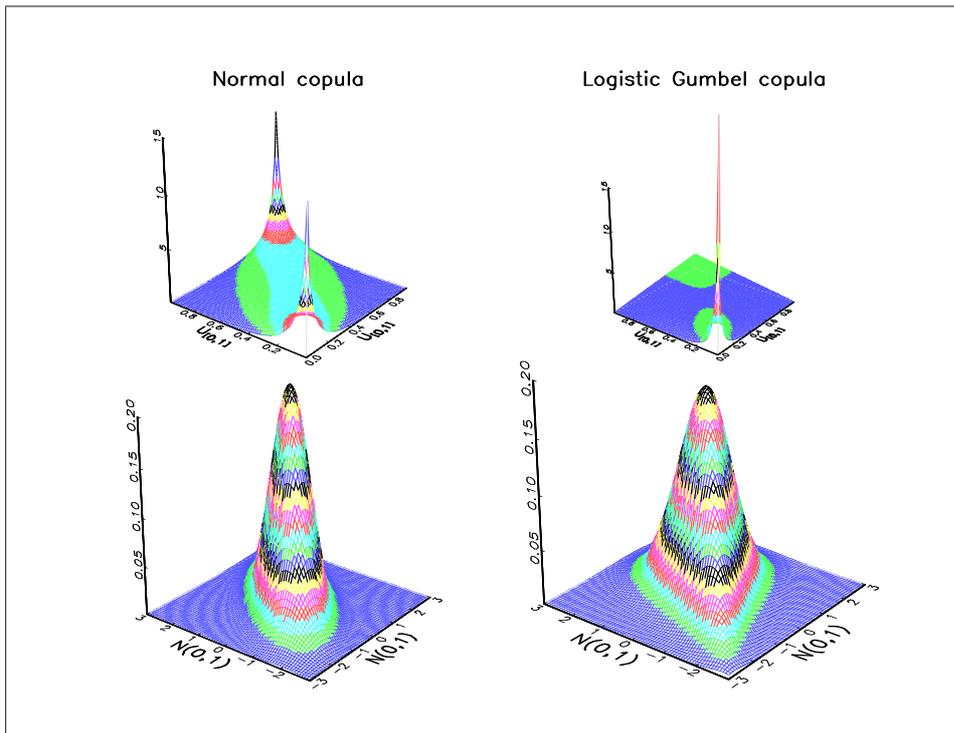
Lorsque nous voulons représenter une fonction de probabilité, il est d'usage de considérer le graphe de sa densité et non celui de sa distribution. Dans le cas bivarié, nous avons une expérience forte avec la distribution normale. Nous pouvons alors faire des comparaisons directes et tenter de comprendre pourquoi la copule se



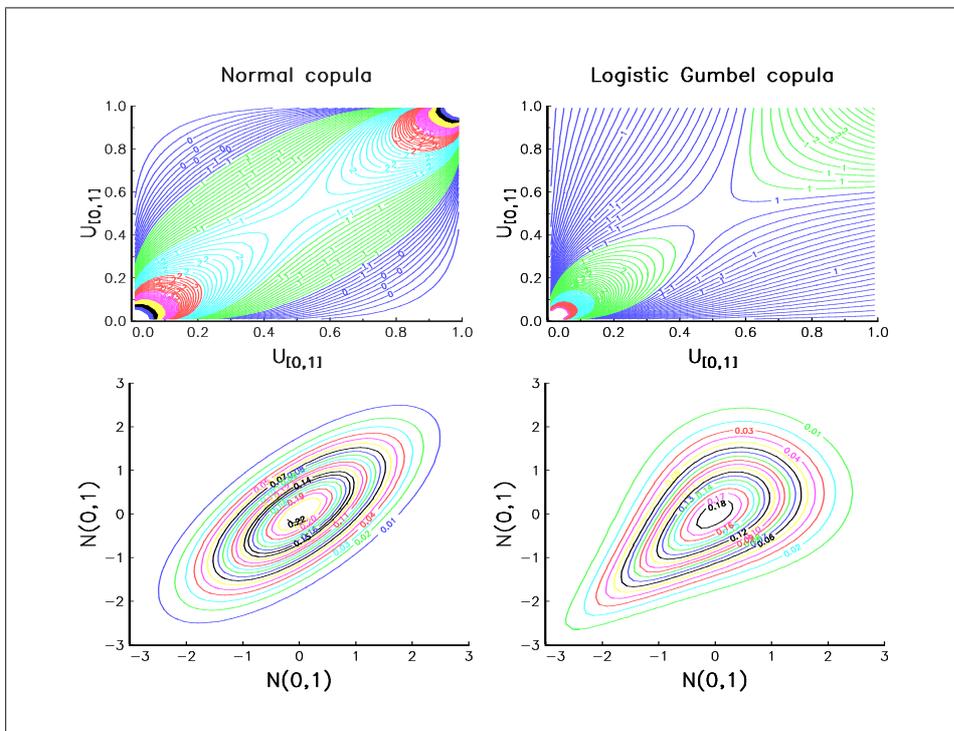
Graphique 1.4. Courbes  $w = C(u_1, u_2)$  pour des valeurs données de  $u_2$



Graphique 1.5. Lignes de niveau de la distribution de la copule Logistic Gumbel



Graphique 1.6. Densité des copules Logistic Gumbel et Normale



Graphique 1.7. Courbes de niveau des densités des copules Logistic Gumbel et Normale

distingue de la copule Normale. En général, les courbes de niveau permettent de mieux appréhender la répartition des masses de probabilité que les graphes 3D des densités (voir les graphiques 1.6 et 1.7).

### Code GAUSS 3 (Distribution, densité et courbes de niveau de la copule **Logistic Gumbel**)

```

/*
**> cdfCopulaLogisticGumbel
**
*/

proc cdfCopulaLogisticGumbel(u1,u2);
  retp( u1 .* u2 ./ (u1 + u2 - u1 .* u2) );
endp;

/*
**> pdfCopulaLogisticGumbel
**
*/

proc pdfCopulaLogisticGumbel(u1,u2);
  retp( 2 * u1 .* u2 ./ (u1 + u2 - u1 .* u2)^3 );
endp;

/*
**> contourCopulaLogisticGumbel
**
*/

proc contourCopulaLogisticGumbel(u1,alpha);
  u1 = missex(u1,u1 .< alpha);
  retp( alpha .* u1 ./ (u1 + alpha .* u1 - alpha) );
endp;

```

## 1.6 Repères historiques

La notion de copule est introduite dans l'article de Sklar en 1959. Le second article qui traite des copules est celui publié dans *Kybernetika* en 1973. Viennent ensuite l'article de Schweizer et Sklar en 1974, les travaux de Schweizer et Wolff (2 articles) et enfin le livre sur les PMS de Schweizer et Sklar. De 1959 à 1983, nous avons donc à peine 6 contributions. Néanmoins, certains auteurs ont utilisé et découvert le concept de copule de façon totalement indépendante des travaux de Sklar. Le premier est Wassily Hoeffding (voir l'annexe A page 189). On trouve implicitement la notion de copule dans les écrits de Féron, Nataf et Mardia. Il faut aussi mentionner deux contributions majeures : la représentation uniforme de Kimeldorf et Sampson (voir l'annexe B page 193) et la fonction de dépendance de Paul Deheuvels (voir l'annexe C page 199). Notons que Paul Deheuvels ne découvrira l'article de *Kybernetika* que 5 ans après ses travaux sur les copules de valeurs extrêmes.

Dans ce chapitre, j'ai adopté la définition de la copule énoncée par SCHWEIZER et SKLAR [1974] et qui est reprise dans les ouvrages de SCHWEIZER et SKLAR [1983] et NELSEN [1999]. A titre d'information, voici la définition originale (**en français**) de Sklar dans son très court article de 3 pages :

**Définition 2 (Sklar [1959, définition 1, p. 229])** *Nous appellerons copule (à  $n$  dimensions) tout fonction  $\mathbf{C}$  continue et non-décroissante — au sens employé pour une fonction de répartition à  $n$  dimensions — définie sur le produit Cartésien de  $n$  intervalles fermés  $[0, 1]$  et satisfaisant aux conditions  $\mathbf{C}(0, \dots, 0) = 0$  et  $\mathbf{C}(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$ .*

Abe Sklar introduit les copules en relation avec le problème des classes de Fréchet  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$ . Il pense que la détermination de l'ensemble des copules  $\mathcal{C}$  est un problème moins difficile que celui de l'ensemble  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$  :

[...] les copules sont en général d'une structure plus simple que les fonctions de répartition. (SKLAR [1959], page 231).

## Références

- [1] BARNETT, V. [1980], Some bivariate uniform distributions, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **9(4)**, 453-461
- [2] DARSOW, W.F., B. NGUYEN et E.T. OLSEN [1992], Copulas and markov processes, *Illinois Journal of Mathematics*, **36(4)**, 600-642
- [3] DEHEUVELS, P. [1978], Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **23**, 1-36
- [4] DEHEUVELS, P. [1979], La fonction de dépendance empirique et ses propriétés — Un test non paramétrique d'indépendance, *Académie Royale de Belgique — Bulletin de la Classe des Sciences — 5e Série*, **65**, 274-292
- [5] DEHEUVELS, P. [1981], A non parametric test for independence, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **26**, 29-50
- [6] FÉRON, R. [1956], Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, cas de l'espace à trois dimensions, *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, **5**, 3-12
- [7] FÉRON, R. [1963], Tableaux de corrélation dont les marges sont données et programmes linéaires, *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, **12**, 103-116
- [8] GENEST, C. et J. MACKAY [1986], The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals, *American Statistician*, **40**, 280-283
- [9] GENEST, C., J.J. QUESADA MOLINA et J.A. RODRIGUEZ LALLENA [1995], De l'impossibilité de construire des lois à marges multidimensionnelles données à partir des copules, *CRAS, I*, **320**, 723-726
- [10] Hoeffding, W. [1940], Masstabinvariante Korrelationstheorie, *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, **5**, 181-233
- [11] Hoeffding, W. [1941], Masstabinvariante Korrelationstheorie für diskontinuierliche verteilungen, *Arkiv für Mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung*, **7**, 49-70
- [12] KIMELDORF, G. et A. SAMPSON [1975], One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals, *Communications in Statistics*, **4(3)**, 293-301
- [13] KIMELDORF, G. et A. SAMPSON [1975], Uniform representations of bivariate distributions, *Communications in Statistics*, **4(7)**, 617-627
- [14] KOTZ, S., N. BALAKRISHNAN et N.L. JOHNSON [2000], Continuous Multivariate Distributions — Volume 1 : Models and Applications, John Wiley & Sons, New York
- [15] MARDIA, K.V. [1970], Families of Bivariate Distributions, *Griffin's Statistical Monographs & Courses*, **27**, Charles Griffin & Company Ltd, London
- [16] MARDIA, K.V. [1970], A translation family of bivariate distributions and Fréchet Bounds, *Sankyā : The Indian Journal of Statistics A*, **32**, 119-122
- [17] NATAF, A. [1962], Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **255**, 42-43
- [18] NATAF, A. [1962], Etude graphique de détermination de distributions de probabilités planes dont les marges sont données, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **11**, 247-260
- [19] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, *Lectures Notes in Statistics*, **139**, Springer Verlag, New York
- [20] QUESADA MOLINA, J.J. et J.A. RODRIGUEZ LALLENA [1994] Some advances in the study of the compatibility of three bivariate copulas, *Journal of Italian Statistical Society*, **3**, 397-417
- [21] SCHWEIZER, B. [1991], Thirty years of copulas, in G. Dall'Aglio, S. Kotz et G. Salinetti (Eds.), *Advances in Probability Distributions with Given Marginals (Beyond the Copulas)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [22] SCHWEIZER, B. et A. SKLAR [1974], Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables, *Studia Mathematica*, **LII**, 43-52
- [23] SCHWEIZER, B. et A. SKLAR [1983], Probabilistic Metric Spaces, *Probability and Applied Mathematics*, North-Holland, New York
- [24] SCHWEIZER, B. et E. WOLFF [1981], On nonparametric measures of dependence for random variables, *Annals of Statistics*, **9**, 879-885

- [25] SKLAR, A. [1959], Fonctions de repartition à  $n$  dimensions et leurs marges, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **8**, 229-231
- [26] SKLAR, A. [1973], Random variables, joint distribution functions and copulas, *Kybernetika*, **9**, 449-460
- [27] SKLAR, A. [1996], Random variables, distribution functions and copulas — A personal look backward and forward, in L. Rüschendorf, B. Schweizer et M.D. Taylor (Eds.), *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA



## 2

### Les classes de Fréchet

Celles-ci font l'objet d'une étude intensive dans le chapitre 3 de JOE [1997]. Les classes de Fréchet sont les classes des distributions multidimensionnelles avec des marges données. Ces marges peuvent être unidimensionnelles, multidimensionnelles et aussi conditionnelles. Considérons par exemple les distributions bivariées  $\mathbf{F}_{12}$  et  $\mathbf{F}_{23}$ . La classe de Fréchet  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{23})$  est l'ensemble des distributions trivariées qui sont **compatibles** avec ces marges. Puisque nous connaissons  $\mathbf{F}_{12}$  et  $\mathbf{F}_{23}$ , nous connaissons aussi  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  et  $\mathbf{F}_3$ . Nous savons que toute distribution  $\mathbf{F}$  de dimension 3 s'écrit

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2), \mathbf{F}_3(x_3)) \quad (2.1)$$

Néanmoins  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$  impose certaines conditions sur la fonction  $\mathbf{C}$ . Disons que nous ne pouvons pas faire ce que nous voulons. L'étude des classes de Fréchet revient à étudier ces restrictions, les points extrémaux de  $\mathcal{F}$ , les bornes, etc. Pour notre part, nous nous limitons à l'étude de la classe de Fréchet  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$ .

Nous devons préciser que de nombreux résultats sur les copules sont avant tout des résultats obtenus dans des études sur  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$  : les bornes des copules, l'ordre de concordance, la propriété lipschitzienne, etc. Ces résultats ont été ensuite traduits en terme de copules, ce qui les rend plus lisibles.



Graphique 2.1. Maurice Fréchet

Graphique 2.1. Maurice Fréchet

#### 2.1 Définition

**Définition 3**  $\mathbf{F}$  appartient à la classe de Fréchet  $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$  et on note  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$  si et seulement si les marges de  $\mathbf{F}$  sont  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  :

$$\mathbf{F}(x_1, \infty) = \mathbf{F}_1(x_1) \quad (2.2)$$

et

$$\mathbf{F}(\infty, x_2) = \mathbf{F}_2(x_2) \quad (2.3)$$

Caractériser la classe de Fréchet  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$  revient à trouver l'ensemble  $\mathcal{C}$  des fonctions copules puisque nous avons

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \{\mathbf{F} : \mathbf{F}(x_1, x_2) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)), \mathbf{C} \in \mathcal{C}\} \quad (2.4)$$

Le problème de la caractérisation de la classe de Fréchet  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$  est donc indépendante des marges  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$ .

Les distributions extrémales (qui sont aussi les bornes)  $\mathbf{F}^-$  et  $\mathbf{F}^+$  de  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$  sont

$$\mathbf{F}^-(x_1, x_2) = \max(\mathbf{F}_1(x_1) + \mathbf{F}_2(x_2) - 1, 0) \quad (2.5)$$

et

$$\mathbf{F}^+(x_1, x_2) = \min(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \quad (2.6)$$

$\mathbf{F}^-$  et  $\mathbf{F}^+$  sont appelées respectivement les bornes basse et haute de Fréchet. Les copules associées sont

$$\mathbf{C}^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0) \quad (2.7)$$

et

$$\mathbf{C}^+(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2) \quad (2.8)$$

Ce sont **des** (et non les) copules extrémales de  $\mathcal{C}$ .

**Exemple 6** *Considérons la classe de Fréchet  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$  avec  $\mathbf{F}_1 \stackrel{d}{=} \mathbf{F}_2 \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, 1)$ . Ainsi, la distribution normale à deux dimensions de corrélation  $\rho$  appartient à  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ . Néanmoins, beaucoup d'autres distributions non normales appartiennent à cette classe de Fréchet. C'est par exemple le cas de la distribution suivante*

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \frac{\Phi(x_1)\Phi(x_2)}{\Phi(x_1) + \Phi(x_2) - \Phi(x_1)\Phi(x_2)} \quad (2.9)$$

*Considérons la distribution normale bivariée*

$$\mathbf{F}(x_1, x_2; \rho) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2 - 2\rho\varsigma_1\varsigma_2)\right) d\varsigma_1 d\varsigma_2 \quad (2.10)$$

*Nous avons*

$$\mathbf{F}^-(x_1, x_2) := \mathbf{F}(x_1, x_2; -1) = \max(\Phi(x_1) + \Phi(x_2) - 1, 0) \quad (2.11)$$

et

$$\mathbf{F}^+(x_1, x_2) := \mathbf{F}(x_1, x_2; +1) = \min(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \quad (2.12)$$

*Les bornes de la classe  $\mathcal{F}(\mathcal{N}(0, 1), \mathcal{N}(0, 1))$  sont données par la distribution normale bivariée avec une corrélation égale respectivement à  $-1$  et  $+1$ .*

Dans le cas multidimensionnel, nous notons

$$\mathbf{C}^-(u_1, \dots, u_n) = \max\left(\sum_{i=1}^n u_i - n + 1, 0\right) \quad (2.13)$$

et

$$\mathbf{C}^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n) \quad (2.14)$$

Nous pouvons montrer que  $\mathbf{C}^+$  est une copule, mais que  $\mathbf{C}^-$  n'est pas dans  $\mathcal{C}$ . Néanmoins,  $\mathbf{C}^-$  est une borne inférieure atteignable. Cela veut dire que pour tout  $(u_1, \dots, u_n)$  appartenant à  $[0, 1]^n$ , il existe une copule qui coïncide avec  $\mathbf{C}^-$ . Cela veut dire que  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$  admet une fonction de distribution minimale si et seulement si  $\max(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i(x_i) - n + 1, 0)$  est une distribution de probabilité. Malheureusement, cela implique des restrictions très contraignantes (DALL'AGLIO [1972]).

**Remarque 3** Les bornes inférieures et supérieures de  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n)$  sont bien sûr des points extrémaux de  $\mathcal{F}$ . Néanmoins, ce ne sont pas les seuls. En fait, il existe une infinité de points extrémaux qu'il est difficile de caractériser.

Code GAUSS 4 (Fonction de distribution des trois copules  $C^-$ ,  $C^\perp$  et  $C^+$ )

```

proc _max_(x,y);
  retp( x .* (x .> y) + y .* (x .<= y) );
endp;

proc _min_(x,y);
  retp( x .* (x .< y) + y .* (x .>= y) );
endp;

/*
**> cdfCopulaLower & cdfCopulaLower2
**
*/

proc cdfCopulaLower2(u1,u2);
  retp( _max_(u1+u2-1,0) );
endp;

proc cdfCopulaLower(u);
  retp( _max_(sumc(u')+cols(u)-1,0) );
endp;

/*
**> cdfCopulaProduct & cdfCopulaProduct2
**
*/

proc cdfCopulaProduct2(u1,u2);
  retp(u1 .* u2);
endp;

proc cdfCopulaProduct(u);
  retp( prodc(u') );
endp;

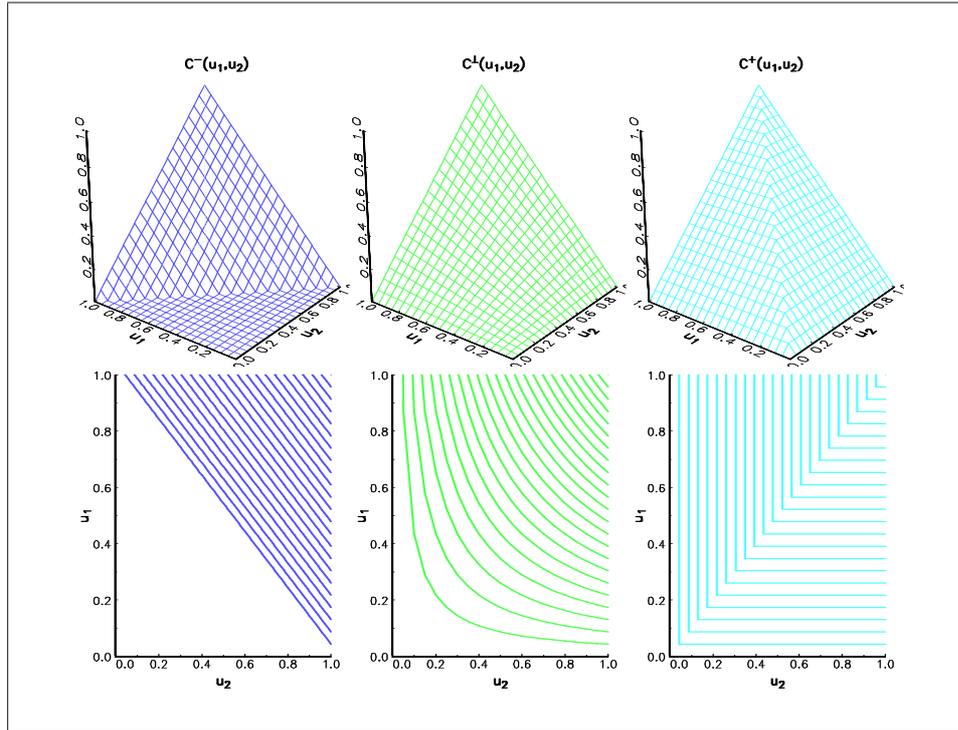
/*
**> cdfCopulaUpper & cdfCopulaUpper2
**
*/

proc cdfCopulaUpper2(u1,u2);
  retp( _min_(u1,u2) );
endp;

proc cdfCopulaUpper(u);
  retp( minc(u') );
endp;

```

Sur le graphique 2.2, nous représentons les distributions des trois copules  $C^-$ ,  $C^\perp$  et  $C^+$ .



Graphique 2.2. Les trois copules  $\mathbf{C}^-$ ,  $\mathbf{C}^\perp$  et  $\mathbf{C}^+$

## 2.2 Ordre stochastique de concordance

Dans la section précédente, nous avons défini les bornes basse et haute de Fréchet. Celles-ci vérifient

$$\mathbf{F}^-(x_1, x_2) \leq \mathbf{F}(x_1, x_2) \leq \mathbf{F}^+(x_1, x_2) \quad (2.15)$$

pour tout point  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  et toute distribution  $\mathbf{F}$  de  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ . En adoptant le point de vue des copules (puisque nous travaillons avec des marges données), nous avons

$$\mathbf{C}^-(u_1, u_2) \leq \mathbf{C}(u_1, u_2) \leq \mathbf{C}^+(u_1, u_2) \quad (2.16)$$

pour toute copule  $\mathbf{C}$  de  $\mathcal{C}$ . Donc, pour un ‘quantile’  $\alpha$  donné<sup>1</sup>, les lignes de niveau d’une copule  $\mathbf{C}$  doivent être dans le triangle défini par

$$\{(u_1, u_2) : \mathbf{C}(u_1, u_2) = \alpha\} \in \{(u_1, u_2) : \max(u_1 + u_2 - 1, 0) \leq \alpha, \min(u_1, u_2) \geq \alpha\} \quad (2.17)$$

(voir le graphique 2.3). Dans le cas multidimensionnel, ce triangle devient un  $n$ -volume.

Nous allons maintenant introduire un ordre **partiel** sur les copules.

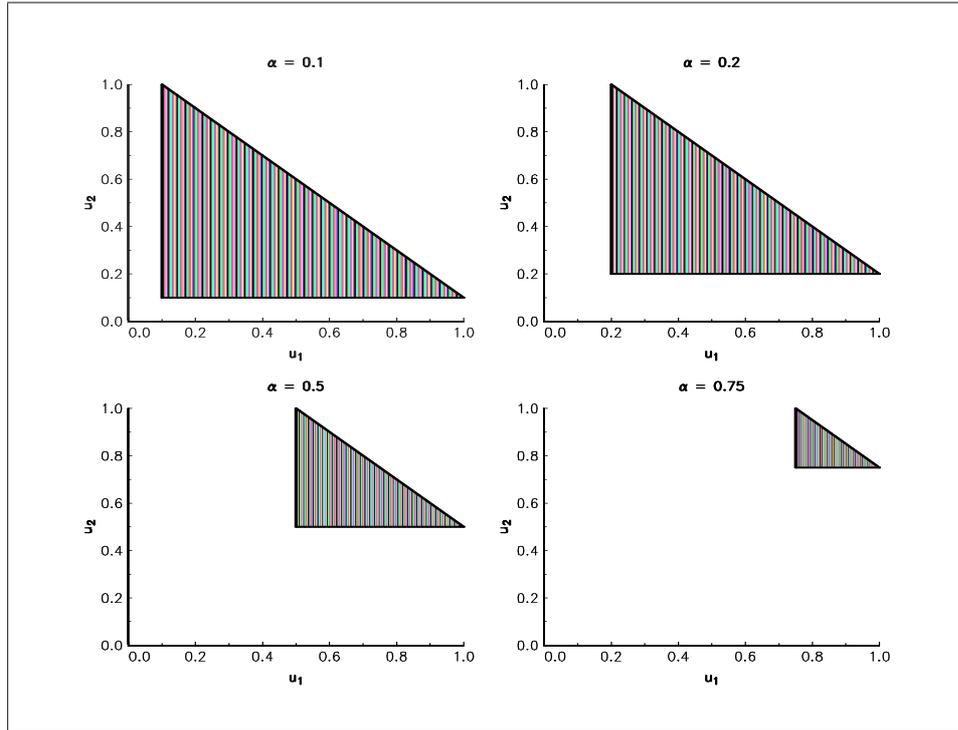
**Définition 4** Soient  $\mathbf{C}_1$  et  $\mathbf{C}_2$  deux copules. On dit que  $\mathbf{C}_1$  est plus petite que  $\mathbf{C}_2$  et on note  $\mathbf{C}_1 \prec \mathbf{C}_2$  si et seulement si  $\mathbf{C}_1(u_1, u_2) \leq \mathbf{C}_2(u_1, u_2)$  pour tout  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ .

**Remarque 4** L’ordre  $\prec$  est appelé l’ordre de concordance. Il correspond à la dominance stochastique du premier ordre sur les fonctions de distribution.

Cette relation d’ordre est **partielle** car on ne peut pas comparer toutes les copules entre elles. Considérons la copule cubique définie par

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta) = u_1 u_2 + \theta [u(u-1)(2u-1)] [v(v-1)(2v-1)] \quad (2.18)$$

<sup>1</sup>C’est bien sûr un abus de langage.



Graphique 2.3. La région triangle contenant les lignes de niveau  $\mathbf{C}(u_1, u_2) = \alpha$

avec  $\theta \in [-1, 2]$ . Nous avons

$$\mathbf{C}\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; 1\right) = 0.5712 \geq \mathbf{C}^\perp\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = 0.5625$$

mais

$$\mathbf{C}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}; 1\right) = 0.1787 \leq \mathbf{C}^\perp\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = 0.1875$$

Néanmoins, nous avons toujours

$$\mathbf{C}^- \prec \mathbf{C} \prec \mathbf{C}^+ \quad (2.19)$$

Nous pouvons aussi vérifier que

$$\mathbf{C}^- \prec \mathbf{C}^\perp \prec \mathbf{C}^+ \quad (2.20)$$

Nous en déduisons qu'une structure de dépendance **positive** est une fonction copule  $\mathbf{C}$  qui vérifie l'inégalité suivante :

$$\mathbf{C}^\perp \prec \mathbf{C} \prec \mathbf{C}^+ \quad (2.21)$$

De même, une structure de dépendance **négative** est une fonction copule  $\mathbf{C}$  qui vérifie l'inégalité suivante :

$$\mathbf{C}^- \prec \mathbf{C} \prec \mathbf{C}^\perp \quad (2.22)$$

Cependant, comme cette relation d'ordre est partielle, il existe des fonctions copules  $\mathbf{C}$  telles que  $\mathbf{C} \not\prec \mathbf{C}^\perp$  et  $\mathbf{C} \not\prec \mathbf{C}^-$ . Il existe donc des fonctions copules qui ne sont ni des structures de dépendance **positive**, ni des structures de dépendance **négative**. Reprenons l'exemple de la copule cubique. Nous avons

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta) = \mathbf{C}^\perp(u_1, u_2) + \theta [u(u-1)(2u-1)] [v(v-1)(2v-1)] \quad (2.23)$$

Cette copule peut être vue comme une perturbation de la copule  $\mathbf{C}^\perp$ . Néanmoins, cette perturbation n'est pas monotone.

**Remarque 5** Considérons la copule  $\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta)$  avec  $\theta$  un paramètre. Nous notons  $\mathbf{C}_{\theta}(u_1, u_2) = \mathbf{C}(u_1, u_2; \theta)$ . La famille de copules  $\{\mathbf{C}_{\theta}\}$  est dite totalement ordonnée si pour tout  $\theta_2 \geq \theta_1$  nous vérifions

$$\mathbf{C}_{\theta_2} \succ \mathbf{C}_{\theta_1} \quad (2.24)$$

(famille positivement ordonnée) ou

$$\mathbf{C}_{\theta_2} \prec \mathbf{C}_{\theta_1} \quad (2.25)$$

(famille négativement ordonnée).

**Exemple 7** Introduisons la famille de copules définies par

$$\mathbf{C}_{\theta}(u_1, u_2) = \theta \mathbf{C}^{-}(u_1, u_2) + (1 - \theta) \mathbf{C}^{+}(u_1, u_2) \quad (2.26)$$

avec  $0 \leq \theta \leq 1$ . Cette copule est une somme convexe des copules Fréchet  $\mathbf{C}^{-}$  et  $\mathbf{C}^{+}$ . Soit  $\theta_2 \geq \theta_1$ . Nous avons

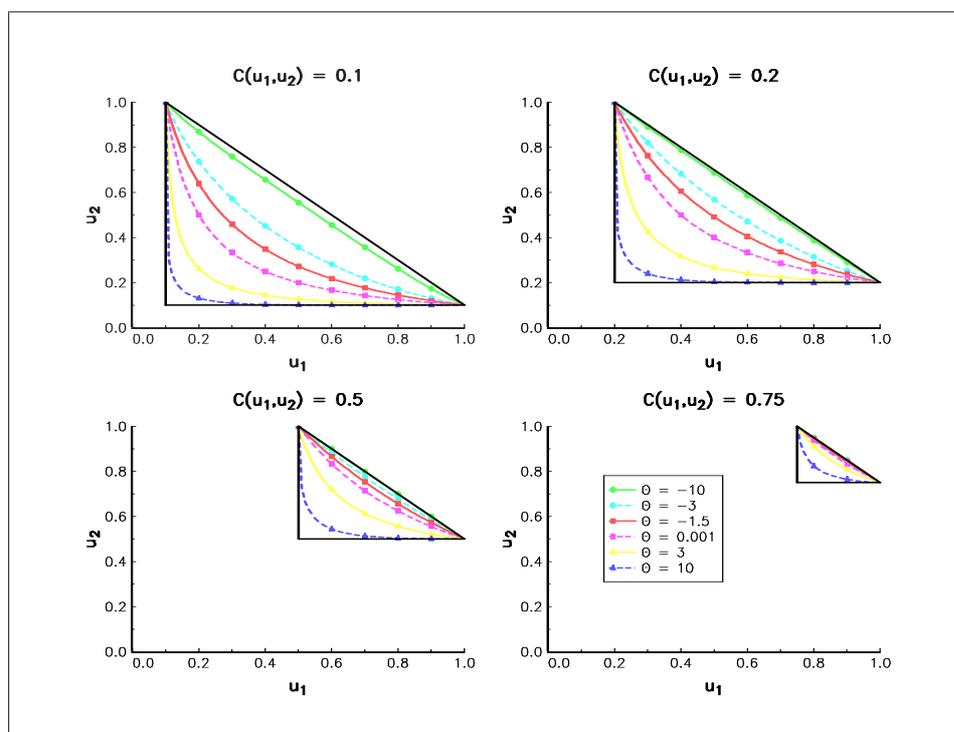
$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\theta_2}(u_1, u_2) &= \theta_2 \mathbf{C}^{-}(u_1, u_2) + (1 - \theta_2) \mathbf{C}^{+}(u_1, u_2) \\ &= \mathbf{C}_{\theta_1}(u_1, u_2) - (\theta_2 - \theta_1) (\mathbf{C}^{+}(u_1, u_2) - \mathbf{C}^{-}(u_1, u_2)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nous en déduisons que  $\mathbf{C}_{\theta_2} \prec \mathbf{C}_{\theta_1}$ . Cette famille de copules est ordonnée négativement.

**Exercice 1** La définition de la copule Frank est

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad (2.28)$$

avec  $\theta \in \mathbb{R}$ . Etudier les cas limites  $\theta \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow \infty$  et  $\theta \rightarrow -\infty$ . Montrer que c'est une famille positivement ordonnée (graphique 2.4).



Graphique 2.4. Copules de Frank et ordre de concordance

Code GAUSS 5 (Distribution, densité et courbes de niveau de la copule Frank)

```

/*
**> cdfCopulaLogisticGumbel
**
*/

proc cdfCopulaFrank(u1,u2,theta);
  u1 = exp(-theta.*u1) - 1; u2 = exp(-theta.*u2) - 1;
  retp( -ln(1 + u1.*u2./(exp(-theta)-1)) ./ theta );
endp;

/*
**> pdfCopulaFrank
**
*/

proc pdfCopulaFrank(u1,u2,theta);
  local eta,u1_,u2_;
  eta = 1-exp(-theta); u1_ = 1-exp(-theta.*u1); u2_ = 1-exp(-theta.*u2);
  retp( exp(-theta.*(u1+u2)) .* theta .* eta ./ ((eta - u1_ .* u2_)^2) );
endp;

/*
**> contourCopulaFrank
**
*/

proc contourCopulaFrank(u1,alpha,theta);
  local u2;
  u2 = -ln( 1+ (exp(-alpha.*theta)-1) .* (exp(-theta)-1) ./ (exp(-theta.*u1) - 1) ) ./ theta;
  u2 = real(missex(u2,abs(imag(u2)).> 0.01));
  retp( missex(u2,u2 .< 0 .or u2 .> 1) );
endp;

```

**Exercice 2** La copule FGM (*Farlie-Gumbel-Morgenstern*) a pour expression :

$$\mathbf{C}_\theta(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \theta (1 - u_1) (1 - u_2)) \quad (2.29)$$

*Est-ce une famille de copules ordonnée ?*

**Code GAUSS 6 (Distribution de la copule FGM)**

```

/*
**> cdfCopulaFGM
**
*/

proc cdfCopulaFGM(u1,u2,theta);
  retp( u1 .* u2 .* (1 + theta .* (1-u1) .* (1-u2) ) );
endp;

```

## 2.3 Repères historiques

Le problème des bornes a été abordé par plusieurs auteurs : Maurice Fréchet lui même, mais aussi et surtout Dall'Aglio. La copule FGM a été proposée par Morgenstern. Elle a été ensuite étudiée par Eugène Gumbel et surtout Farlie.

## Références

- [1] DALL'AGLIO, G. [1956], Sugli estremi dei momenti delle funzioni de ripartizione doppia, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa : Classe di Scienze*, **10**, 35-74
- [2] DALL'AGLIO, G. [1959], Sulla compatibilità delle fuzione di repartizione doppia, *Rendiconti di matematica*, **18**, 385-413
- [3] DALL'AGLIO, G. [1960], Les fonctions extrêmes de la classe de Fréchet à 3 dimensions, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **9**, 175-188
- [4] DALL'AGLIO, G. [1972], Fréchet classes and compatibility of distribution functions, *Symposia Mathematica*, **9**, 131-150
- [5] FRÉCHET, M. [1935], Généralisations du théorème des probabilités totales, *Fundamenta Mathematicae*, **25**, 379-397
- [6] FRÉCHET, M. [1937], *Généralités sur les Probabilités. Variables Aléatoires* (Tome I : Les principes de la théorie des probabilités, Fascicule III : Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités), Gauthier-Villars, Paris
- [7] FRÉCHET, M. [1951], Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, *Annales de l'Université de Lyon Section A*, **9**, 53-77
- [8] FRÉCHET, M. [1957], Les tableaux de corrélation et les programmes linéaires, *Revue de l'Institut International de Statistique*, **25**, 23-40
- [9] FRÉCHET, M. [1958], Remarques au sujet de la note précédente, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série I Math*, **246**, 2719-2720
- [10] JOE, H. [1997], Multivariate Models and Dependence Concepts, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, **73**, Chapman & Hall, London
- [11] GUMBEL, E. J. [1958], Distributions à plusieurs variables dont les marges sont données, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série I Math*, **246**, 2717-2719
- [12] MORGENSTERN, D. [1956], Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen, *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, **8**, 234-235
- [13] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, *Lectures Notes in Statistics*, **139**, Springer Verlag, New York

# 3

## Copules et variables aléatoires

Dans ce chapitre, nous considérons deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  de distributions  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$ . Nous notons  $\mathbf{F}$  la distribution du vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ . Nous définissons alors la copule du vecteur aléatoire  $(X_1, X_2)$  par la copule de  $\mathbf{F}$  :

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle (\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \quad (3.1)$$

Nous cherchons alors à définir des résultats sur la dépendance du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  en étudiant la copule  $\mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle$ . Ces résultats proviennent des travaux de DEHEUVELS [1978], SCHWEIZER et WOLFF [1981] et NELSEN [1999].

### 3.1 Principaux résultats

Nous pouvons donner une nouvelle interprétation des copules  $\mathbf{C}^-$ ,  $\mathbf{C}^\perp$  et  $\mathbf{C}^+$  :

- deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont contre-monotones (**countermonotonic**) — ou  $\mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{C}^-$  — s'il existe une variable aléatoire  $X$  telle que  $X_1 = f_1(X)$  et  $X_2 = f_2(X)$  avec  $f_1$  une fonction non-croissante et  $f_2$  une fonction non-décroissante ;
- deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont **indépendantes** si la structure de dépendance est la copule produit  $\mathbf{C}^\perp$  ;
- deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont co-monotones (**comonotonic**) — ou  $\mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{C}^+$  — s'il existe une variable aléatoire  $X$  telle que  $X_1 = f_1(X)$  et  $X_2 = f_2(X)$  avec  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions non-décroissantes.

Considérons par exemple un vecteur aléatoire gaussien standard  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ .  $\mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{C}^-$  correspond au cas

$$X_2 = -X_1 \quad (3.2)$$

alors que  $\mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{C}^+$  correspond au cas

$$X_2 = X_1 \quad (3.3)$$

Si  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est un vecteur aléatoire dont les marges sont lognormales. Alors nous avons

$$\mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{C}^- \Leftrightarrow X_2 = \exp(-\ln X_1) = \frac{1}{X_1} \quad (3.4)$$

et

$$\mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{C}^+ \Leftrightarrow X_2 = X_1 \quad (3.5)$$

Si  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est un vecteur aléatoire dont les marges sont uniformes, nous obtenons les résultats suivants

$$\mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{C}^- \Leftrightarrow X_2 = 1 - X_1 \quad (3.6)$$

et

$$\mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle = \mathbf{C}^+ \Leftrightarrow X_2 = X_1 \quad (3.7)$$

Pour ces trois exemples, nous vérifions que  $X_2$  est une fonction décroissante de  $X_1$  si la copule  $\mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle$  est  $\mathbf{C}^-$  et que  $X_2$  est une fonction croissante de  $X_1$  si la copule  $\mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle$  est  $\mathbf{C}^+$ .

**Remarque 6** *Les notions ‘countermonotonic’ et ‘comonotonic’ généralisent les notions de corrélations égales à -1 et +1 d’un vecteur aléatoire gaussien.  $\mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C}^+$  sont donc les structures de dépendance respectivement la plus négative et la plus positive qui existent. Par abus de langage, nous dirons que  $X_1$  et  $X_2$  sont les variables aléatoires les plus corrélées possibles (négativement et positivement).*

Nous donnons maintenant l’un des théorèmes les plus importants des copules :

**Théorème 4** *Soient deux variables aléatoires continues  $X_1$  et  $X_2$  de marges  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  et de copule  $\mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle$ . Si  $h_1$  et  $h_2$  sont deux fonctions strictement croissantes sur  $\text{Im } X_1$  et  $\text{Im } X_2$  respectivement, alors*

$$\mathbf{C} \langle h_1(X_1), h_2(X_2) \rangle = \mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle \quad (3.8)$$

*Ainsi la copule est invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.*

Nous pouvons montrer ce théorème en utilisant les propriétés des distributions. Notons respectivement  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  les distributions des vecteurs aléatoires  $(X_1, X_2)$  et  $(h_1(X_1), h_2(X_2))$ . Nous remarquons que les marges de  $\mathbf{G}$  sont

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1(x_1) &= \Pr \{h_1(X_1) \leq x_1\} \\ &= \Pr \{X_1 \leq h_1^{-1}(x_1)\} \quad (\text{car } h_1 \text{ est une fonction croissante}) \\ &= \mathbf{F}_1(h_1^{-1}(x_1)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

et  $\mathbf{G}_2(x_2) = \mathbf{F}_2(h_2^{-1}(x_2))$ . Nous avons donc  $\mathbf{G}_1^{-1}(u_1) = h_1(\mathbf{F}_1^{-1}(u_1))$  et  $\mathbf{G}_2^{-1}(u_2) = h_2(\mathbf{F}_2^{-1}(u_2))$ . Nous en déduisons le résultat :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \langle h_1(X_1), h_2(X_2) \rangle(u_1, u_2) &= \mathbf{G}(\mathbf{G}_1^{-1}(u_1), \mathbf{G}_2^{-1}(u_2)) \\ &= \Pr \{h_1(X_1) \leq \mathbf{G}_1^{-1}(u_1), h_2(X_2) \leq \mathbf{G}_2^{-1}(u_2)\} \\ &= \Pr \{X_1 \leq h_1^{-1}(\mathbf{G}_1^{-1}(u_1)), X_2 \leq h_2^{-1}(\mathbf{G}_2^{-1}(u_2))\} \\ &= \Pr \{X_1 \leq \mathbf{F}_1^{-1}(u_1), X_2 \leq \mathbf{F}_2^{-1}(u_2)\} \\ &= \mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Par exemple, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle &= \mathbf{C} \langle \ln X_1, X_2 \rangle \\ &= \mathbf{C} \langle \ln X_1, \ln X_2 \rangle \\ &= \mathbf{C} \langle X_1, \exp X_2 \rangle \\ &= \mathbf{C} \left\langle \sqrt{X_1}, \exp X_2 \right\rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

L’application de transformations croissantes ne modifie donc pas la copule, seulement les marges. Ainsi, la copule de la distribution lognormale bivariée est la même que celle de la distribution normale bivariée.

Le théorème précédent est souvent attribué à Schweizer et Wolff. En fait, nous le trouvons déjà dans les travaux de Paul Deheuvels (rappelons néanmoins que Wolff a soutenu sa thèse en 1977) et même dans les travaux de Nataf (et donc dans ceux de Mardia). Ce théorème n’est pas si surprenant si nous considérons la décomposition canonique d’une distribution bivariée. Nous avons  $\mathbf{C} \langle U_1, U_2 \rangle = \mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle$  avec  $U_1 = \mathbf{F}_1(X_1)$  et  $U_2 = \mathbf{F}_2(X_2)$ . D’une certaine manière, la décomposition canonique résulte de ce théorème puisque nous avons

appliqué des transformations croissantes. Considérons maintenant deux distributions continues  $\mathbf{G}_1$  et  $\mathbf{G}_2$  et notons  $Y_1 = \mathbf{G}_1^{-1}(U_1)$  et  $Y_2 = \mathbf{G}_2^{-1}(U_2)$ . La distribution  $\mathbf{G}$  du vecteur aléatoire  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$  est donc

$$\mathbf{G}(y_1, y_2) = \mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle(\mathbf{G}_1(y_1), \mathbf{G}_2(y_2)) \quad (3.12)$$

puisque  $\mathbf{G}_1^{-1}$  et  $\mathbf{G}_2^{-1}$  sont croissantes. Nous en déduisons que

$$\mathbf{G}(x_1, x_2) = \mathbf{F}(\mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{G}_1(x_1)), \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{G}_2(x_2))) \quad (3.13)$$

Cette méthode de construction de distributions bivariées à partir d'une distribution bivariée connue est suggérée par NATAF [1962] (et ensuite par MARDIA [1970]). Elle est connue sous le nom de **méthode de translation**.

**Remarque 7** Si  $h_1$  et  $h_2$  sont deux fonctions strictement décroissantes, alors la copule du vecteur aléatoire de  $(h_1(X_1), h_2(X_2))$  est la copule de survie du vecteur aléatoire  $(X_1, X_2)$  :

$$\mathbf{C}\langle h_1(X_1), h_2(X_2) \rangle = \check{\mathbf{C}}\langle X_1, X_2 \rangle \quad (3.14)$$

Si  $h_1$  est croissante et  $h_2$  est décroissante, nous avons

$$\mathbf{C}\langle h_1(X_1), h_2(X_2) \rangle(u_1, u_2) = u_1 - \mathbf{C}\langle X_1, X_2 \rangle(u_1, 1 - u_2)$$

## 3.2 Composantes singulières

Selon NELSEN [1999] page 23, toute copule  $\mathbf{C}$  est la somme de deux composantes :

$$\mathbf{C}(u_1, u_2) = A\langle \mathbf{C} \rangle(u_1, u_2) + S\langle \mathbf{C} \rangle(u_1, u_2) \quad (3.15)$$

où

$$A\langle \mathbf{C} \rangle(u_1, u_2) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \partial_{1,2}\mathbf{C}(u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (3.16)$$

et

$$S\langle \mathbf{C} \rangle(u_1, u_2) = \mathbf{C}(u_1, u_2) - A\langle \mathbf{C} \rangle(u_1, u_2) \quad (3.17)$$

Nous appelons  $A\langle \mathbf{C} \rangle$  et  $S\langle \mathbf{C} \rangle$  respectivement la composante absolument continue (*absolute continuous component*) et la composante singulière (*singular component*) de la copule. Ces terminologies viennent du fait que si  $S\langle \mathbf{C} \rangle = 0$ , alors  $c(u_1, u_2) = \partial_{1,2}\mathbf{C}(u_1, u_2)$  est la densité de la copule. Nous pouvons donc classer les copules en trois catégories :

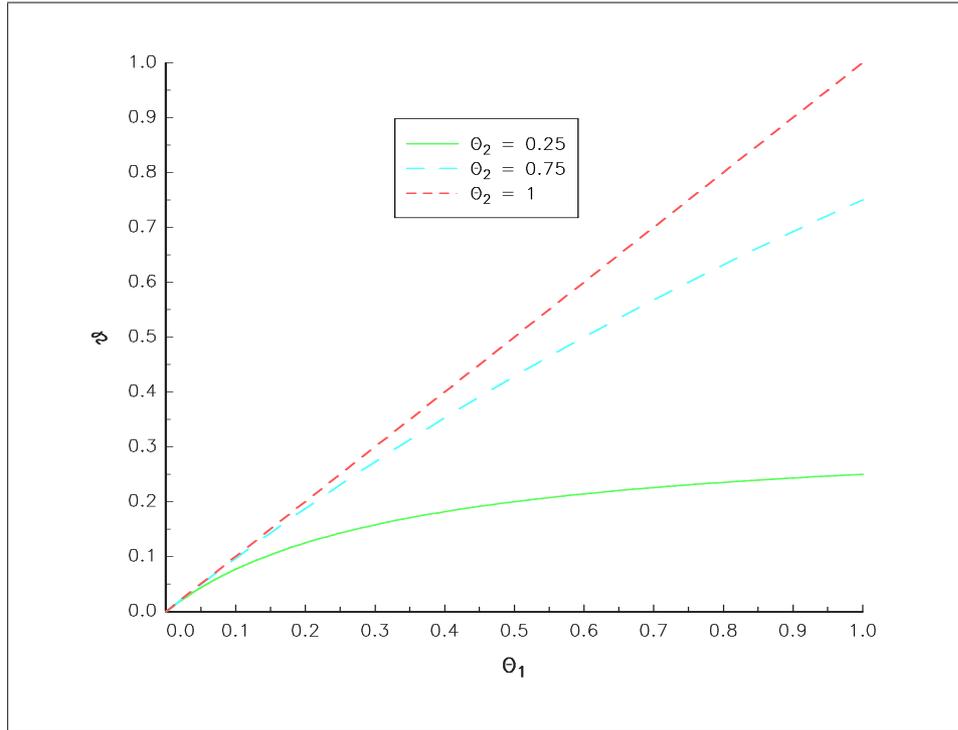
1. Si  $\mathbf{C} = A\langle \mathbf{C} \rangle$ , alors  $\mathbf{C}$  est absolument continue ;
2. Si  $\mathbf{C} = S\langle \mathbf{C} \rangle$ , alors  $\mathbf{C}$  est singulière et ne possède pas de densité :

$$c(u_1, u_2) = 0 \quad (3.18)$$

3. Si  $\mathbf{C} = A\langle \mathbf{C} \rangle + S\langle \mathbf{C} \rangle$  avec  $A\langle \mathbf{C} \rangle \neq 0$  et  $S\langle \mathbf{C} \rangle \neq 0$ , alors  $\mathbf{C}$  présente une composante singulière.

Par exemple,  $\mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C}^+$  sont singulières, alors que  $\mathbf{C}^\perp$  est absolument continue de densité  $c^\perp(u_1, u_2) = 1$ . Dans le cas où  $\mathbf{C}$  présente une composante singulière, nous pouvons introduire une mesure de singularité en remarquant que  $\mathbf{C}(1, 1) = 1$  est le 2-volume dans  $[0, 1]^2$ . Il vient que  $\mathbf{C}(1, 1) = A\langle \mathbf{C} \rangle(1, 1) + S\langle \mathbf{C} \rangle(1, 1)$  et donc  $0 \leq S\langle \mathbf{C} \rangle(1, 1) \leq 1$ . D'après NELSEN [1999] page 23,  $\vartheta = S\langle \mathbf{C} \rangle(1, 1)$  est appelé la mesure de singularité ("the  $\mathbf{C}$ -measure of the singular component").

**Exemple 8** Nelsen considère l'exemple de la copule Marshall-Olkin  $\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta_1, \theta_2) = \min(u_1^{1-\theta_1}u_2, u_1u_2^{1-\theta_2})$  et montre que  $\vartheta = \frac{\theta_1\theta_2}{\theta_1+\theta_2-\theta_1\theta_2}$  (page 48 de NELSEN [1999]). Sur le graphique 3.1, nous représentons la mesure de singularité  $\vartheta$  pour la copule Marshall-Olkin lorsque les deux paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$  varient. Nous remarquons que  $\vartheta$  est une fonction croissante de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . La copule est singulière lorsque  $\theta_1 = \theta_2 = 1$ . Dans ce cas, nous retrouvons la copule Fréchet  $\mathbf{C}(u_1, u_2; 1, 1) = \min(u_2, u_1) = \mathbf{C}^+(u_1, u_2)$ . Lorsque  $\theta_1 = 0$  ou  $\theta_2 = 0$ , la copule Marshall-Olkin devient la copule  $\mathbf{C}^\perp$ , et dans ce cas est absolument continue. Dans les autres cas, elle présente une composante singulière ( $0 < \vartheta < 1$ ).



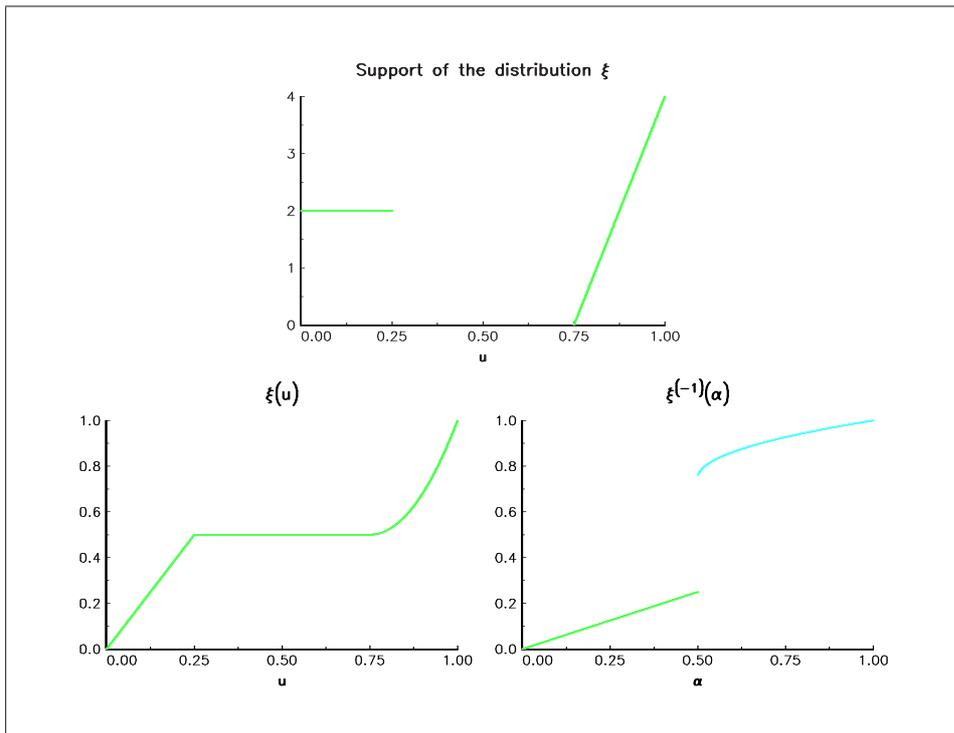
Graphique 3.1. Mesure de singularité de la copule Marshall-Olkin

Remarquons que lorsqu'une copule est singulière, il peut être intéressant de représenter le graphe de son support. Dans le cas de la copule borne basse de Fréchet, la masse de probabilité se concentre sur l'anti-diagonale  $u_2 = u_1 - 1$ , alors qu'elle se concentre sur la diagonale principale pour la copule borne haute de Fréchet. Nous pouvons aussi représenter le graphe du support de la composante singulière lorsque la copule n'est pas absolument continue. Dans le cas de la copule de Marshall-Olkin, le support de la composante singulière est la courbe  $u_2 = u_1^{\theta_2/\theta_1}$ . Sur le graphique 3.3, nous reportons le support de  $\mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C}^+$  ainsi que de la composante singulière de la copule Marshall-Olkin ( $\theta_1 = 0.5$ ,  $\theta_2 = 0.75$ ). Nous représentons aussi les supports associés lorsque les marginales ne sont pas uniformes. Les axes  $x$  et  $y$  correspondent respectivement à une distribution normale standard  $\Phi$  et à une distribution  $\mathbf{t}_3$ .  $\xi$  est une variable aléatoire de distribution discontinue (graphique 3.2). Nous remarquons que lorsqu'au moins une des distributions n'est pas continue, le graphe du support de la distribution multidimensionnelle peut être très compliqué. Par exemple, nous remarquons que le support de la composante singulière de la distribution bivariable avec des marges  $\xi$  et une copule Marshall-Olkin consiste en trois courbes (a), (b) et (c). L'existence de ces trois (et non deux) courbes provient du fait que  $\xi$  contient **un** point de discontinuité (voir les régions correspondantes de la copule Marshall-Olkin sur le graphique 3.5).

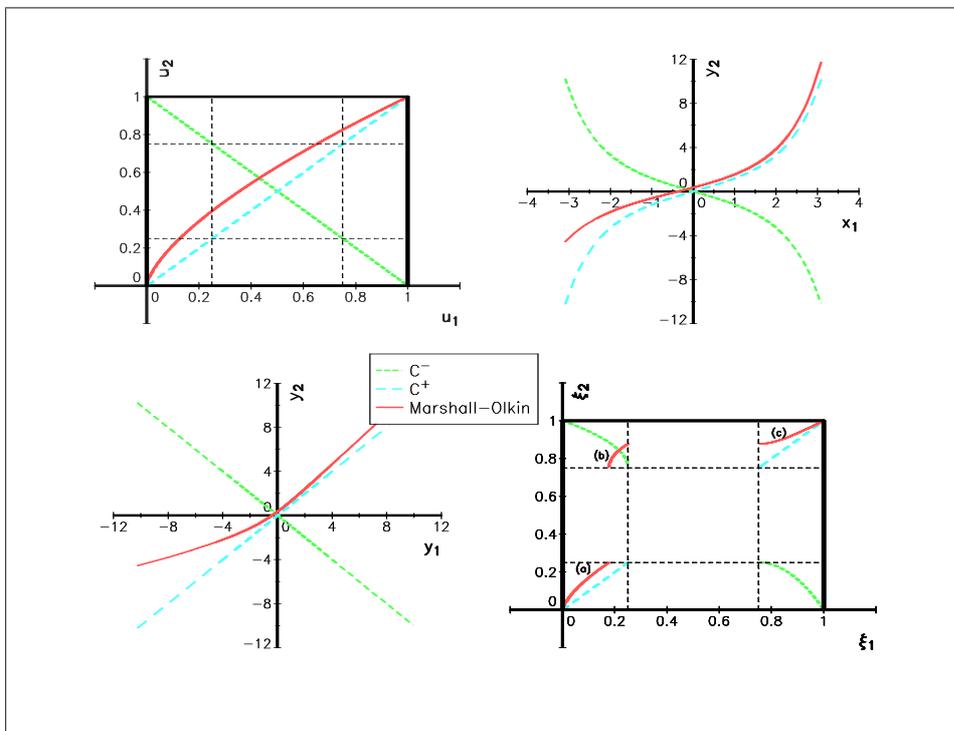
**Remarque 8** *L'une des premières études concernant les composantes singulières est celle de GENEST et MACKEY [1986]. Néanmoins, la singularité dans les distributions est peu traitée dans les manuels classiques de distributions multivariées (c'est par exemple le cas de KOTZ, BALAKRISHNAN et JOHNSON [2000]). Pourtant, la singularité joue un rôle important dans les copules (MIKUSIŃSKI, SHERWOOD et TAYLOR [1992], WEI, FANG et FANG [1998]).*

### 3.3 Mesures de dépendance

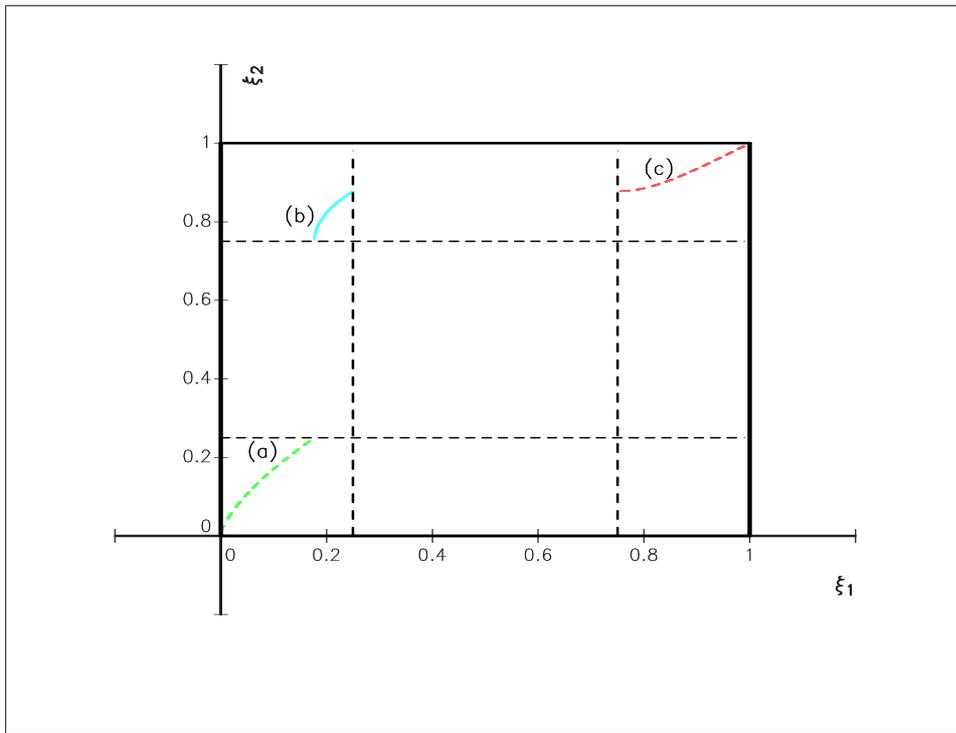
Nous pouvons interpréter la copule du vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  comme une reparamétrisation ou une normalisation de la distribution jointe  $\mathbf{F}$  après avoir éliminé les effets des marges  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$ . De façon tout à fait indépendante, Paul Deheuvels a redécouvert l'outil copule à la fin des années 70 et lui a donné le nom de **fonction de dépendance**. La copule est en fait la structure de dépendance de  $\mathbf{X}$ . De plus, c'est une statistique **exhaustive** de cette dépendance. Considérons une statistique (**non exhaustive**) de la dépendance, c'est-à-dire une mesure (ou un résumé) de la dépendance. Celle-ci sera effectivement une mesure de dépendance si elle s'exprime exclusivement à partir de la copule.



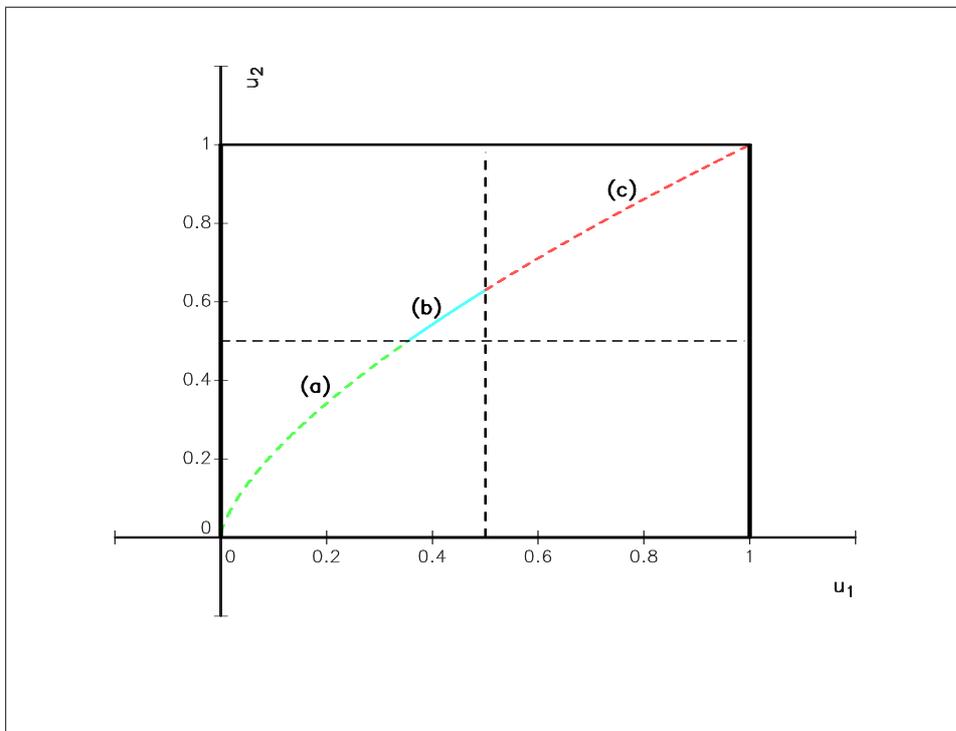
Graphique 3.2. Support, fonction de répartition et fonction quantile de la variable aléatoire  $\xi$



Graphique 3.3. Support des différentes copules et distributions



Graphique 3.4. Support de la distribution du vecteur aléatoire  $(\xi_1, \xi_2)$  lorsque la copule est Marshall-Olkin



Graphique 3.5. Supports de la copule Marshall-Olkin correspondants aux courbes (a), (b) et (c) du graphique 3.4

Parmi ces statistiques, nous pouvons considérer de façon générale les mesures de concordance.

**Définition 5** Une mesure numérique  $\kappa$  d'association entre deux variables aléatoires continues  $X_1$  et  $X_2$  dont la copule est  $\mathbf{C}$  est une mesure de concordance si elle satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\kappa$  est définie pour toute paire  $(X_1, X_2)$  de variables aléatoires continues ;
2.  $-1 = \kappa \langle X, -X \rangle \leq \kappa \langle \mathbf{C} \rangle \leq \kappa \langle X, X \rangle = 1$  ;
3.  $\kappa \langle X_1, X_2 \rangle = \kappa \langle X_2, X_1 \rangle$  ;
4. si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, alors  $\kappa \langle X_1, X_2 \rangle = \kappa \langle \mathbf{C}^\perp \rangle = 0$  ;
5.  $\kappa \langle -X_1, X_2 \rangle = \kappa \langle X_1, -X_2 \rangle = -\kappa \langle X_1, X_2 \rangle$  ;
6. si  $\mathbf{C}_1 \prec \mathbf{C}_2$ , alors  $\kappa \langle \mathbf{C}_1 \rangle \leq \kappa \langle \mathbf{C}_2 \rangle$  ;
7. si  $\{(X_{1,m}, X_{2,m})\}$  est une séquence de variables aléatoires continues dont la copule est  $\mathbf{C}_m$ , et si  $\{\mathbf{C}_m\}$  converge vers  $\mathbf{C}$  (pointwise convergence), alors  $\lim_{m \rightarrow \infty} \kappa \langle \mathbf{C}_m \rangle = \kappa \langle \mathbf{C} \rangle$ .

Nous comprenons mieux pourquoi  $\kappa$  est appelé une mesure de concordance puisque l'ordre de concordance implique l'ordre sur  $\kappa$  (propriété 6). Parmi toutes les mesures de concordance, trois mesures très célèbres jouent un rôle important en statistiques non paramétriques : le tau de Kendall, le rho de Spearman et l'indice de Gini. Elles peuvent toutes les trois s'exprimer à l'aide de la copule, et nous avons (SCHWEITZER et WOLFF [1981])

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \iint_{[0,1]^2} \mathbf{C}(u_1, u_2) d\mathbf{C}(u_1, u_2) - 1 \\ \varrho &= 12 \iint_{[0,1]^2} u_1 u_2 d\mathbf{C}(u_1, u_2) - 3 \\ \gamma &= 2 \iint_{[0,1]^2} (|u_1 + u_2 - 1| - |u_1 - u_2|) d\mathbf{C}(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ces formules sont difficiles à manier, car elle font intervenir la différentielle  $d\mathbf{C}(u_1, u_2)$  de la copule. D'un point de vue numérique, il est plus facile de les calculer avec les expressions équivalentes suivantes (NELSEN [1999]) :

$$\begin{aligned} \tau &= 1 - 4 \iint_{[0,1]^2} \partial_{u_1} \mathbf{C}(u_1, u_2) \partial_{u_2} \mathbf{C}(u_1, u_2) du_1 du_2 \\ \varrho &= 12 \iint_{[0,1]^2} \mathbf{C}(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3 \\ \gamma &= 4 \int_{[0,1]} (\mathbf{C}(u, u) + \mathbf{C}(u, 1 - u) - u) du \end{aligned} \quad (3.20)$$

#### Code GAUSS 7 (Calcul du tau de Kendall par intégration numérique)

```

/*
**> KendallCopula
**
*/

proc KendallCopula(Copula);
    local tau;
    _CopulaFunction = Copula;
    tau = 1 - 4 * intquad2(&_KendallCopula,1|0,1|0);
    retp(tau);
endp;

proc _KendallCopula(u1,u2);
    local dC1,dC2;
    {dC1,dC2} = gradp2D(_CopulaFunction,u1,u2);
    retp( dC1 .* dC2 );
endp;

```

```

/*
**> gradp2D
**
*/

proc (2) = gradp2D(f,x0,y0);
  local f:proc;
  local grddx,grddy,dh,ax0,ay0,xdh,ydh,dax0,day0,f0;

  /* check for complex input */
  if iscplx(x0);
    if hasimag(x0);
      errorlog ''ERROR: Not implemented for complex matrices.'';
    end;
  else;
    x0 = real(x0);
  endif;
endif;

  /* check for complex input */
  if iscplx(y0);
    if hasimag(y0);
      errorlog ''ERROR: Not implemented for complex matrices.'';
    end;
  else;
    y0 = real(y0);
  endif;
endif;

  f0 = f(x0,y0);

  /* Computation of stepsize (dh) for gradient */

  ax0 = abs(x0);
  if x0 /= 0;
    dax0 = x0./ax0;
  else;
    dax0 = 1;
  endif;
  dh = (1e-8)*maxc((ax0^(1e-2)*ones(rows(x0),1))').*dax0;
  xdh = x0+dh;
  dh = xdh-x0;    /* This increases precision slightly */

  grddx = (f(xdh,y0)-f0)./dh;

  /* Computation of stepsize (dh) for gradient */

  ay0 = abs(y0);
  if y0 /= 0;
    day0 = y0./ay0;
  else;
    day0 = 1;
  endif;
  dh = (1e-8)*maxc((ay0^(1e-2)*ones(rows(y0),1))').*day0;
  ydh = y0+dh;
  dh = ydh-y0;    /* This increases precision slightly */

```

```

grddy = (f(x0,ydh)-f0)/dh;

  retp(grddx,grddy);
endp;

```

Code GAUSS 8 (Calcul du rho de Spearman par intégration numérique)

```

/*
**> SpearmanCopula
**
*/

proc SpearmanCopula(C);
  local varrho;
  varrho = 12 * intquad2(C,1|0,1|0) - 3;
  retp(varrho);
endp;

```

Code GAUSS 9 (Calcul du coefficient de Gini par intégration numérique)

```

/*
**> GiniCopula
**
*/

proc GiniCopula(Copula);
  _CopulaFunction = Copula;
  retp( 4 * intquad1(&_GiniCopula,1|0) );
endp;

proc _GiniCopula(u);
  local Copula;
  Copula = _CopulaFunction;
  local Copula:proc;
  retp( Copula(u,1-u) + Copula(u,u) - u );
endp;

```

**Remarque 9** *Considérons un échantillon de  $m$  observations  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$  du vecteur aléatoire  $(X, Y)$ . Le tau de Kendall est la probabilité de concordance  $-(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0$  — moins la probabilité de discordance des paires  $-(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) < 0$ . Le rho de Spearman est la corrélation des statistiques de rang  $R_X$  et  $R_Y$  :*

$$\varrho = \text{cor}(\mathbf{F}_X(X), \mathbf{F}_Y(Y)) \quad (3.21)$$

**Définition 6** *Une mesure numérique  $\delta$  d'association entre deux variables aléatoires continues  $X_1$  et  $X_2$  dont la copule est  $\mathbf{C}$  est une mesure de dépendance si elle satisfait les propriétés suivantes :*

1.  $\delta$  est définie pour toute paire  $(X_1, X_2)$  de variables aléatoires continues;
2.  $0 = \delta \langle \mathbf{C}^\perp \rangle \leq \delta \langle \mathbf{C} \rangle \leq \delta \langle \mathbf{C}^+ \rangle = 1$ ;
3.  $\delta \langle X_1, X_2 \rangle = \delta \langle X_2, X_1 \rangle$ ;
4.  $\delta \langle X_1, X_2 \rangle = \delta \langle \mathbf{C}^\perp \rangle = 0$  **si et seulement si**  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes;
5.  $\delta \langle X_1, X_2 \rangle = \delta \langle \mathbf{C}^+ \rangle = \delta \langle \mathbf{C}^- \rangle = 1$  **si et seulement si**  $X_1$  est une fonction strictement monotone de  $X_2$ ;
6. si  $h_1$  et  $h_2$  sont des fonctions strictement monotones respectivement sur  $\text{Im } X_1$  et  $\text{Im } X_2$ , alors

$$\delta \langle h_1(X_1), h_2(X_2) \rangle = \delta \langle X_1, X_2 \rangle \quad (3.22)$$

7. si  $\{(X_{1,m}, X_{2,m})\}$  est une séquence de variables aléatoires continues dont la copule est  $\mathbf{C}_m$ , et si  $\{\mathbf{C}_m\}$  converge vers  $\mathbf{C}$  (pointwise convergence), alors  $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta \langle \mathbf{C}_m \rangle = \delta \langle \mathbf{C} \rangle$ .

SCHWEITZER et WOLFF [1981] donnent différentes mesures qui vérifient cette définition :

$$\begin{aligned}\sigma &= 12 \iint_{[0,1]^2} |\mathbf{C}(u_1, u_2) - \mathbf{C}^\perp(u_1, u_2)| \, du_1 \, du_2 \\ \Phi^2 &= 90 \iint_{[0,1]^2} |\mathbf{C}(u_1, u_2) - \mathbf{C}^\perp(u_1, u_2)|^2 \, du_1 \, du_2\end{aligned}\quad (3.23)$$

Code GAUSS 10 (Calcul numérique de  $\sigma$  et  $\Phi^2$ )

```
/*
**> sigmaCopula
**
*/

proc sigmaCopula(Copula);
  _CopulaFunction = Copula;
  retp( 12*intquad2(&_sigmaCopula,1|0,1|0) );
endp;

proc _sigmaCopula(u1,u2);
  local Copula;
  Copula = _CopulaFunction;
  local Copula:proc;
  retp( abs(Copula(u1,u2) - cdfCopulaProduct2(u1,u2)) );
endp;

/*
**> PhiSqrCopula
**
*/

proc PhiSqrCopula(Copula);
  _CopulaFunction = Copula;
  retp( 90*intquad2(&PhiSqrCopula,1|0,1|0) );
endp;

proc _PhiSqrCopula(u1,u2);
  local Copula;
  Copula = _CopulaFunction;
  local Copula:proc;
  retp( (Copula(u1,u2) - cdfCopulaProduct2(u1,u2))^2 );
endp;
```

**Remarque 10** Nous pouvons interpréter les mesures de concordance comme une **généralisation** de la corrélation linéaire dans le cas où la distribution bivariable n'est pas gaussienne. Elles prennent ainsi la valeur -1 pour la structure de dépendance la plus négative  $\mathbf{C}^-$  (qui correspond à une corrélation linéaire égale à -1 dans le cas gaussien) et +1 pour la structure de dépendance la plus positive  $\mathbf{C}^+$  (qui correspond à une corrélation linéaire égale à +1 dans le cas gaussien). Ces deux copules représentent la forme de dépendance la plus extrême, c'est-à-dire que les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont parfaitement dépendantes puisque

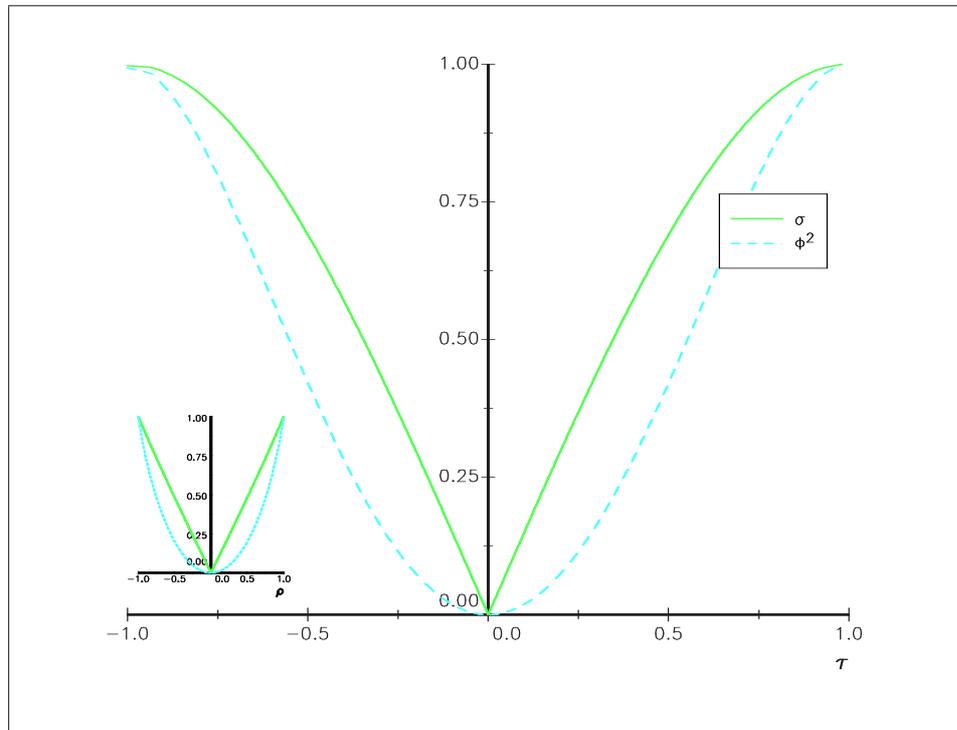
$$X_2 = f(X_1) \quad (3.24)$$

avec  $f$  une fonction déterministe. Néanmoins, les mesures de dépendance ne prennent la valeur 1 que si cette dépendance est **monotone**. Donc, il existe de nombreuses copules qui correspondent à des dépendances parfaites et dont  $\delta$  est strictement inférieur à 1 (les copules les plus célèbres sont les "shuffles of min").

**Remarque 11** Pour la famille des copules Normales, nous vérifions que

$$\delta \langle \mathbf{C}_\rho \rangle = \delta \langle \mathbf{C}_{-\rho} \rangle \quad (3.25)$$

Cela veut dire qu'une corrélation  $\rho$  d'un vecteur gaussien implique le même degré de dépendance entre les variables aléatoires qu'une corrélation  $-\rho$  d'un vecteur gaussien (ce qui semble logique).



Graphique 3.6. Mesures de dépendance  $\sigma$  et  $\Phi^2$  pour la copule Normale

**Remarque 12**  $\delta \langle \mathbf{C} \rangle = 0$  si et seulement si  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^\perp$ . Cette propriété n'est pas vérifiée par les mesures de concordance et la corrélation linéaire.

### 3.4 Et la corrélation ?

Nous pouvons nous demander si le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est une mesure de concordance ? Nous rappelons que l'expression de ce coefficient est

$$\rho \langle X_1, X_2 \rangle = \frac{\mathbb{E} [X_1 X_2] - \mathbb{E} [X_1] \mathbb{E} [X_2]}{\sigma [X_1] \sigma [X_2]} \quad (3.26)$$

En utilisant les travaux de TCHEN [1980] sur les fonctions superadditives, nous pouvons montrer les résultats suivants :

- (4) Si la copule de  $(X_1, X_2)$  est  $\mathbf{C}^\perp$ , alors  $\rho \langle X_1, X_2 \rangle = 0$  ;
- (6)  $\rho$  est une mesure croissante par rapport à l'ordre de concordance :

$$\mathbf{C}_1 \succ \mathbf{C}_2 \Rightarrow \rho_1 \langle X_1, X_2 \rangle \geq \rho_2 \langle X_1, X_2 \rangle \quad (3.27)$$

- (2')  $\rho \langle X_1, X_2 \rangle$  est bornée

$$\rho^- \langle X_1, X_2 \rangle \leq \rho \langle X_1, X_2 \rangle \leq \rho^+ \langle X_1, X_2 \rangle \quad (3.28)$$

et les bornes sont atteintes pour les copules Fréchet  $\mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C}^+$ .

Il est évident que les propriétés (1), (3), (5) et (7) sont aussi vérifiées. Pour la propriété (5), nous avons en effet

$$\begin{aligned}
\rho \langle -X_1, X_2 \rangle &= \frac{\mathbb{E}[-X_1 X_2] - \mathbb{E}[-X_1] \mathbb{E}[X_2]}{\sigma[-X_1] \sigma[X_2]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[-X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[-X_2]}{\sigma[X_1] \sigma[-X_2]} \\
&= \rho \langle X_1, -X_2 \rangle \\
&= -\frac{\mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2]}{\sigma[X_1] \sigma[X_2]} \\
&= -\rho \langle X_1, X_2 \rangle
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Néanmoins, si les propriétés (1)-(7) sont vérifiées, alors nous avons

$$\kappa \langle \mathbf{C}^- \rangle = -1 \tag{3.30}$$

et

$$\kappa \langle \mathbf{C}^+ \rangle = +1 \tag{3.31}$$

Si nous utilisons l'interprétation des bornes de Fréchet en terme de variables aléatoires, nous avons

$$\rho^- \langle X_1, X_2 \rangle = \rho^+ \langle X_1, X_2 \rangle = \frac{\mathbb{E}[f_1(X) f_2(X)] - \mathbb{E}[f_1(X)] \mathbb{E}[f_2(X)]}{\sigma[f_1(X)] \sigma[f_2(X)]} \tag{3.32}$$

Janos Aczel a montré que la solution de l'équation  $\rho^- \langle X_1, X_2 \rangle = -1$  est

$$f_1(x) = a_1 x + b \tag{3.33}$$

et

$$f_2(x) = a_2 x + b \tag{3.34}$$

avec  $a_1 a_2 < 0$ . Pour l'équation  $\rho^+ \langle X_1, X_2 \rangle = 1$ , la condition est  $a_1 a_2 > 0$ . En dehors des variables aléatoires gaussiennes, il existe très peu de variables aléatoires capables de satisfaire ces conditions. Notons aussi que si le coefficient de corrélation de Pearson est une mesure de concordance, alors **il doit être invariant par transformations croissantes** :

$$\rho \langle X_1, X_2 \rangle = \rho \langle f_1(X_1), f_2(X_2) \rangle \tag{3.35}$$

Une nouvelle fois, la solution de cette équation est  $f_1(x) = a_1 x + b$  et  $f_2(x) = a_2 x + b$  avec  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$ . Nous comprenons beaucoup mieux pourquoi cette mesure est dite **linéaire**.

A titre d'illustration, nous considérons le modèle de Black et Scholes avec deux actifs. Les prix des actifs  $S_1(t)$  and  $S_2(t)$  sont des processus de diffusion dont la représentation SDE est

$$\begin{cases} dS_1(t) = \mu_1 S_1(t) dt + \sigma_1 S_1(t) dW_1(t) \\ dS_2(t) = \mu_2 S_2(t) dt + \sigma_2 S_2(t) dW_2(t) \end{cases} \tag{3.36}$$

où  $W_1(t)$  et  $W_2(t)$  sont deux  $\mathcal{F}_{t-}$  mouvements browniens avec

$$\mathbb{E}[W_1(t) W_2(t) | \mathcal{F}_{t_0}] = \rho(t - t_0) \tag{3.37}$$

Nous pouvons montrer que (WANG [1999])

$$\rho^- \leq \rho \langle S_1(t), S_2(t) \rangle \leq \rho^+ \tag{3.38}$$

avec

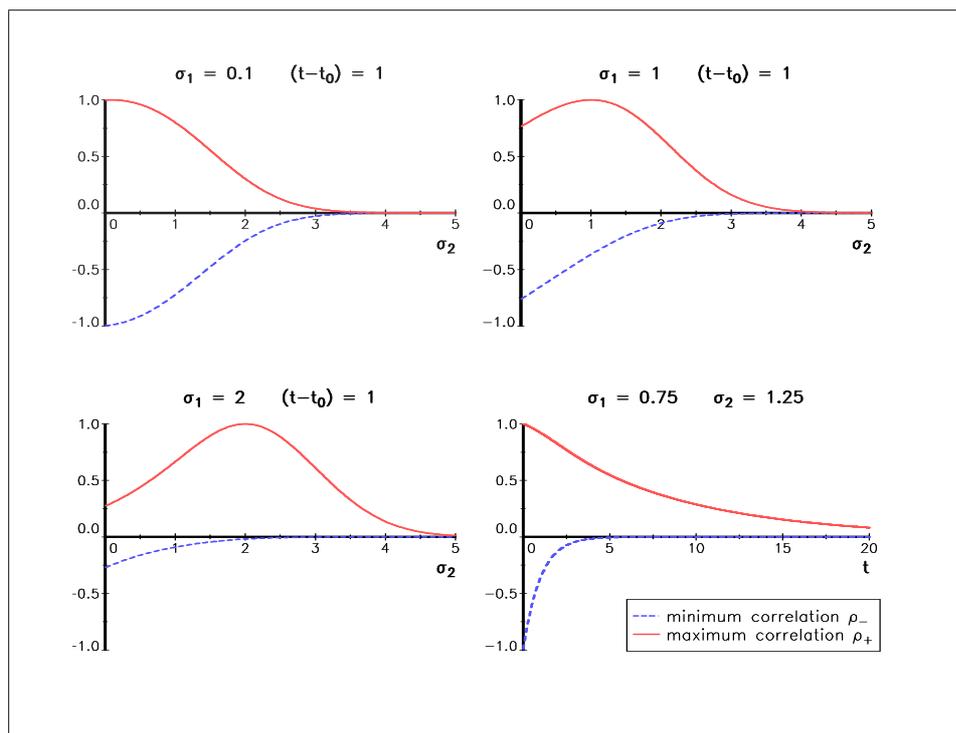
$$\rho^\pm = \frac{\exp(\pm \sigma_1 \sigma_2 (t - t_0)) - 1}{\sqrt{\exp(\sigma_1^2 (t - t_0)) - 1} \cdot \sqrt{\exp(\sigma_2^2 (t - t_0)) - 1}} \tag{3.39}$$

$\rho \langle S_1(t), S_2(t) \rangle = \rho^-$  (resp.  $\rho^+$ ) si et seulement  $\mathbf{C} \langle S_1(t), S_2(t) \rangle = \mathbf{C}^-$  ou encore  $\rho \langle W_1(t), W_2(t) \rangle = -1$  (resp.  $\mathbf{C} \langle S_1(t), S_2(t) \rangle = \mathbf{C}^+$  ou encore  $\rho \langle W_1(t), W_2(t) \rangle = +1$ ). Par exemple, si nous fixons  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 3$  et  $t - t_0 = 1$ , nous obtenons les résultats suivants

Copule	$\rho \langle S_1(t), S_2(t) \rangle$	$\tau \langle S_1(t), S_2(t) \rangle$	$\varrho \langle S_1(t), S_2(t) \rangle$
$\mathbf{C}^-$	-0.008	-1	-1
$\rho = -0.7$	$\simeq 0$	-0.49	-0.68
$\mathbf{C}^\perp$	0	0	0
$\rho = 0.7$	$\simeq 0.10$	0.49	0.68
$\mathbf{C}^+$	0.16	1	1

Lorsque la copule est  $\mathbf{C}^-$ , c'est-à-dire la structure de dépendance la plus négative possible, la corrélation prend une valeur proche de 0! Pour des marges données, la corrélation n'atteint pas systématiquement l'intervalle  $[-1, 1]$ . Cela pose des problèmes d'interprétation de la copule. Considérons deux vecteurs aléatoires  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  et  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$ . Que pouvons-nous dire si  $\rho \langle X_1, X_2 \rangle \geq \rho \langle Y_1, Y_2 \rangle \geq 0$ ? Pouvons-nous affirmer que la dépendance sur  $\mathbf{X}$  est plus forte que celle sur  $\mathbf{Y}$ ? A priori, non comme le montre l'exemple précédent. Considérons par exemple  $\mathbf{X}$  un vecteur gaussien standard de corrélation égale à 70%. Soit  $\mathbf{Y} = (\ln X_1, \ln X_2)$  le vecteur log-normal.  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  ont la même copule, donc la même structure de dépendance. Néanmoins, nous avons

$$\rho \langle X_1, X_2 \rangle = 0.7 \geq \rho \langle \exp X_1, \exp X_2 \rangle \simeq 0.10$$



Graphique 3.7. Intervalle de corrélation  $[\rho^-, \rho^+]$  lorsque  $(S_1(t), S_2(t))$  est un processus GBM bidimensionnel

### 3.5 Le tau de Kendall et le rho de Spearman

Revenons sur le tau de Kendall et le rho de Spearman. D'une certaine manière, ils jouent le même rôle pour les copules que celui de la corrélation pour la distribution gaussienne. Parfois, ils sont appelés des mesures de corrélation 'non-linéaire' (par opposition au caractère linéaire de la corrélation de Pearson). Nous rappelons

que leurs expressions sont

$$\begin{aligned}\tau &= 4 \iint_{[0,1]^2} \mathbf{C}(u_1, u_2) d\mathbf{C}(u_1, u_2) - 1 \\ \varrho &= 12 \iint_{[0,1]^2} u_1 u_2 d\mathbf{C}(u_1, u_2) - 3\end{aligned}\tag{3.40}$$

Pour certaines copules, nous disposons d'expressions analytiques. Par exemple, nous avons

Copule	$\varrho$	$\tau$
Normal	$6\pi^{-1} \arcsin(\rho/2)$	$2\pi^{-1} \arcsin(\rho)$
Gumbel	$\sqrt{\theta/3}$	$(\theta - 1)/\theta$
FGM	$\theta/3$	$2\theta/9$
Frank	$1 - 12\theta^{-1}(\mathbf{D}_1(\theta) - \mathbf{D}_2(\theta))$	$1 - 4\theta^{-1}(1 - \mathbf{D}_1(\theta))$

où  $\mathbf{D}_k(x)$  est la fonction Debye (ABRAMOWITZ et STEGUN [1970]). La copule Gumbel (ou Gumbel-Hougaard) a pour expression

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]^{1/\theta}\right)\tag{3.41}$$

#### Code GAUSS 11 (Distribution et densité de la copule Gumbel)

```
/*
**> cdfCopulaGumbel
**
*/

proc cdfCopulaGumbel(u1,u2,theta);
  retp( exp(-((-ln(u1))^theta+(-ln(u2))^theta)^(1./theta)) );
endp;

/*
**> pdfCopulaGumbel
**
*/

proc pdfCopulaGumbel(u1,u2,theta);
  local utilde,u2tilde,w,pdf;
  utilde = -ln(u1); u2tilde = -ln(u2);
  w = utilde^theta + u2tilde^theta;
  pdf = ((utilde .* u2tilde)^(theta-1)) .* ((w^(1./theta)) + theta - 1) ./
    (w^(2-1./theta)) ./ (u1 .* u2);
  retp(pdf .* cdfCopulaGumbel(u1,u2,theta));
endp;
```

#### Code GAUSS 12 (Distribution des copules Clayton et AMH)

```
/*
**> cdfCopulaClayton
**
*/

proc cdfCopulaClayton(u1,u2,theta);
  retp( ( u1^(-theta) + u2^(-theta) - 1)^(-1./theta) );
endp;

/*
**> cdfCopulaAMH
```

```

**
*/

proc cdfCopulaAMH(u1,u2,theta);
  retp( u1 .* u2 ./ (1 - theta .* (1-u1) .* (1-u2) ) );
endp;

Code GAUSS 13 (Calcul analytique des  $\tau$  et  $\rho$  de certaines copules)

/*
**> DebyeFunction
**
*/

proc DebyeFunction(x,k);
  local e,D;
  __DebyeFunction = k;
  e = x .>= 0;
  x = abs(x);
  D = intquad1(&_DebyeFunction,x'|zeros(1,rows(x))) .* (k ./ (x^k));
  D = e .* D + (1-e) .* (D + k .* x ./ (1 + k));
  retp(D);
endp;

proc _DebyeFunction(x);
  retp( (x^__DebyeFunction) ./ (exp(x) - 1) );
endp;

/*
**> diLogFunction
**
*/

proc diLogFunction(x);
  local d;
  d = intquad1(&_diLogFunction,x'|ones(1,rows(x)));
  retp(d);
endp;

proc _diLogFunction(x);
  retp( ln(x) ./ (1-x) );
endp;

/*
**> KendallCopulaNormal
**
*/

proc KendallCopulaNormal(rho);
  retp( 2 * arcsin(missex(rho, abs(rho) .> 1)) ./ pi );
endp;

/*
**> SpearmanCopulaNormal
**
*/

proc SpearmanCopulaNormal(rho);

```

```

    retp( 6 * arcsin(missex(rho, abs(rho) .> 1)/2) ./ pi );
endp;

/*
**> KendallCopulaFGM
**
*/

proc KendallCopulaFGM(theta);
    retp( 2 * missex(theta, abs(theta) .> 1) / 9 );
endp;

/*
**> SpearmanCopulaFGM
**
*/

proc SpearmanCopulaFGM(theta);
    retp( missex(theta, abs(theta) .> 1) / 3 );
endp;

/*
**> KendallCopulaFrank
**
*/

proc KendallCopulaFrank(theta);
    theta = miss(theta,0);
    retp( 1 - 4 .* (1-DebyeFunction(theta,1)) ./ theta );
endp;

/*
**> SpearmanCopulaFrank
**
*/

proc SpearmanCopulaFrank(theta);
    theta = miss(theta,0);
    retp( 1 - 12 .* (DebyeFunction(theta,1)-DebyeFunction(theta,2)) ./ theta );
endp;

/*
**> KendallCopulaAMH
**
*/

proc KendallCopulaAMH(theta);
    local tau;
    theta = missex(theta, abs(theta) .>= 1);
    tau = (3*theta-2) ./ (3*theta) - 2*((1-theta)^2).*ln(1-theta)./(3*theta^2);
    retp( substute(tau,0,theta .== 0) );
endp;

/*
**> SpearmanCopulaAMH
**
*/

```

```

proc SpearmanCopulaAMH(theta);
  local theta_sqr,varrho;
  theta = missex(theta, abs(theta) .>= 1);
  theta_sqr = theta^2;
  varrho = 12*(1+theta).*diLogFunction(1-theta)./theta_sqr -
          24.*(1-theta).*ln(1-theta)./theta_sqr - 3*(theta+12)./theta;
  retp(substute(varrho,0,theta .== 0));
endp;

/*
**> KendallCopulaClayton
**
*/

proc KendallCopulaClayton(theta);
  theta = missex(theta, theta .< 0);
  retp( theta ./ (theta + 2) );
endp;

/*
**> KendallCopulaGumbel
**
*/

proc KendallCopulaGumbel(theta);
  theta = missex(theta, theta .< 1);
  retp(1 - 1./theta);
endp;

/*
**> SpearmanCopulaPlackett
**
*/

proc SpearmanCopulaPlackett(theta);
  theta = missex(theta, theta .< 0);
  retp( (theta+1)./(theta-1) - 2*theta.*ln(theta)./((theta-1)^2) );
endp;

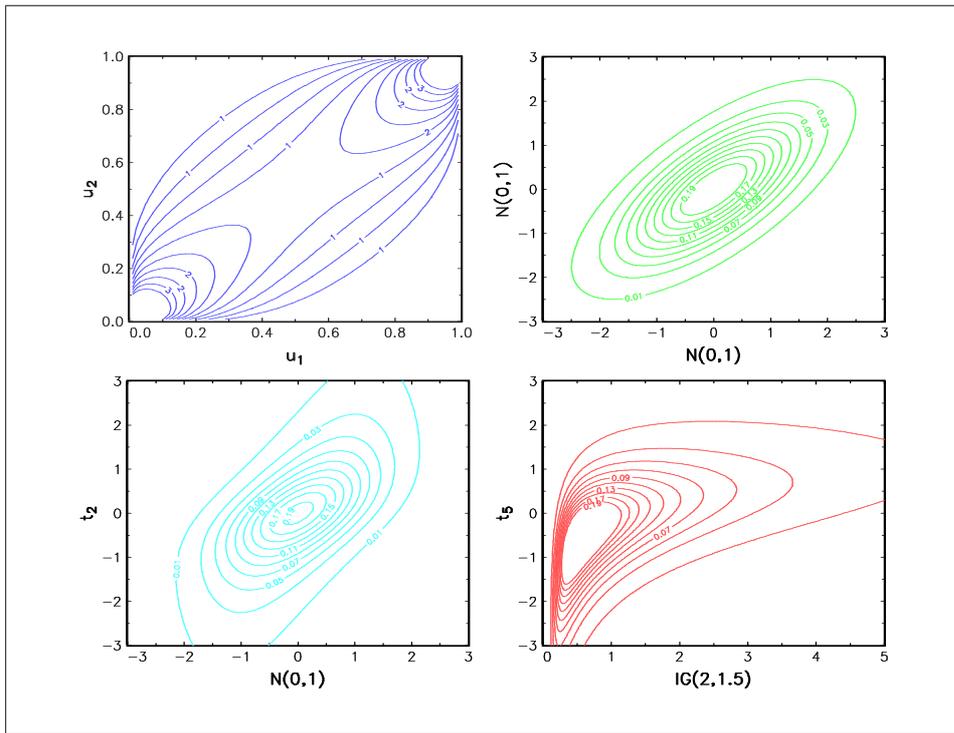
```

A titre d'illustration, nous construisons différentes distributions avec les copules Normale, Frank et Gumbel. Afin de pouvoir les comparer, les paramètres des copules ont été calibrés de telle façon que le tau de Kendall soit égal à 0.5. Cela veut dire que toutes ces distributions présentent la même dépendance au sens du tau de Kendall. Pourtant, nous voyons qu'elles sont difficilement comparables. Cependant, les distributions d'un même graphe ont la même dépendance puisqu'elles ont la même copule.

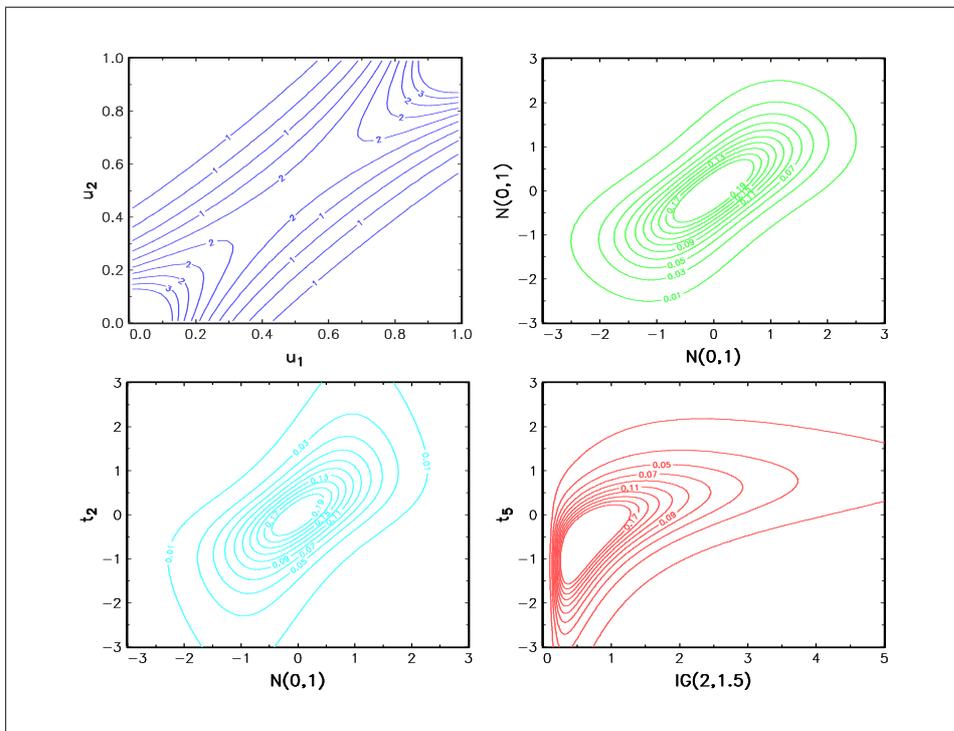
Nous pouvons construire des distributions bivariées qui sont encore moins comparables. Même si les copules Normale, Frank et Gumbel sont différentes, elles sont d'un certain point de vue assez "similaires". En fait, l'ensemble de ces trois copules est **très petit** par rapport à l'ensemble des copules  $\mathcal{C}$ . Il existe donc des structures de dépendance qui ne ressemblent pas du tout aux trois copules précédentes. Pour illustrer ce problème, nous considérons la région atteignable  $\mathcal{B}(\tau, \varrho)$  par les statistiques  $(\tau, \varrho)$  qui est définie par

$$(\tau, \varrho) \in \mathcal{B}(\tau, \varrho) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\tau-1}{2} \leq \varrho \leq \frac{1+2\tau-\tau^2}{2} & \tau \geq 0 \\ \frac{\tau^2+2\tau-1}{2} \leq \varrho \leq \frac{1+3\tau}{2} & \tau \leq 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

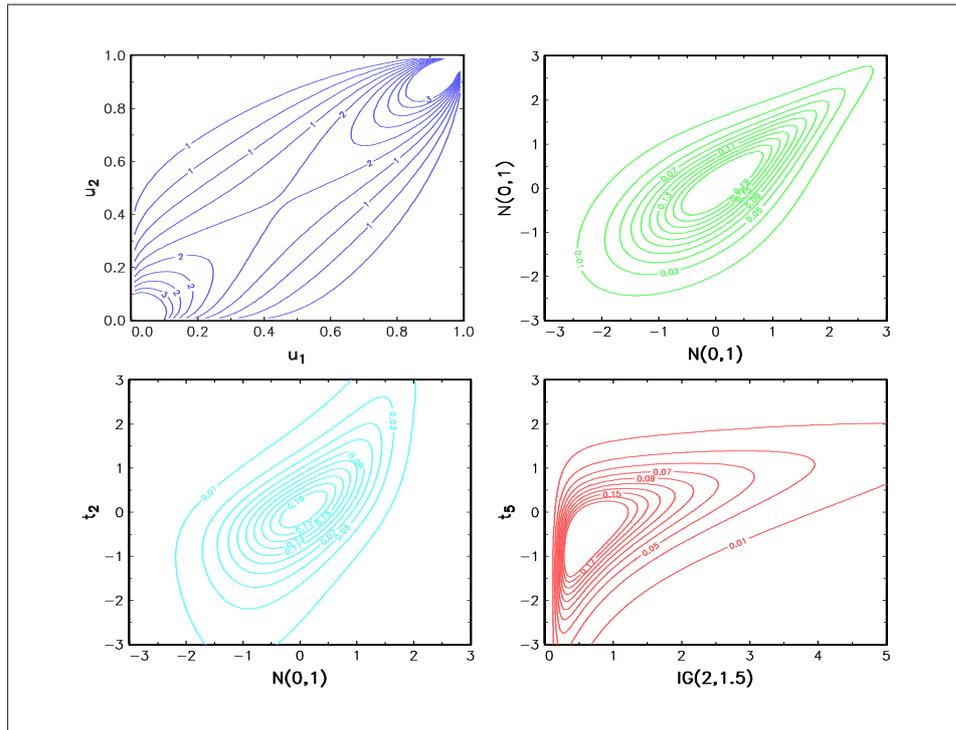
On peut montrer que ces bornes ne peuvent pas être améliorées et qu'il existe toujours une copule qui correspond à un point de la frontière  $\mathcal{B}(\tau, \varrho)$  — NELSEN [1999], page 145. Sur le graphique 3.11, nous représentons la frontière de  $\mathcal{B}(\tau, \varrho)$ , ainsi que la zone atteinte par huit familles de copules (Normal, Plackett, Frank, Clayton,



Graphique 3.8. Courbes de niveau de densités bivariées (copule Normale)



Graphique 3.9. Courbes de niveau de densités bivariées (copule Frank)



Graphique 3.10. Courbes de niveau de densités bivariées (copule Gumbel)

Gumbel, Galambos, Husler-Reiss, FGM). Même en prenant les familles plus courantes B1–B10 de JOE [1997], nous obtenons la même conclusion : ces copules occupent une toute petite surface de la région  $\mathcal{B}(\tau, \varrho)$ . Du point de vue des statistiques  $(\tau, \varrho)$ , ces dix familles sont relativement similaires. Cela veut donc dire qu'il existe des copules qui ont des comportements très différents de ces dix copules.

#### Code GAUSS 14 (Distributions des copules Plackett, Galambos et Hüsler-Reiss)

```

/*
**> cdfCopulaPlackett
**
*/

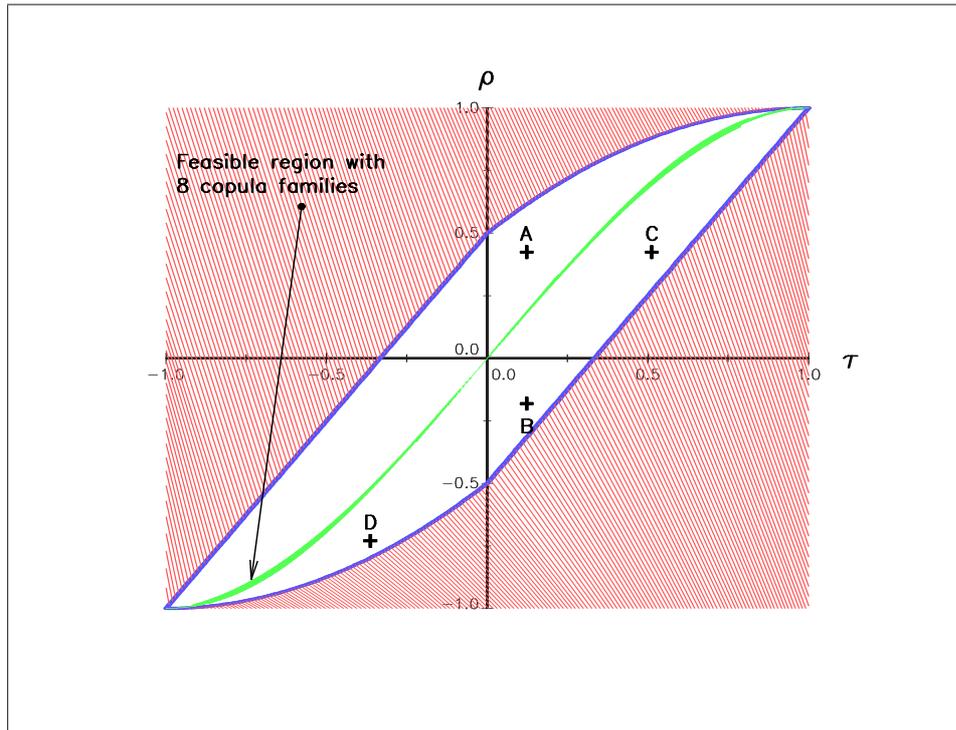
proc cdfCopulaPlackett(u1,u2,theta);
  local eta,w;
  eta = theta - 1;
  w = 1 + eta .* (u1 + u2);
  retp( 0.5 * (w - sqrt(w^2 - 4 * theta .* eta .* u1 .* u2)) ./ eta );
endp;

/*
**> pdfCopulaPlackett
**
*/

proc pdfCopulaPlackett(u1,u2,theta);
  local eta,w;
  eta = theta - 1;
  w = 1 + eta .* (u1 + u2);
  retp( theta .* (w - 2 * eta .* u1 .* u2) ./ ( (w^2 - 4 * theta .* eta .* u1 .* u2) ^1.5 ) );
endp;

/*

```



Graphique 3.11. Région atteignable des statistiques  $(\tau, \rho)$

```

**> cdfCopulaGalambos
**
*/

proc cdfCopulaGalambos(u1,u2,theta);
  local u1tilde,u2tilde;
  u1tilde = -ln(u1);
  u2tilde = -ln(u2);
  retp( u1 .* u2 .* exp( (u1tilde^(-theta) + u2tilde^(-theta))^( -1./theta ) ) );
endp;

/*
**> cdfCopulaHuslerReiss
**
*/

proc cdfCopulaHuslerReiss(u1,u2,theta);
  local u1tilde,u2tilde,phi1,phi2;
  u1tilde = -ln(u1);
  u2tilde = -ln(u2);
  phi1 = 1./theta + 0.5*theta.*ln(u1tilde./u2tilde);
  phi2 = 1./theta + 0.5*theta.*ln(u2tilde./u1tilde);
  retp( exp( (-u1tilde .* cdfn(phi1)) + (-u2tilde .* cdfn(phi2)) ) );
endp;

Code GAUSS 15 (Bornes  $\mathcal{B}(\tau, \rho)$ )

/*
**> KendallSpearmanBounds
**
*/

```

```

proc (2) = KendallSpearmanBounds(tau);
  local e, LowerBound, UpperBound;
  e = tau .>= 0;
  LowerBound = 0.5*(3*tau-1) .* e + 0.5*(tau^2 + 2*tau - 1) .* (1-e);
  UpperBound = 0.5*(3*tau+1) .* (1-e) + 0.5*(-tau^2 + 2*tau + 1) .* e;
  retp(LowerBound, UpperBound);
endp;

```

### 3.6 Autres concepts de dépendance

Il existe de nombreux concepts de dépendance (voir par exemple HUTCHINSON et LAI [1990]). Nous pouvons ainsi citer la dépendance positive par quadrant (*Positively Quadrant Dependence* ou **PQD**). Deux variables aléatoires  $(X_1, X_2)$  sont dites **PQD** si et seulement si nous vérifions la propriété suivante :

$$\Pr \{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \geq \Pr \{X_1 \leq x_1\} \Pr \{X_2 \leq x_2\} \quad (3.43)$$

pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Cette condition est équivalente à

$$\mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle \succ \mathbf{C}^\perp \quad (3.44)$$

De même, la dépendance négative par quadrant (*Negatively Quadrant Dependence* ou **NQD**) correspond à

$$\mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle \prec \mathbf{C}^\perp \quad (3.45)$$

Nous avons déjà évoqué ce type de dépendances. Plus simplement, nous dirons que  $\mathbf{C} \langle X_1, X_2 \rangle$  est une structure de dépendance positive (**PQD**) ou négative (**NQD**). Comme l'ordre de concordance n'est pas un ordre total, une copule peut être ni **PQD** ni **NQD**.

**Exemple 9** *La copule Normale est PQD si le paramètre prend une valeur positive, et NQD dans le cas contraire. C'est aussi le cas de la copule Frank.*

**Exercice 3** *Montrer que la copule Gumbel est PQD.*

Vous pouvez consulter HUTCHINSON et LAI [1990] ou NELSEN [1990] pour d'autres concepts de dépendance.

### 3.7 La dépendance de queue (*tail dependence*)

La théorie unidimensionnelle des valeurs extrêmes est fortement liée au comportement asymptotique de la distribution  $\mathbf{F}$ . Soit  $x^+$  et  $x^-$  les points droit et gauche du support de  $\mathbf{F}$ , c'est-à-dire

$$x^+ = \sup \{x : \mathbf{F}(x) < 1\} \quad (3.46)$$

et

$$x^- = \inf \{x : \mathbf{F}(x) > 0\} \quad (3.47)$$

La notion de queue épaisse (*heavy tail*) caractérise (**au sens de la théorie des valeurs extrêmes**) le comportement de  $\mathbf{F}$  au point  $x^+$  ou  $x^-$ . Cette caractérisation est liée à la propriété de variation régulière de  $\mathbf{F}$ .

**Définition 7** *Une fonction  $f$  est dite à variation régulière d'indice  $\alpha$  et on note  $f \in \text{RV}_\alpha$  si pour tout  $x > 0$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha \quad (3.48)$$

Les max-domaines d'attraction de la distribution Fréchet  $\Phi_\alpha$  ou Weibull  $\Psi_\alpha$  peuvent alors être définis de la façon suivante (pour la distribution du maximum) :

**Théorème 5**  *$\mathbf{F} \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  si et seulement si  $1 - \mathbf{F} \in \text{RV}_{-\alpha}$ .  $\mathbf{F} \in \text{MDA}(\Psi_\alpha)$  si et seulement si  $1 - \mathbf{F}(x^+ - x^{-1}) \in \text{RV}_{-\alpha}$  et  $x^+ < \infty$ .*

Dans le cas multidimensionnel, le problème est plus difficile puisque nous devons caractériser le comportement de  $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n)$  au point  $(x_1^+, \dots, x_n^+)$ . La décomposition canonique  $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_n(x_n))$  permet de simplifier largement ce problème :

1. l'existence des queues épaisses 'unidimensionnelles' est donnée par les résultats précédents ;
2. la question de la dépendance (ou de la 'corrélation') de ces queues fait appel à la notion de *tail dependence*.

**Définition 8** Si une copule bivariée  $\mathbf{C}$  est telle que la limite

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\bar{\mathbf{C}}(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + \mathbf{C}(u, u)}{1 - u} = \lambda \quad (3.49)$$

existe, alors  $\mathbf{C}$  a une dépendance de queue (**upper tail dependence**) si  $\lambda \in (0, 1]$  et n'a pas de dépendance de queue si  $\lambda = 0$ .

Dans le cas des queues gauches, nous avons un théorème analogue (JOE [1997]) :

**Définition 9** Si une copule bivariée  $\mathbf{C}$  est telle que la limite

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{C}(u, u)}{u} = \lambda \quad (3.50)$$

existe, alors  $\mathbf{C}$  a une dépendance de queue (**lower tail dependence**) si  $\lambda \in (0, 1]$  et n'a pas de dépendance de queue si  $\lambda = 0$ .

**Remarque 13** Pour distinguer les notions upper tail dependence et lower tail dependence, JOE [1997] note respectivement les mesures  $\lambda_U$  et  $\lambda_L$ .

**Remarque 14** D'un point de vue probabiliste, nous avons

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr \{U_2 > u \mid U_1 > u\} \quad (3.51)$$

et

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \Pr \{U_2 < u \mid U_1 < u\} \quad (3.52)$$

**Exemple 10** Pour la copule produit  $\mathbf{C}^\perp$ , nous avons

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + u^2}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} (1 - u) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Pour la copule  $\mathbf{C}^+$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + \min(u, u)}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + u}{1 - u} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Notons que pour la copule  $\mathbf{C}^-$ , la dépendance de queue est nulle

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + \max(2u - 1, 0)}{1 - u} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

**Exemple 11** Pour la copule produit  $\mathbf{C}^\perp$ , nous avons

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} u \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.56}$$

Pour la copule  $\mathbf{C}^+$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\min(u, u)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} 1 \\ &= 1\end{aligned}\tag{3.57}$$

Notons que pour la copule  $\mathbf{C}^-$ , la dépendance de queue est nulle

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\max(2u - 1, 0)}{u} \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.58}$$

Dans le cas des copules  $\mathbf{C}^-$ ,  $\mathbf{C}^\perp$  et  $\mathbf{C}^+$ , nous avons  $\lambda_L = \lambda_U$ . Néanmoins, cela n'est pas toujours le cas. Nous pouvons avoir une copule qui a une dépendance *upper tail* sans posséder une dépendance *lower tail*. Considérons par exemple la copule Gumbel. Nous avons

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]^{1/\theta}\right)\tag{3.59}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + u^{2^{1/\theta}}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{-2 + 2^{1/\theta} u^{2^{1/\theta} - 1}}{-1} \\ &= 2 - 2^{1/\theta}\end{aligned}\tag{3.60}$$

et

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{2^{1/\theta}}}{u} \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.61}$$

La copule Gumbel possède donc une dépendance *upper tail* mais pas une dépendance *lower tail*. Considérons maintenant la copule Clayton. Nous avons

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}\tag{3.62}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + (2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{1 - u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{-2 + 2(2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta - 1} u^{-\theta - 1}}{-1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{-2 + 2(2 - u^\theta)^{-1/\theta - 1}}{-1} \\ &= 0\end{aligned}\tag{3.63}$$

et

$$\begin{aligned}
\lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(2u^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}}{u} \\
&= \lim_{u \rightarrow 0} (2 - u^\theta)^{-1/\theta} \\
&= 2^{-\frac{1}{\theta}}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Revenons sur la signification de la mesure de dépendance *upper tail*. Considérons la mesure de dépendance quantile-quantile suivante :

$$\lambda(\alpha) = \Pr \{X_2 > \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha) \mid X_1 > \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)\} \tag{3.65}$$

C'est la probabilité conditionnelle que  $X_2$  est plus grand que le quantile  $\mathbf{F}_2^{-1}(\alpha)$  sachant que  $X_1$  est plus grand que le quantile  $\mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)$ . Ces deux quantiles correspondent au même seuil  $\alpha$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha) &= \Pr \{X_2 > \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha) \mid X_1 > \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)\} \\
&= \frac{\Pr \{X_2 > \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha), X_1 > \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)\}}{\Pr \{X_1 > \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)\}} \\
&= \frac{\Pr \{\mathbf{F}_2(X_2) > \alpha, \mathbf{F}_1(X_1) > \alpha\}}{\Pr \{\mathbf{F}_1(X_1) > \alpha\}} \\
&= \frac{1 - \Pr \{\mathbf{F}_1(X_1) \leq \alpha\} - \Pr \{\mathbf{F}_2(X_2) \leq \alpha\} + \Pr \{\mathbf{F}_2(X_2) \leq \alpha, \mathbf{F}_1(X_1) \leq \alpha\}}{1 - \Pr \{\mathbf{F}_1(X_1) \leq \alpha\}} \\
&= \frac{1 - 2\alpha + \mathbf{C}(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

La mesure de dépendance  $\lambda$  est donc la limite de cette probabilité conditionnelle lorsque  $\alpha$  tend vers 1 :

$$\lambda = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \lambda(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Pr \{X_2 > \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha) \mid X_1 > \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)\} \tag{3.67}$$

C'est donc la probabilité que  $X_2$  est extrême sachant que  $X_1$  est extrême. Comme c'est une probabilité, nous vérifions que

$$\lambda \in [0, 1] \tag{3.68}$$

Si cette probabilité est nulle, l'apparition d'un extrême en  $X_1$  n'a pas d'influence sur l'apparition d'un extrême en  $X_2$ . Nous pouvons dire que les extrêmes ne sont pas corrélés. Si  $\lambda$  est égal à 1, la probabilité est égale à 1. Les extrêmes sont parfaitement dépendants ou corrélés.

**Remarque 15** *Comme nous le verrons dans le chapitre sur les copules de valeurs extrêmes,  $\lambda$  est une mesure de 'corrélation'.*

**Remarque 16** *Considérons deux marchés financiers dont les pertes journalières sont modélisées par les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ . Nous cherchons à calculer la probabilité de dépasser la valeur en risque sur un des marchés sachant que celle-ci a été dépassée sur l'autre marché. Nous avons*

$$\begin{aligned}
\Pr \{X_2 > \text{VaR}_\alpha(X_2) \mid X_1 > \text{VaR}_\alpha(X_1)\} &= \Pr \{X_2 > \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha) \mid X_1 > \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)\} \\
&= \lambda(\alpha)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

**Remarque 17** *La mesure  $\lambda(\alpha)$  est appelée "quantile-quantile dependence measure" par COLES, CURRIE et TAWN [1999]. Nous pouvons aussi définir une mesure de dépendance quantile-quantile lorsque  $\alpha$  tend vers zéro :*

$$\lambda(\alpha) = \Pr \{X_2 < \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha) \mid X_1 < \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha)\} \tag{3.70}$$

*Afin de distinguer ces deux mesures, nous les notons respectivement  $\lambda_U(\alpha)$  et  $\lambda_L(\alpha)$ . Nous verrons que la mesure  $\lambda_L(\alpha)$  joue un rôle important dans la modélisation des survies multidimensionnelles, et donc dans le risque de crédit.*

## Code GAUSS 16 (Dépendances quantile-quantile upper et lower)

```

/*
**> qqUpperCopula
**
*/

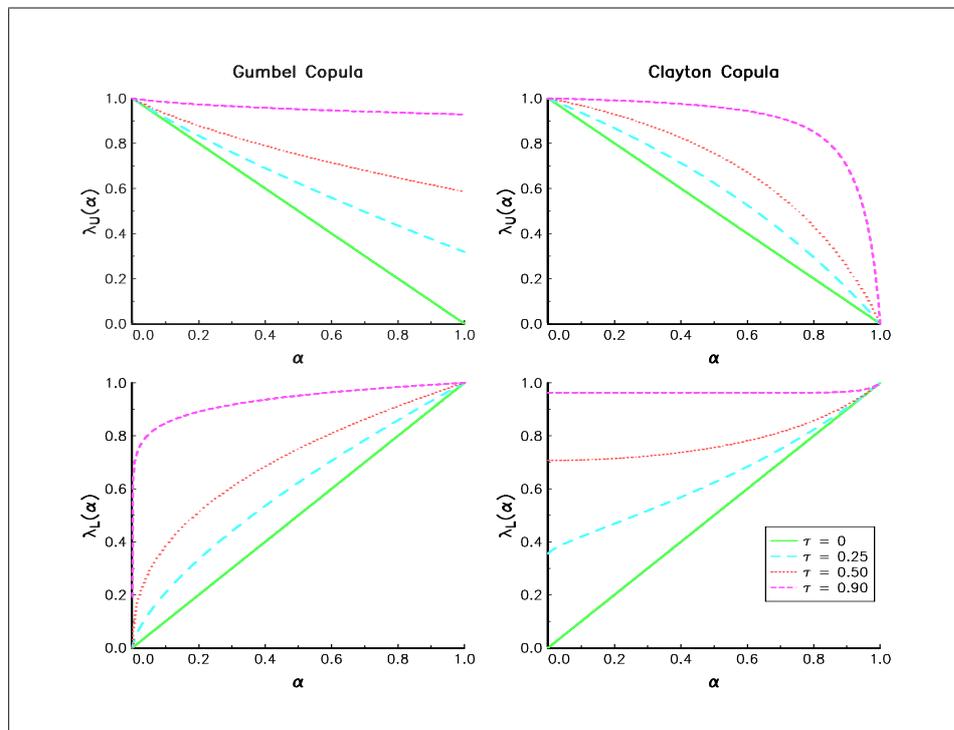
proc (1) = qqUpperCopula(Copula,u);
    local Copula:proc;
    retp( (1 - 2.*u + Copula(u,u)) ./ (1-u) );
endp;

/*
**> qqLowerCopula
**
*/

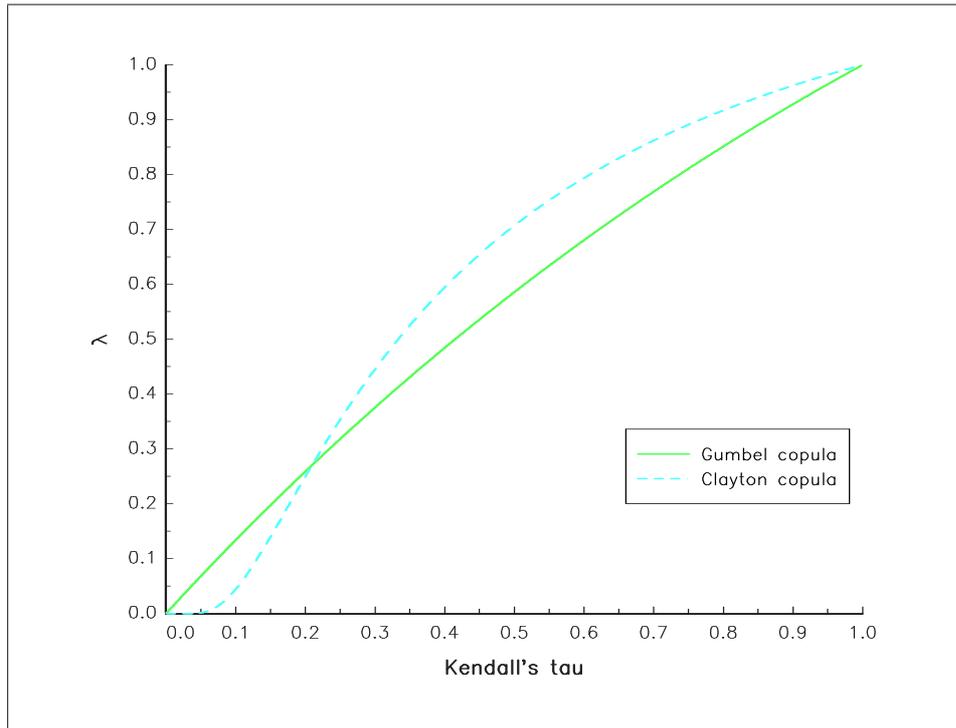
proc (1) = qqLowerCopula(Copula,u);
    local Copula:proc;
    retp( Copula(u,u) ./ u );
endp;

```

Sur le graphique 3.12, nous représentons les mesures  $\lambda_U(\alpha)$  et  $\lambda_L(\alpha)$  pour les copules Gumbel et Clayton. Les paramètres sont calibrés en fonction du tau de Kendall. Nous pouvons comparer la mesure  $\lambda_U$  de la copule Gumbel avec la mesure  $\lambda_L$  de la copule Clayton. Nous remarquons que pour la copule Gumbel, nous avons une relation relativement linéaire entre  $\lambda$  et  $\tau$ , ce qui n'est pas le cas de la copule Clayton. A première vue, il semble incohérent de comparer ces deux mesures. Néanmoins, comme nous le verrons dans le chapitre sur la modélisation des survies multidimensionnelles, celles-ci sont très liées.



Graphique 3.12. Mesures de dépendance  $\lambda_U(\alpha)$  et  $\lambda_L(\alpha)$



Graphique 3.13. Comparaison des dépendances de queues des copules Gumbel et Clayton

### 3.8 Repères historiques

C'est à la fin des années 1970 que les études sur les copules et les variables aléatoires ont débutées. Ainsi, SCHWEIZER et WOLFF [1976] proposent de remplacer l'axiomatique d'Alfred Rényi pour définir une mesure de dépendance par une axiomatique basée sur les copules. Schweizer et Wolff prolongent ces travaux dans l'article publié dans *Annals of Statistics*. C'est véritablement dans cet article qu'ils prennent conscience que **la copule est la fonction de dépendance des variables aléatoires** :

*[...] the copula is invariant while the margins may be changed at will, it follows that is precisely the copula which captures those properties of the joint distribution which are invariant under a.s. strictly increasing transformations* (SCHWEIZER and WOLFF [1981]).

A la même période, Paul Deheuvels développe de façon indépendante tout un ensemble de travaux sur une fonction de dépendance  $\mathbf{D}(u_1, \dots, u_n)$  qui n'est rien d'autre que la fonction copule  $\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n)$ . De même, l'ensemble  $\mathfrak{D}$  correspond à l'ensemble  $\mathcal{C}$ . Les articles de Deheuvels sont très denses et contiennent de nombreux résultats. Il montre le lien explicite entre les copules et les statistiques de rangs multivariés. Par exemple, il donne les expressions du tau de Kendall et du rho de Spearman (Théorème 5 et Corollaire 1 page 102 dans les *Lecture Notes in Mathematics* de 1980), mais aussi reformule de nombreux tests d'indépendance et en propose d'autres (voir l'annexe C page 199).

### Références

- [1] ABRAMOWITZ, M. et I.A. STEGUN [1970], Handbook of Mathematical Functions, ninth edition, Dover, Handbook of Mathematical Functions, ninth edition, Dover
- [2] COLES, S., J. CURRIE et J. TAWN [1999], Dependence measures for extreme value analyses, Department of Mathematics and Statistics, Lancaster University, Working Paper
- [3] DEHEUVELS, P. [1978], Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **23**, 1-36
- [4] DEHEUVELS, P. [1979], Propriétés d'existence et propriétés topologiques des fonctions de dépendance avec applications à la convergence des types pour des lois multivariées, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris – Série 1*, **288**, 145-148

- [5] DEHEUVELS, P. [1979], La fonction de dépendance empirique et ses propriétés — Un test non paramétrique d'indépendance, *Académie Royale de Belgique – Bulletin de la Classe des Sciences – 5e Série*, **65**, 274-292
- [6] DEHEUVELS, P. [1980], Non parametric tests of independence, in J.P. Raoult (Ed.), *Statistique non Paramétrique Asymptotique — Proceedings, Actes des Journées Statistiques, Rouen, France, Juin 1979, Lecture Notes in Mathematics*, **821**, Springer-Verlag, New York
- [7] DEHEUVELS, P. [1980], Some applications of the dependence functions to statistical inference : Nonparametric estimates of extreme values distributions, and a Kiefer type universal bound for the uniform test of independence, in Coll. Math. Janos Bolyai, *Nonparametric statistical inference*, North Holland
- [8] DEHEUVELS, P. [1981], Multivariate tests of independence, in D. Dugue, E. Lukacs et V.K. Rohatgi (Eds.), *Analytical methods in probability theory (Proceedings of a conference held at Oberwolfach in 1980), Lecture Notes in Mathematics*, **861**, Springer-Verlag, New York
- [9] DEHEUVELS, P. [1981], A Kolmogorov-Smirnov type test for independence and multivariate samples, *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, **26**, 213-226
- [10] DEHEUVELS, P. [1981], A non parametric test for independence, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **26**, 29-50
- [11] DEHEUVELS, P. [1981], An asymptotic decomposition for multivariate distribution-free tests of independence, *Journal of Multivariate Analysis*, **11**, 102-113
- [12] DEHEUVELS, P. [1983], Indépendance multivariée partielle et inégalités de Fréchet, in M.C. Demetrescu et M. Iosifescu (Eds.), *Studies in probability and related topics : papers in honour of Octav Onicescu on his 90th. birthday*, Nagard, Rome
- [13] KIMELDORF, G. et A. SAMPSON [1975], One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals, *Communications in Statistics*, **4(3)**, 293-301
- [14] KIMELDORF, G. et A. SAMPSON [1975], Uniform representations of bivariate distributions, *Communications in Statistics*, **4(7)**, 617-627
- [15] HUTCHINSON, T. P. et C.D. LAI [1990], Continuous Bivariate Distributions, Emphasising Applications, Rumbly Scientific Publishing, Adelaide
- [16] MARDIA, K.V. [1970], Families of Bivariate Distributions, *Griffin's Statistical Monographs & Courses*, **27**, Charles Griffin & Company Ltd, London
- [17] MARDIA, K.V. [1970], A translation family of bivariate distributions and Fréchet Bounds, *Sankyā : The Indian Journal of Statistics A*, **32**, 119-122
- [18] MIKUSIŃSKI, P., H. SHERWOOD et M.D. TAYLOR [1992], Shuffles of min, *Stochastica*, **13**, 61-74
- [19] NATAF, A. [1962], Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **255**, 42-43
- [20] NATAF, A. [1962], Etude graphique de détermination de distributions de probabilités planes dont les marges sont données, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **11**, 247-260
- [21] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, *Lectures Notes in Statistics*, **139**, Springer Verlag, New York
- [22] RÉNYI, A. [1959], On measures of dependence, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **10**, 441-451
- [23] SCHWEIZER, B. et E. WOLFF [1976], Sur une mesure de dépendance pour les variables aléatoires, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **A-283**, 659-661
- [24] SCHWEIZER, B. et E. WOLFF [1981], On nonparametric measures of dependence for random variables, *Annals of Statistics*, **9**, 879-885
- [25] VITALE, R.A. [1991], On stochastic dependence and a class of degenerate distributions, in H.W. Block, A.R. Sampson et T.H. Savits (Eds.), *Topics in Statistical Dependence*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA
- [26] WEI, G., H-B. FANG et K-T. FANG [1998], The dependence patterns of random variables — Elementary algebraic and geometrical properties of copulas, Hong Kong Baptist University, *Working Paper*



# 4

## Les copules paramétriques

Dans ce chapitre, nous étudions quelques copules paramétriques, c'est-à-dire des fonctions qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres. Ces copules sont d'un grand intérêt pour la gestion des risques car elles permettent de construire des modèles paramétriques ou semiparamétriques. L'estimation des paramètres est abordée dans un prochain chapitre.

### 4.1 Les copules Archimédiennes



Graphique 4.1. Christian Genest

Les copules Archimédiennes sont indiscutablement associées au statisticien canadien Christian Genest. Ce n'est pas lui qui les a inventées, mais il est le premier à avoir adopté une analyse statistique de ces fonctions copules. Et ses nombreuses publications (voir les références en fin de chapitre) ont largement contribué à les faire connaître. En fait, ces copules archimédiennes dérivent des *t-normes* archimédiennes de LING [1965]. Comme il existe un lien très fort entre copules et *t-normes*, la construction de ces copules est immédiate (SCHWEIZER et SKLAR [1983]).

GENEST et MACKAY [1986] définissent une copule Archimédienne (Archimedean copula) de la façon suivante :

$$\mathbf{C}(u_1, u_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) & \text{si } \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $\varphi$  une fonction de classe  $C^2$  qui vérifie  $\varphi(1) = 0$ ,  $\varphi'(u) < 0$  et  $\varphi''(u) > 0$  pour tout  $u \in [0, 1]$ .  $\varphi(u)$  est appelé le *générateur* (ou la fonction génératrice) de la copule. Ce générateur est dit *strict* si  $\varphi(0) = \infty$  et non-strict si  $\varphi(0) < \infty$ . Pour être précis, les copules construites de cette façon utilisent un générateur **additif**. GENEST et MACKAY [1986] introduisent le générateur  $\lambda$  en posant

$$\lambda(u) = \exp(-\varphi(u)) \quad (4.2)$$

Dans ce cas, la copule Archimédienne  $\mathbf{C}(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1, u_2) &= \lambda^{-1}(\exp(-(-\ln \lambda(u_1) - \ln \lambda(u_2)))) \\ &= \lambda^{-1}(\lambda(u_1)\lambda(u_2)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\lambda(u)$  est un générateur **multiplicatif**. GENEST et MACKAY [1986] introduisent les copules Archimédiennes d'une façon originale en partant du cas indépendant :

La fonction de répartition définie par

$$\mathbf{C}^\perp(u_1, u_2) = u_1 u_2 \quad (4.4)$$

est sans doute la copule la plus élémentaire de toutes les copules, puisqu'elle correspond au cas exceptionnel où les variables aléatoires  $U_1$  et  $U_2$  sont indépendantes. Dans cet article, nous voulons envisager la situation beaucoup plus générale dans laquelle  $U_1$  et  $U_2$  ne sont pas indépendantes, mais plutôt le **deviennent** une fois que l'échelle de probabilité originale a été transformée.

De façon plus spécifique, considérons une fonction strictement croissante et continue  $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\lambda(0) = 0$  et  $\lambda(1) = 1$ , et supposons que

$$\lambda(\Pr\{U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2\}) = \lambda(\Pr\{U_1 \leq u_1\}) \times \lambda(\Pr\{U_2 \leq u_2\}) \quad (4.5)$$

pour tout  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ . Si  $\lambda(u) = u$ , les variables  $U_1$  et  $U_2$  sont alors indépendantes au sens où on l'entend habituellement.

En posant  $\varphi(u) = -\ln \lambda(u)$  pour  $u \in [0, 1]$ , on peut réécrire la condition (4.5) comme suit :

$$\varphi(\mathbf{C}(u_1, u_2)) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{C}(u_1, u_2) = \Pr\{U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2\}$  (GENEST et MACKAY [1986], page 146).

Les copules Archimédiennes jouent un rôle important car elles présentent de nombreuses propriétés intéressantes. Par exemple, GENEST et MACKAY [1986] donnent une caractérisation d'une copule Archimédienne en utilisant le critère d'Abel :

**Théorème 6** Une copule  $\mathbf{C}$  est Archimédienne si elle possède deux dérivées partielles et s'il existe une application intégrable  $\zeta : (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$  telle que

$$\zeta(u_2) \frac{\partial \mathbf{C}(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \zeta(u_1) \frac{\partial \mathbf{C}(u_1, u_2)}{\partial u_2} \quad (4.7)$$

pour tout  $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ . Le cas échéant, l'application  $\varphi$  qui engendre  $\mathbf{C}$  est donnée (à une constante près) par  $\varphi(u) = \int_u^1 \zeta(u) du$ ,  $0 \leq u \leq 1$ .

Voici d'autres propriétés (Théorèmes 4.1.5 et 4.16 de NELSEN [1999]) :

- $\mathbf{C}$  est symétrique, i.e.  $\mathbf{C}(u_1, u_2) = \mathbf{C}(u_2, u_1)$ .
- $\mathbf{C}$  est associative, i.e.  $\mathbf{C}(u_1, \mathbf{C}(u_1, u_3)) = \mathbf{C}(\mathbf{C}(u_1, u_2), u_3)$ .
- La section diagonale  $\delta(u) = \mathbf{C}(u, u)$  vérifie  $\delta(u) < u$  pour tout  $u \in (0, 1)$ .
- Si une copule  $\mathbf{C}$  est associative et  $\delta(u) < u$  pour tout  $u \in (0, 1)$ , alors  $\mathbf{C}$  est Archimédienne.

Dans le tableau suivant, nous donnons quelques exemples de copules Archimédiennes (nous utilisons les notations de JOE [1997] pour être plus concis :  $\bar{u} = 1 - u$  et  $\tilde{u} = -\ln u$ ) :

Copule	$\varphi(u)$	$\mathbf{C}(u_1, u_2)$
$\mathbf{C}^\perp$	$-\ln u$	$u_1 u_2$
Gumbel	$(-\ln u)^\theta$	$\exp\left(-(\tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta)^{1/\theta}\right)$
Frank	$-\ln \frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$-\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$
Joe	$-\ln \left(1 - (1 - u)^\theta\right)$	$1 - (\bar{u}_1^\theta + \bar{u}_2^\theta - \bar{u}_1^\theta \bar{u}_2^\theta)^{1/\theta}$
Clayton	$u^{-\theta} - 1$	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$

**Exemple 12** Si  $\varphi(u) = (-\ln u)^\theta$ , alors  $\varphi^{-1}(u) = \exp(-u^{1/\theta})$  et

$$\mathbf{C}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right) \quad (4.8)$$

Nous retrouvons bien la copule **Gumbel**. Pour  $\theta$  égal à 0, nous obtenons  $\mathbf{C}^\perp$  et pour  $\theta$  égal à  $\infty$ , nous obtenons  $\mathbf{C}^+$ .

**Exemple 13** Si  $\varphi(u) = u^{-1} - 1$ , alors  $\varphi^{-1}(u) = (1 + u)^{-1}$  et

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1, u_2) &= \left(1 + (u_1^{-1} - 1 + u_2^{-1} - 1)\right)^{-1} \\ &= (u_1^{-1} + u_2^{-1} - 1)^{-1} \\ &= \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nous retrouvons bien la copule **Gumbel Logistic**.

La copule  $\mathbf{C}^\perp$  est Archimédienne et nous avons  $\varphi(u) = -\ln u$ . Concernant les copules Fréchet, seule  $\mathbf{C}^-$  est Archimédienne. Posons  $\varphi(u) = 1 - u$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(u) &= \begin{cases} 1 - u & \text{si } u \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \max(1 - u, 0) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1, u_2) &= \max(1 - (1 - u_1) - (1 - u_2), 0) \\ &= \max(u_1 + u_2 - 1, 0) \\ &= \mathbf{C}^-(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour prouver que  $\mathbf{C}^-$  est Archimédienne, nous pouvons aussi utiliser le critère d'Abel (GENEST et MACKAY [1986]). Nous devons vérifier que

$$\varphi'(u_2) \frac{\partial \mathbf{C}(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \varphi'(u_1) \frac{\partial \mathbf{C}(u_1, u_2)}{\partial u_2}$$

Or  $\varphi'(u) = -1$  et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= \frac{\partial \max(u_1 + u_2 - 1, 0)}{\partial u_1} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } u_1 + u_2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nous en déduisons que

$$-1 \times \mathbf{1}\{u_1 + u_2 \leq 1\} = -1 \times \mathbf{1}\{u_1 + u_2 \leq 1\} \quad (4.13)$$

En introduction, nous avons dit que les copules Archimédiennes sont intéressantes, car elles sont très maniables pour les calculs. Par exemple, GENEST et MACKAY [1986] montrent que le tau de Kendall s'écrit

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} du \quad (4.14)$$

et que la densité de la copule a pour expression

$$c(u_1, u_2) = -\frac{\varphi''(\mathbf{C}(u_1, u_2)) \varphi'(u_1) \varphi'(u_2)}{[\varphi'(\mathbf{C}(u_1, u_2))]^3} \quad (4.15)$$

**Exemple 14** *Considérons la copule Clayton. Nous avons  $\varphi(u) = u^{-\theta} - 1$  et  $\varphi'(u) = -\theta u^{-\theta-1}$ . Nous en déduisons que*

$$\begin{aligned}
\tau &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{1 - u^{-\theta}}{\theta u^{-\theta-1}} du \\
&= 1 + \frac{4}{\theta} \int_0^1 (u^{\theta+1} - u) du \\
&= 1 + \frac{4}{\theta} \left[ \frac{u^{\theta+2}}{\theta+2} - \frac{u^2}{2} \right]_0^1 \\
&= 1 + \frac{4}{\theta} \left( \frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\theta}{\theta+2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Il est possible de construire des copules Archimédiennes multidimensionnelles. Dans ce cas, nous avons

$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \tag{4.17}$$

Néanmoins,  $\mathbf{C}$  est une copule à la seule condition que  $\varphi^{-1}$  est une fonction complètement monotone (SCHWEIZER et SKLAR [1983]) :

$$(-1)^k \frac{d^k}{du^k} \varphi^{-1}(u) \geq 0 \quad k \geq 1 \tag{4.18}$$

Par exemple, la copule Gumbel multidimensionnelle a pour expression :

$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n) = \exp\left(-\left((-\ln u_1)^\theta + \dots + (-\ln u_n)^\theta\right)^{1/\theta}\right) \tag{4.19}$$

## 4.2 La copule Normale

La copule Normale est la copule associée à la distribution normale multidimensionnelle :

**Définition 10** *Soit  $\rho$  une matrice diagonale définie positive avec  $\text{diag } \rho = \mathbf{1}$  et  $\Phi_\rho$  la distribution normale multivariée standard de matrice de corrélation  $\rho$ . La copule Normale est alors définie de la façon suivante :*

$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \tag{4.20}$$

**Théorème 7** *La densité de la copule Normale est*

$$c(u_1, \dots, u_n; \rho) = \frac{1}{|\rho|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varsigma}^\top (\rho^{-1} - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varsigma}\right) \tag{4.21}$$

avec  $\varsigma_i = \Phi^{-1}(u_i)$  et  $\mathbf{I}$  la matrice identité de dimension  $(n \times n)$ .

**Preuve.** Utilisons la relation qui relie la densité multivariée, les densités univariées et la densité de la copule

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \tag{4.22}$$

et appliquons cette relation à la densité de la distribution normale multivariée :

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\rho|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \rho^{-1} \mathbf{x}\right) = c(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) \left( \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} x_i^2\right) \right) \tag{4.23}$$

Nous en déduisons que

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\rho|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varsigma}^\top \rho^{-1} \boldsymbol{\varsigma}\right)}{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varsigma}^\top \boldsymbol{\varsigma}\right)} \tag{4.24}$$

■

## Code GAUSS 17 (Distribution et densité de la copule Normale)

```

/*
**> cdfCopulaNormal
**
*/

proc cdfCopulaNormal(u,rho);
    retp( cdfmvn(cdfni(u'),rho)' );
endp;

/*
**> pdfCopulaNormal
**
*/

proc pdfCopulaNormal(u,rho);
    local varsigma,rho_inv,r,i,cdf;

    varsigma = cdfni(u)';
    rho_inv = invpd(rho) - eye(cols(u));
    r = rows(u);
    cdf = zeros(r,1);
    i = 1;
    do until i > r;
        cdf[i] = exp(-0.5 * varsigma[.,i]' * rho_inv * varsigma[.,i]);
        i = i + 1;
    endo;

    retp( cdf / sqrt(det(rho)) );
endp;

```

Dans le cas bivarié, nous obtenons

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2 - 2\rho\varsigma_1\varsigma_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2}{2}\right) \quad (4.25)$$

Nous en déduisons que

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2 - 2\rho\varsigma_1\varsigma_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2}{2}\right) dx_1 dx_2 \quad (4.26)$$

avec  $\varsigma_1 = \Phi^{-1}(x_1)$  et  $\varsigma_2 = \Phi^{-1}(x_2)$ . Si nous utilisons la décomposition canonique d'une distribution bivariée, une autre expression de  $\mathbf{C}$  est

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)}\right) dx_1 dx_2 \quad (4.27)$$

Cependant, les expressions (4.26) et (4.27) sont difficiles à manier pour les calculs, ce qui n'est pas le cas de l'expression suivante<sup>1</sup> :

**Théorème 8** *La distribution de la copule Normale bivariée est*

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho) = \int_0^{u_1} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) du \quad (4.28)$$

<sup>1</sup>La formule suivante m'a été suggérée par Jean-Frédéric Jouanin.

**Preuve.** Soient  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  un vecteur aléatoire gaussien standard dont la corrélation est  $\rho$  et  $X_3$  une variable gaussienne indépendante de  $X_1$  et  $X_2$ . Nous avons

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2; \rho) &= \Pr\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \\ &= \mathbb{E}\left[\Pr\left\{X_1 \leq x_1, \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X_3 \leq x_2 \mid X_1\right\}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \Phi\left(\frac{x_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \phi(x) dx\end{aligned}\quad (4.29)$$

L'expression de la distribution de la copule Normale est donc

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho) &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \phi(x) dx \\ &= \int_0^{u_1} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) du\end{aligned}\quad (4.30)$$

■

La copule Normale s'avère très maniable pour les calculs (un peu comme la distribution normale multivariée). Par exemple, nous pouvons calculer explicitement le tau de Kendall

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho \quad (4.31)$$

et le rho de Spearman

$$\rho = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2} \quad (4.32)$$

En utilisant l'équation (4.28), la distribution conditionnelle  $\mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2)$  est

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2) &= \partial_1 \mathbf{C}(u_1, u_2) \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\end{aligned}\quad (4.33)$$

Nous pouvons utiliser ce résultat pour étendre les résultats classiques de la régression quantile linéaire. Nous notons  $x_2 = \mathbf{q}(x_1; \alpha)$  la régression quantile de  $X_2$  sur  $X_1$  :

$$x_2 = \mathbf{q}(x_1; \alpha) \Leftrightarrow \Pr\{X_2 \leq x_2 \mid X_1 = x_1\} = \alpha \quad (4.34)$$

Soient  $U_1 = \mathbf{F}_1(X_1)$  et  $U_2 = \mathbf{F}_2(X_2)$ . Nous avons

$$\Pr\{X_2 \leq \mathbf{F}_2^{-1}(u_2) \mid X_1 = \mathbf{F}_1^{-1}(u_1)\} = \alpha \quad (4.35)$$

avec  $x_1 = \mathbf{F}_1^{-1}(u_1)$  et  $x_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(u_2)$ . La régression quantile de  $X_2$  sur  $X_1$  revient donc à résoudre le problème suivant

$$\Pr\{U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1\} = \alpha \quad (4.36)$$

ou encore

$$\partial_1 \mathbf{C}(u_1, u_2) = \alpha \quad (4.37)$$

Si nous notons  $u_2 = \mathbf{q}^*(u_1; \alpha)$  la solution de cette équation, nous avons

$$x_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{q}^*(\mathbf{F}_1(x_1); \alpha)) \quad (4.38)$$

et donc  $\mathbf{q}(x; \alpha) = \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{q}^*(\mathbf{F}_1(x); \alpha))$ .

**Remarque 18** *La régression quantile (et médiane) est donc un problème statistique de copules.*

Dans le cas de la distribution normale bivariee, nous savons que la regression quantile de  $X_2$  sur  $X_1$  est

$$\begin{aligned} x_2 &= \left[ \mu_2 - \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi^{-1}(\alpha) \right] + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_1 \\ &= a(\alpha) + bX_1 \end{aligned} \quad (4.39)$$

La regression est donc **linéaire** (tout comme le problème de la regression **espérance conditionnelle** qui est traditionnellement appelée regression linéaire). Dans le cas de la copule **Normale**, nous avons

$$\Pr \{U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1\} = \Phi \left( \frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho \Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \quad (4.40)$$

L'expression de la fonction quantile  $u_2 = \mathbf{q}^*(u_1; \alpha)$  est donc

$$u_2 = \Phi \left( \rho \Phi^{-1}(u_1) + \sqrt{1 - \rho^2} \Phi^{-1}(\alpha) \right) \quad (4.41)$$

Introduisons la transformée  $\Psi$  :

**Définition 11** Nous définissons l'opérateur  $\Psi$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Psi[\mathbf{F}] &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \Psi[\mathbf{F}](x) = \Phi^{-1}(\mathbf{F}(x)) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Nous notons aussi  $\Psi^{-1}$  l'opérateur inverse (gauche) ( $\Psi^{-1} \circ \Psi = 1$ ), i.e.  $\Psi^{-1}[\mathbf{F}](x) = \mathbf{F}^{-1}(\Phi(x))$ .

Nous avons vu que la regression quantile est linéaire dans le cas gaussien. Dans le cas de la copule **Normale**, cette regression reste linéaire dans l'espace de projection  $\Psi$ .

**Remarque 19** Si nous supposons que seule la copule est **Normale** (sans faire d'hypothèses sur les marginales), nous pouvons utiliser l'algorithme de Portnoy-Koenker avec les variables aléatoires  $Y_i = \Psi[\mathbf{F}_i](X_i)$ . Soient  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  les estimateurs de la regression linéaire

$$\begin{cases} Y_2 = a + bY_1 + U \\ \Pr \{Y_2 \leq y_2 \mid Y_1 = y_1\} = \alpha \end{cases} \quad (4.43)$$

La regression quantile de  $X_2$  sur  $X_1$  est alors

$$X_2 = \Psi^{-1}[\mathbf{F}_2] \left( \hat{a} + \hat{b} \Psi[\mathbf{F}_1](X_1) \right) \quad (4.44)$$

Concernant la dépendance de queue, nous avons

$$\lambda_U = \lambda_L = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < 1 \\ 1 & \text{si } \rho = 1 \end{cases} \quad (4.45)$$

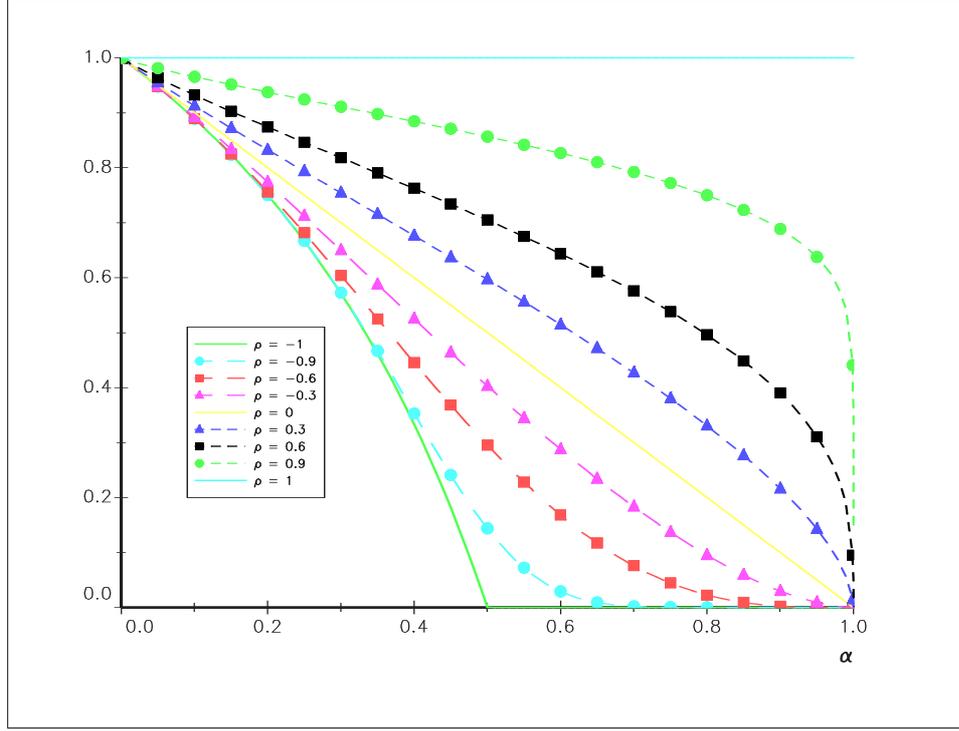
La copule **Normale** ne permet donc pas de 'corrélér' les valeurs extrêmes (voir le graphique 4.2).

### 4.3 La copule **t** de Student

Comme pour la copule **Normale**, la copule **t** (ou la copule **Student**) est la fonction de dépendance associée à la distribution **t** multidimensionnelle.

**Définition 12** Soit  $\rho$  une matrice diagonale définie positive avec  $\text{diag } \rho = \mathbf{1}$  et  $\mathbf{t}_{\rho, \nu}$  la distribution de Student multivariée standard à  $\nu$  degrés de liberté et de matrice de corrélation  $\rho$ . La copule **Student** est alors définie de la façon suivante :

$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n; \rho, \nu) = \mathbf{t}_{\rho, \nu}(\mathbf{t}_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, \mathbf{t}_{\nu}^{-1}(u_n)) \quad (4.46)$$



Graphique 4.2. Mesure de dépendance  $\lambda_U(\alpha)$  de la copule Normale

**Théorème 9** La densité de la copule Student est

$$c(u_1, \dots, u_n; \rho) = |\rho|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2}) [\Gamma(\frac{\nu}{2})]^n (1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{y}^\top \rho^{-1} \mathbf{y})^{-\frac{\nu+n}{2}}}{[\Gamma(\frac{\nu+1}{2})]^n \Gamma(\frac{\nu}{2}) \prod_{i=1}^n (1 + \frac{\varsigma_i^2}{\nu})^{-\frac{\nu+1}{2}}} \quad (4.47)$$

avec  $\varsigma_i = \mathbf{t}_\nu^{-1}(u_i)$ .

**Preuve.** C'est le même raisonnement que celui utilisé pour la copule Normale. ■

Nous avons

$$\mathbf{t}_{\rho, \nu}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2}) |\rho|^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) (\nu\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{y}^\top \rho^{-1} \mathbf{y}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}} d\mathbf{y} \quad (4.48)$$

Dans le cas bivarié, nous en déduisons que l'expression de la copule est

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho, \nu) = \int_{-\infty}^{\mathbf{t}_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\mathbf{t}_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho x_1 x_2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dx_1 dx_2 \quad (4.49)$$

Comme pour la copule Normale, nous pouvons obtenir une autre expression beaucoup plus maniable. Si  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est un vecteur aléatoire de distribution  $\mathbf{t}_{\rho, \nu}$ , alors conditionnellement à  $X_1 = x_1$ , nous avons

$$\left(\frac{\nu+1}{\nu+x_1^2}\right)^{1/2} \frac{X_2 - \rho x_1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sim \mathbf{t}_{\nu+1} \quad (4.50)$$

La distribution conditionnelle  $\mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2)$  est donc

$$\mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2; \rho, \nu) = \mathbf{t}_{\nu+1} \left( \left( \frac{\nu+1}{\nu + [\mathbf{t}_\nu^{-1}(u_1)]^2} \right)^{1/2} \frac{\mathbf{t}_\nu^{-1}(u_2) - \rho \mathbf{t}_\nu^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \quad (4.51)$$

Nous en déduisons que

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho, \nu) = \int_0^{u_1} \mathbf{t}_{\nu+1} \left( \left( \frac{\nu+1}{\nu + [\mathbf{t}_{\nu}^{-1}(u_1)]^2} \right)^{1/2} \frac{\mathbf{t}_{\nu}^{-1}(u_2) - \rho \mathbf{t}_{\nu}^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) du \quad (4.52)$$

Pour calculer numériquement la distribution de la copule Student, nous utilisons la bibliothèque **MVT** qui est une interface DLL des procédures Fortran développées par Alan Genz (GENZ et BRETZ [1999], GENZ et BRETZ [2000], RONCALI [2001]).

#### Code GAUSS 18 (Distribution et densité de la copule Student)

```

/*
**> cdft
**
*/

proc cdft(x,nu);
    retp( 1 - cdftc(x,nu) );
endp;

/*
**> cdfti
**
*/

proc cdfti(p,nu);
    retp( cdftci(1-p,nu) );
endp;

/*
**> cdfCopulaStudent
**
*/

proc cdfCopulaStudent(u,rho,nu);
    local cdf,err,retcode;
    {cdf,err,retcode} = cdfmvt(cdfti(u,nu),rho,nu);
    retp(cdf);
endp;

/*
**> pdfCopulaStudent
**
*/

proc pdfCopulaStudent(u,rho,nu);
    local n,rho_inv,rho_det,varsigma,r,pdf,i;
    n = cols(u);
    rho_inv = invpd(rho);
    rho_det = det1;
    varsigma = cdfti(u,nu)';
    r = rows(u);
    pdf = zeros(r,1);
    i = 1;
    do until i > r;
        pdf[i] = (1 + varsigma[.,i]' * rho_inv * varsigma[.,i] / nu)^(-(nu+n)/2);
        i = i + 1;
    endo;
endp;

```

```

    retp( pdf ./ prodc( (1+varsigma^2/nu)^(-(nu+1)/2) ) * gamma( (nu+n)/2 ) *
          gamma( nu/2 )^(n-1) / gamma( (nu+1)/2 )^n / sqrt(rho_det) );
endp;

/*
**> cdfCopulaStudent2
**
*/

proc cdfCopulaStudent2(u1,u2,rho,nu);
    retp( cdfbvt(cdfsti(u1,nu),cdfsti(u2,nu),rho,nu) );
endp;

/*
**> pdfCopulaStudent2
**
*/

proc pdfCopulaStudent2(u1,u2,rho,nu);
    local varsigma1,varsigma2,varsigma1_sqr,varsigma2_sqr,rho_sqr,qF;
    varsigma1 = cdfsti(u1,nu); varsigma2 = cdfsti(u2,nu);
    varsigma1_sqr = varsigma1^2; varsigma2_sqr = varsigma2^2;
    rho_sqr = rho^2;
    qF = varsigma1_sqr + varsigma2_sqr - 2*rho.*varsigma1.*varsigma2;
    retp( 0.5 * (1 + qF./(1-rho_sqr)./nu)^(-(nu+2)/2) ./
          ( (1 + varsigma1_sqr./nu).*(1 + varsigma2_sqr./nu) )^(-(nu+1)/2) .*
          gamma( nu/2 )^2 .* nu ./ sqrt(1-rho_sqr) ./ gamma( (nu+1)/2 )^2 );
endp;

/*
**> cdfConditionalCopulaStudent2
**
*/

proc cdfConditionalCopulaStudent2(u1,u2,rho,nu);
    local t1,t2,cdf;
    t1 = cdfsti(u1,nu);
    t2 = cdfsti(u2,nu);
    retp( cdfst(sqrt((nu+1) ./ (nu+t1^2)) .* (t2-rho.*t1) ./ sqrt(1-rho^2),nu+1) );
endp;

```

Concernant les mesures de concordance  $\tau$  et  $\rho$ , il n'existe pas (à ma connaissance) d'expression analytique de celles-ci. Néanmoins, il semble que le tau de Kendall de la copule Student soit exactement le même que celui de la copule Normale (c'est ce que nous constatons numériquement). Concernant le rho de Spearman, nous remarquons numériquement que  $\rho_t > \rho_\Phi$  pour une corrélation négative et  $\rho_t < \rho_\Phi$  pour une corrélation positive.

#### Code GAUSS 19 (Calcul numérique des $\tau$ et $\rho$ de de la copule Student)

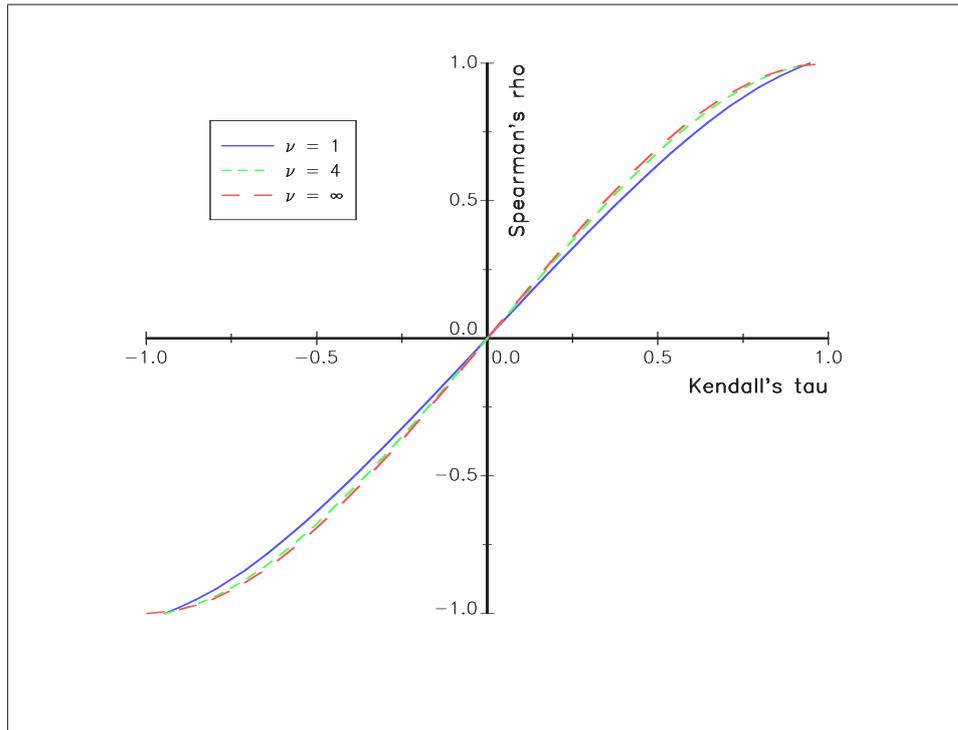
```

/*
**> SpearmanCopulaStudent
**
*/

proc SpearmanCopulaStudent(rho,nu);
    local r,c,i,j,varrho;

    r = maxc(rows(rho)|rows(nu));
    c = maxc(cols(rho)|cols(nu));

```



Graphique 4.3. Diagramme  $(\tau, \rho)$  de la copule Student

```

rho = rho .* ones(r,c);
nu = nu .* ones(r,c);
varrho = zeros(r,c);

i = 1;
do until i > r;
    j = 1;
    do until j > c;
        _CopulaParameters = rho[i,j] | nu[i,j];
        varrho[i,j] = SpearmanCopula(&_cdfCopulaStudent2);
        j = j + 1;
    endo;
    i = i + 1;
endo;

retp(varrho);
endp;

proc _cdfCopulaStudent2(u1,u2);
    retp( cdfCopulaStudent2(u1,u2,_CopulaParameters[1],_CopulaParameters[2]) );
endp;

/*
**> KendallCopulaStudent
**
*/

proc KendallCopulaStudent(rho,nu);
    local r,c,i,j,tau;

```

```

r = maxc(rows(rho)|rows(nu));
c = maxc(cols(rho)|cols(nu));

rho = rho .* ones(r,c);
nu = nu .* ones(r,c);
tau = zeros(r,c);

i = 1;
do until i > r;
    j = 1;
    do until j > c;
        _CopulaParameters = rho[i,j]|nu[i,j];
        tau[i,j] = 1 - 4 * intquad2(&_KendallCopulaStudent,1|0,1|0);
        j = j + 1;
    endo;
    i = i + 1;
endo;

retp(tau);
endp;

proc _KendallCopulaStudent(u1,u2);
    local dC1,dC2;
    dC1 = cdfConditionalCopulaStudent2(u1,u2,_CopulaParameters[1],_CopulaParameters[2]);
    dC2 = cdfConditionalCopulaStudent2(u2,u1,_CopulaParameters[1],_CopulaParameters[2]);
    retp( dC1 .* dC2 );
endp;

```

Concernant la dépendance de queue, nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\bar{\mathbf{C}}(u,u)}{1-u} \\
&= - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{d\bar{\mathbf{C}}(u,u)}{du} \\
&= - \lim_{u \rightarrow 1^-} (-2 + \partial_1 \mathbf{C}(u,u) + \partial_2 \mathbf{C}(u,u)) \\
&= \lim_{u \rightarrow 1^-} (\Pr\{U_2 > u \mid U_1 = u\} + \Pr\{U_1 > u \mid U_2 = u\})
\end{aligned} \tag{4.53}$$

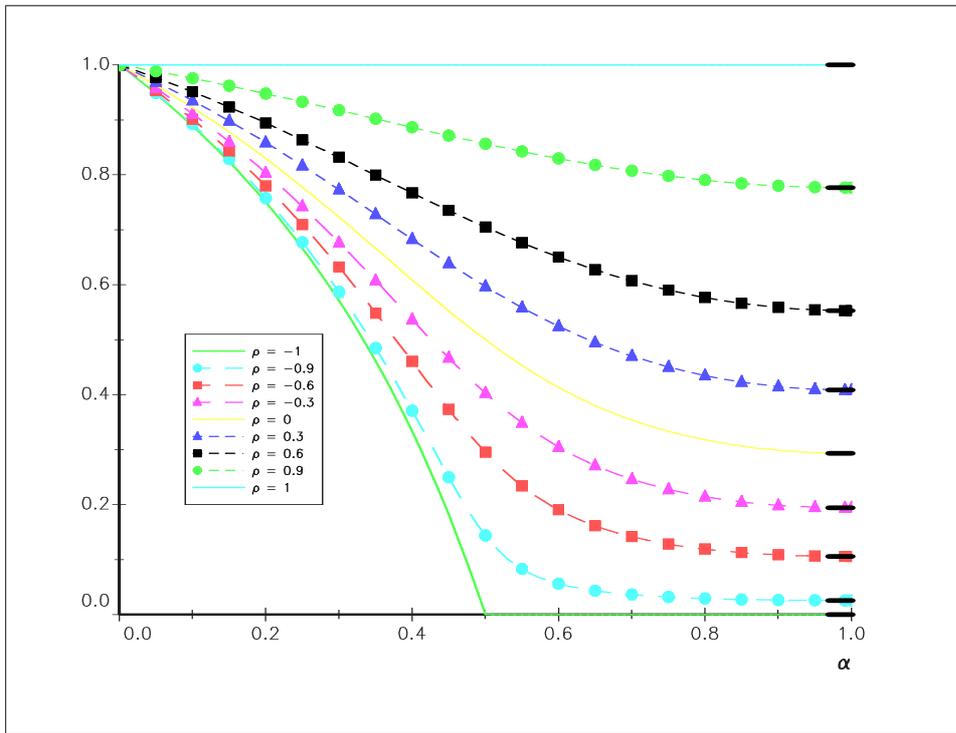
Comme la copule Student est symétrique, nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} \Pr\{U_2 > u \mid U_1 = u\} \\
&= 2 - 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbf{t}_{\nu+1} \left( \left( \frac{\nu+1}{\nu + [\mathbf{t}_{\nu}^{-1}(u)]^2} \right)^{1/2} \frac{\mathbf{t}_{\nu}^{-1}(u) - \rho \mathbf{t}_{\nu}^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \\
&= 2 - 2 \mathbf{t}_{\nu+1} \left( \left( \frac{(\nu+1)(1-\rho)}{(1+\rho)} \right)^{1/2} \right)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

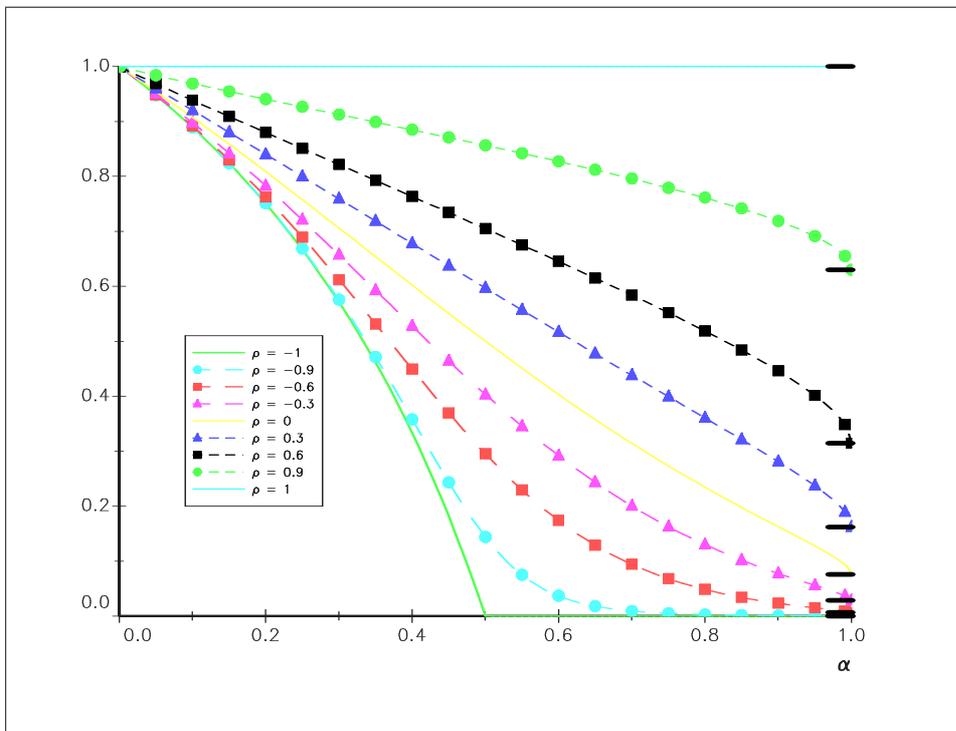
Nous en déduisons que

$$\lambda_U : \begin{cases} > 0 & \text{si } \rho > -1 \\ 0 & \text{si } \rho = -1 \end{cases} \tag{4.55}$$

Nous obtenons donc un comportement très différent de celui de la copule Normale (voir les graphiques 4.4 et 4.5).



Graphique 4.4. Mesure de dépendance  $\lambda_U(\alpha)$  de la copule Student ( $\nu = 1$ )



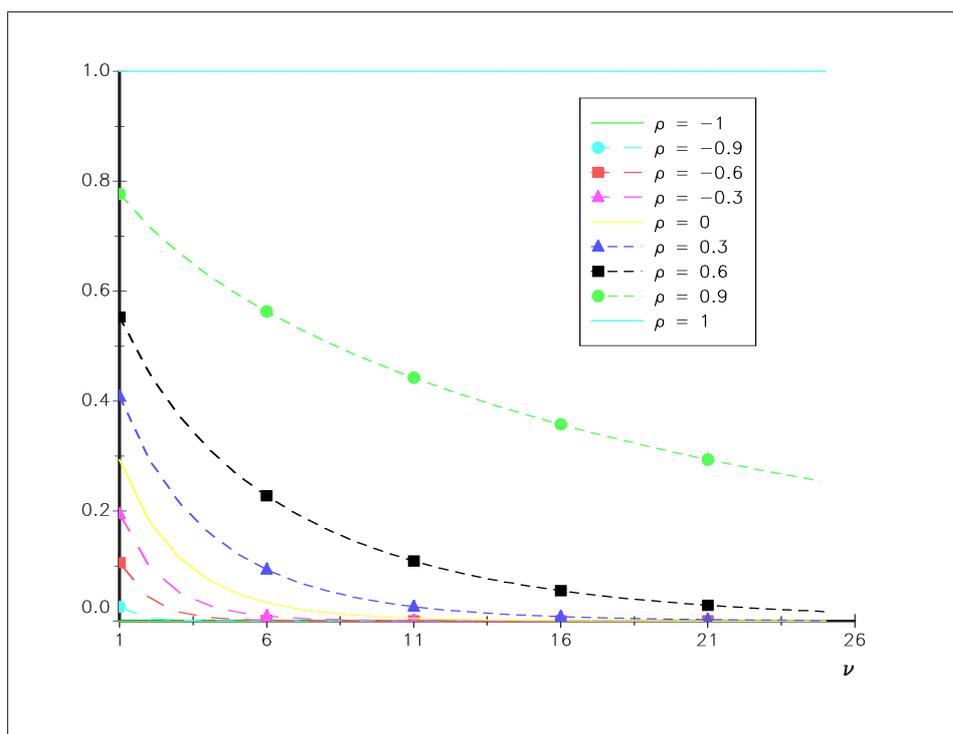
Graphique 4.5. Mesure de dépendance  $\lambda_U(\alpha)$  de la copule Student ( $\nu = 4$ )

## 4.4 Comparaison des copules Normale et Student

Nous avons vu que les copules Normale et Student sont très différentes du point de vue de la dépendance de queue (à titre complémentaire, nous représentons les relations entre  $\nu$  et  $\lambda$  d'une part, et  $\rho$  et  $\lambda$  d'autre part sur les graphiques 4.6 et 4.7). Pour la copule Normale, il n'est pas possible de calibrer le paramètre  $\rho$  à partir de la mesure  $\lambda$ . Pour la copule Student, nous avons

$$\rho = \frac{1 + \nu - (\mathbf{t}_{\nu+1}^{-1}(1 - \frac{\lambda}{2}))^2}{1 + \nu + (\mathbf{t}_{\nu+1}^{-1}(1 - \frac{\lambda}{2}))^2} \quad (4.56)$$

Par exemple, le graphique 4.8 indique les valeurs calibrées de  $\rho$  pour une valeur donnée de  $\lambda$ . Nous voyons que ce paramètre  $\rho$  dépend très fortement de  $\nu$ , et n'est pas stable par rapport à ce dernier paramètre.



Graphique 4.6. Mesure de dépendance  $\lambda$  de la copule Student — relation entre  $\nu$  et  $\lambda$

La copule Normale est un cas particulier de la copule Student lorsque  $\nu \rightarrow \infty$ . Souvent, ces deux copules sont comparées pour une valeur donnée de  $\rho$ . Il convient d'être très prudent avec ces types de comparaison. En effet, considérons la cas 'indépendant'  $\rho = 0$ . Pour la copule Normale, nous avons

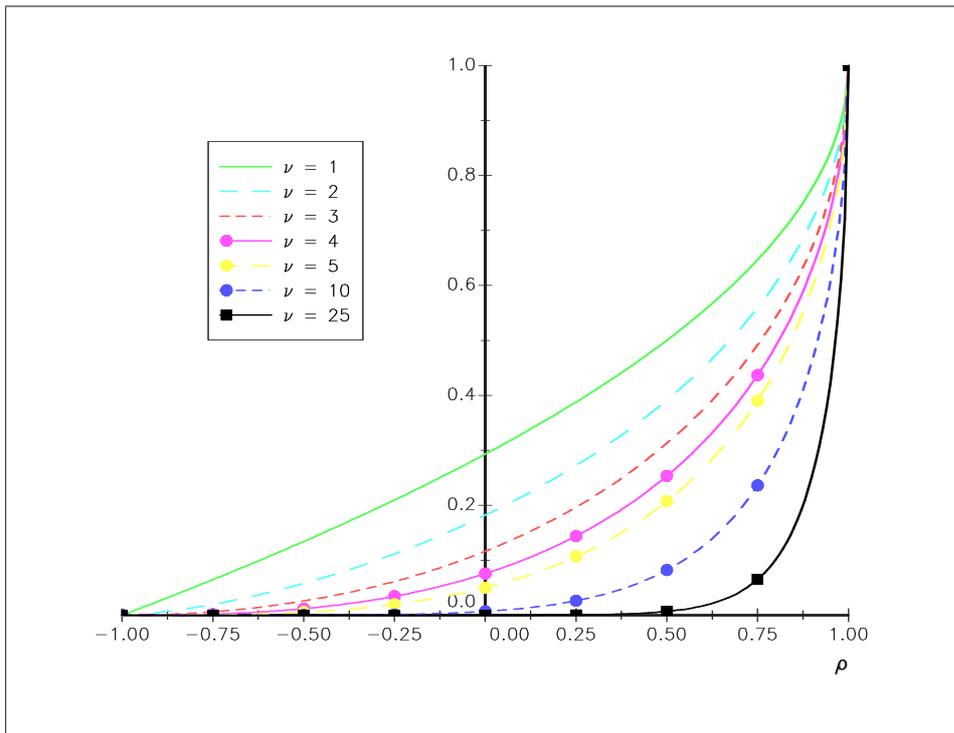
$$\mathbf{C}_{\rho=0} = \mathbf{C}^\perp \quad (4.57)$$

Pour la copule Student, nous avons

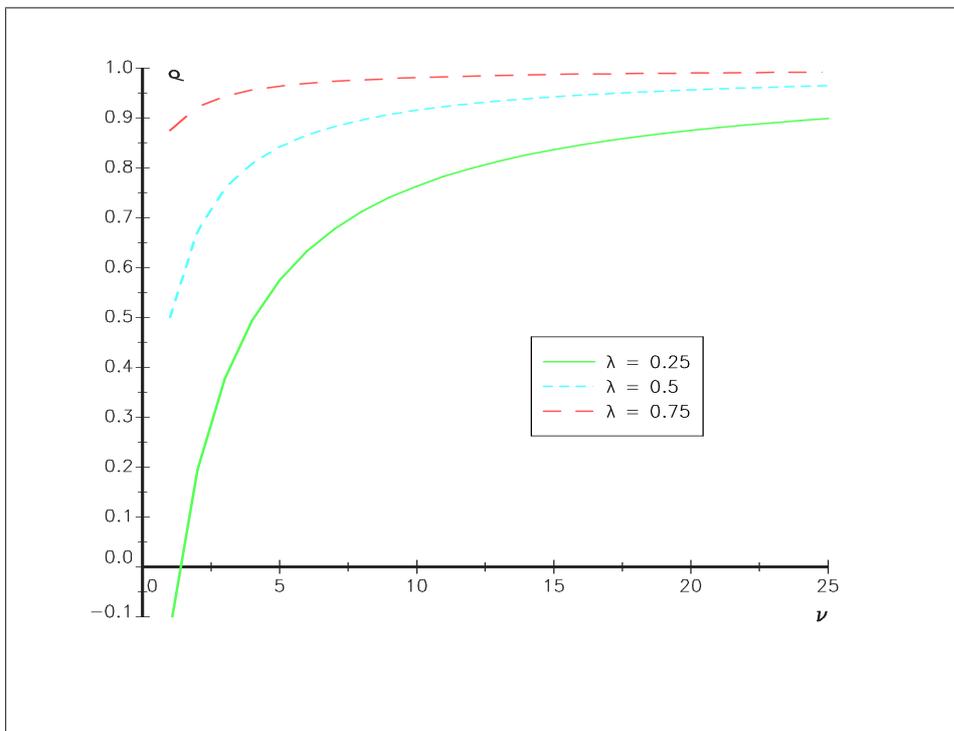
$$\mathbf{C}_{\rho=0,\nu} \neq \mathbf{C}^\perp \quad (4.58)$$

En effet, si la copule Student pour  $\rho = 0$  est la copule  $\mathbf{C}^\perp$ , cela implique que  $\lambda_U \langle \mathbf{C}_{\rho=0,\nu} \rangle = 0$ . Or ceci est faux. Pour comprendre pourquoi, considérons la définition d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  dont la distribution est  $\mathbf{t}_{\rho,\nu}$ . Nous avons

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}^*}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}} \quad (4.59)$$



Graphique 4.7. Mesure de dépendance  $\lambda$  de la copule Student — relation entre  $\rho$  et  $\lambda$



Graphique 4.8. Mesure de dépendance  $\lambda$  de la copule Student — paramètre implicite  $\rho$

avec  $\mathbf{X}^*$  un vecteur aléatoire gaussien de covariance  $\rho$  et  $\chi_\nu^2$  une variable aléatoire chi-deux à  $\nu$  degrés de liberté. Considérons le cas bivarié. Nous obtenons

$$\begin{aligned} (X_1, X_2) &= \frac{(X_1^*, X_2^*)}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}} \\ &= \frac{(X_1^*, \rho X_1^* + \sqrt{1-\rho^2} X_3^*)}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}} \end{aligned} \quad (4.60)$$

avec  $(X_1^*, X_3^*)$  un vecteur aléatoire gaussien 'orthogonal'. Si  $\rho = 0$ , nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \Pr\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} &= \Pr\{X_1^* \leq x_1 \sqrt{\chi_\nu^2/\nu}, X_3^* \leq x_2 \sqrt{\chi_\nu^2/\nu}\} \\ &\neq \Pr\{X_1^* \leq x_1 \sqrt{\chi_\nu^2/\nu}\} \Pr\{X_3^* \leq x_2 \sqrt{\chi_\nu^2/\nu}\} \\ &\Leftrightarrow X_1 \perp X_2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

car nous avons une dépendance induite par la variable aléatoire  $\chi_\nu^2$ . Pour  $\rho = 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{\rho X_1^* + \sqrt{1-\rho^2} X_3^*}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}} \\ &= \frac{X_1^*}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}} \\ &= X_1 \end{aligned} \quad (4.62)$$

$X_2$  est une fonction strictement croissante de  $X_1$ , nous en déduisons que

$$\mathbf{C}_{\rho=1,\nu} = \mathbf{C}^+ \quad (4.63)$$

Pour  $\rho = -1$ , nous avons

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{\rho X_1^* + \sqrt{1-\rho^2} X_3^*}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}} \\ &= -\frac{X_1^*}{\sqrt{\chi_\nu^2/\nu}} \\ &= -X_1 \end{aligned} \quad (4.64)$$

$X_2$  est une fonction strictement décroissante de  $X_1$ , nous en déduisons que

$$\mathbf{C}_{\rho=-1,\nu} = \mathbf{C}^- \quad (4.65)$$

Comme la copule Normale, la copule Student atteint les bornes Fréchet. De plus, c'est une famille positivement ordonnée par rapport au paramètre  $\rho$ . Cette copule est aussi 'continue' par rapport à  $\rho$ . **Néanmoins, pour aller de  $\mathbf{C}^-$  à  $\mathbf{C}^+$ , cette copule ne passe pas par  $\mathbf{C}^\perp$ .**

Revenons à la régression quantile. Dans le cas de la copule Normale, l'expression de la fonction quantile  $u_2 = \mathbf{q}^*(u_1; \alpha)$  est

$$u_2 = \Phi\left(\rho \Phi^{-1}(u_1) + \sqrt{1-\rho^2} \Phi^{-1}(\alpha)\right) \quad (4.66)$$

Pour la copule Student, nous obtenons

$$u_2 = \mathbf{t}_\nu \left( \rho \mathbf{t}_\nu^{-1}(u_1) + \sqrt{\frac{(1-\rho^2)(\nu + [\mathbf{t}_\nu^{-1}(u_1)]^2)}{\nu+1}} \mathbf{t}_{\nu+1}^{-1}(\alpha) \right) \quad (4.67)$$

Code GAUSS 20 (Régression quantile des copules Normale et Student)

```

/*
**> qrCopulaNormal
**
*/

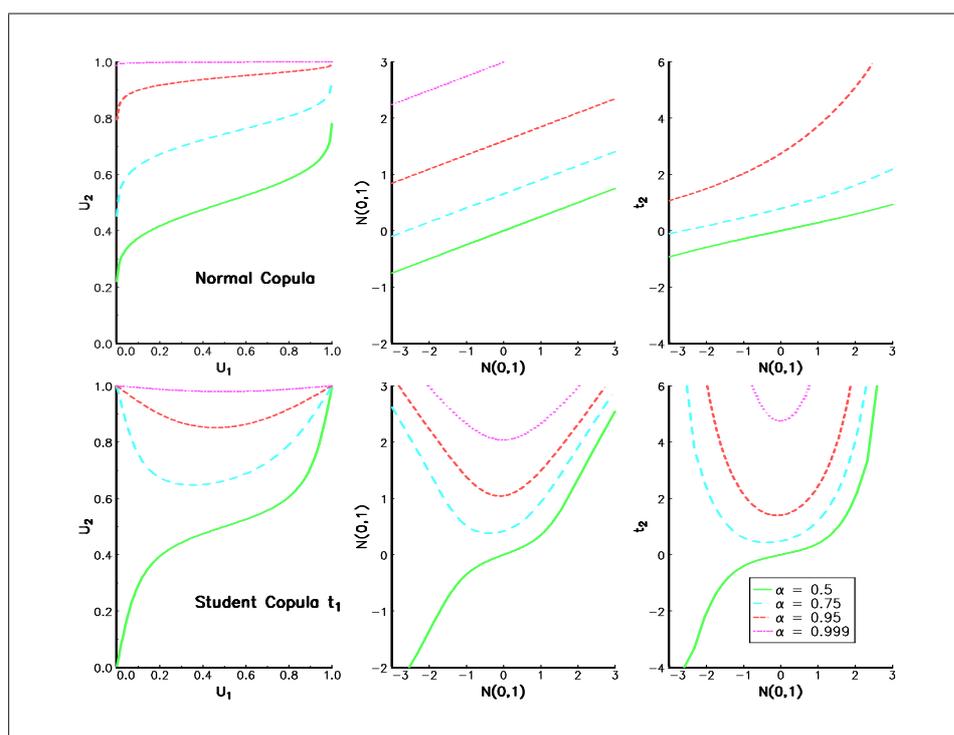
proc qrCopulaNormal(u1,rho,alpha);
  retp( cdfn(rho.*cdfni(u1) + sqrt(1-rho^2).*cdfni(alpha)) );
endp;

/*
**> qrCopulaStudent
**
*/

proc qrCopulaStudent(u1,rho,nu,alpha);
  local t1;
  t1 = cdfni(u1,nu);
  retp( cdfn(rho.*t1+sqrt((1-rho^2).*(nu+t1^2)./(1+nu)).*cdfni(alpha,nu+1),nu) );
endp;

```

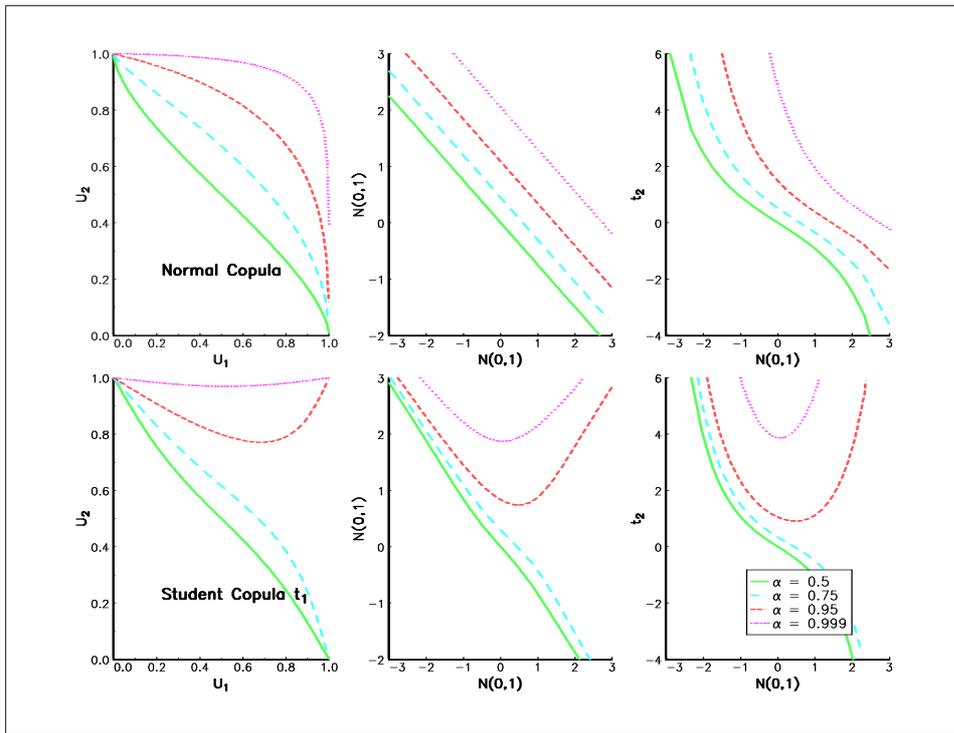
Les graphiques 4.9, 4.10 et 4.11 présentent différentes régressions quantiles. Les copules Normale et Student ne donnent pas du tout les mêmes résultats. En particulier, la monotonie de la fonction  $u_2 = \mathbf{q}^*(u_1; \alpha)$  par rapport à  $u_1$  n'est plus systématiquement vérifiée pour la copule Student.



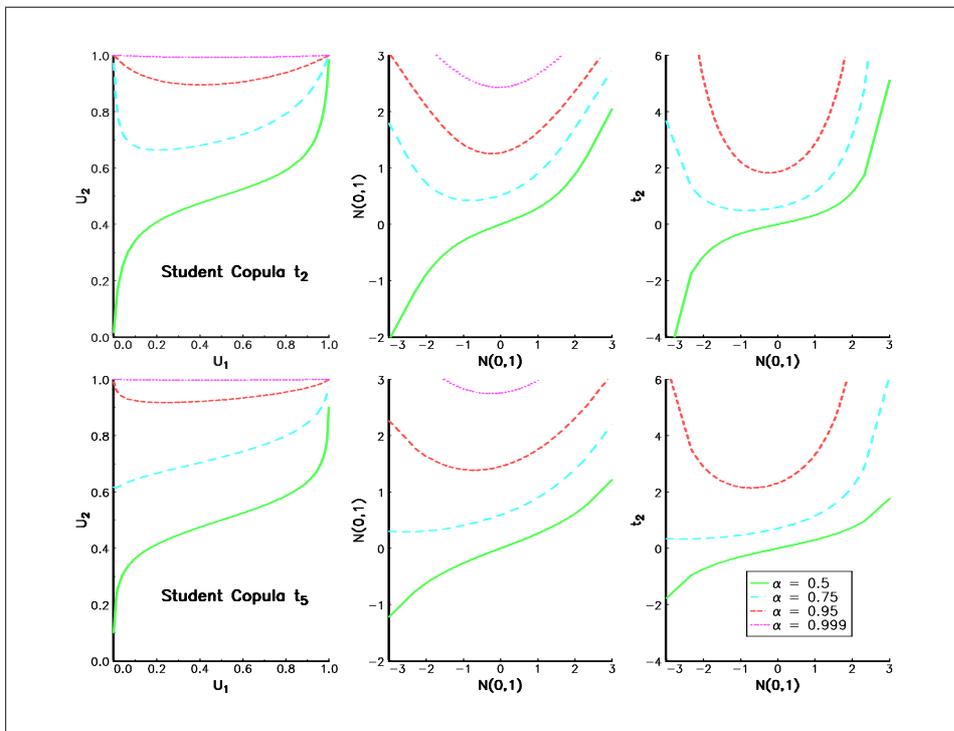
Graphique 4.9. Régression quantile (copules Normale et Student avec  $\rho = 0.25$  et  $\nu = 1$ )

## 4.5 Copules paramétriques bivariées avec plusieurs paramètres

Jusqu'à présent, nous avons vu des copules bivariées qui ne dépendent que d'un seul paramètre. Il peut être intéressant de disposer de copules bivariées avec plusieurs paramètres pour reproduire différentes caractéristiques de dépendance.



Graphique 4.10. Régression quantile (copules Normale et Student avec  $\rho = -0.75$  et  $\nu = 1$ )



Graphique 4.11. Régression quantile (copules Student avec  $\rho = 0.25$ ,  $\nu = 2$  et  $\nu = 5$ )

JOE [1997] et NELSEN [1999] présentent différentes familles de copules avec deux paramètres. Par exemple, nous pouvons construire des copules Archimédiennes à deux paramètres (et à plus de deux paramètres) en composant les générateurs

$$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \tag{4.68}$$

à la condition que  $\varphi$  soit bien un générateur de copule Archimédienne. Une autre méthode plus générale a été suggérée par GENEST et RIVEST [2000] et exploitée par DURRLEMAN, NIKEGHBALI et RONCALLI [2000]. Soit une bijection  $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , nous définissons la fonction  $\mathbf{C}_\gamma$  à partir de la copule  $\mathbf{C}$  par la relation suivante :

$$\mathbf{C}_\gamma(u_1, u_2) = \gamma^{-1}(\mathbf{C}(\gamma(u_1), \gamma(u_2))) \tag{4.69}$$

Sous certaines conditions ( $\gamma$  est un  $C^1$ -difféomorphisme concave de  $]0, 1[$  vers  $]0, 1[$ , deux fois dérivables et continues tel que  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma(1) = 1$ ),  $\mathbf{C}_\gamma$  est une copule.

**Exemple 15** La copule Frank a pour expression

$$\mathbf{C}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta_1} \ln \left( 1 - \frac{(1 - e^{-\theta_1 u_1})(1 - e^{-\theta_1 u_2})}{1 - e^{-\theta_1}} \right) \tag{4.70}$$

Soit  $\gamma(x) = x^{1/\theta_2}$  avec  $\theta_2 \geq 1$ . Nous pouvons montrer que  $\mathbf{C}_\gamma(u_1, u_2)$  est une copule. Nous avons

$$\mathbf{C}_\gamma(u_1, u_2) = \left( -\frac{1}{\theta_1} \ln \left( 1 - \frac{(1 - e^{-\theta_1 u_1^{1/\theta_2}})(1 - e^{-\theta_1 u_2^{1/\theta_2}})}{1 - e^{-\theta_1}} \right) \right)^{\theta_2} \tag{4.71}$$

Voici d'autres fonctions  $\gamma$  qui définissent des copules  $\mathbf{C}_\gamma$  :

Paramètres	$\gamma(x)$	$\gamma^{-1}(x)$
$\theta \geq 1$	$x^{1/\theta}$	$x^\theta$
✓	$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(x)$
✓	$\frac{4}{\pi} \arctan(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$
$(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}_+^2$	$h(x) = (\theta_1 + \theta_2)x / (\theta_1 x + \theta_2)$	$\theta_1 x (\theta_1 + \theta_2 - \theta_1 x)$
$f \in L^1(]0, 1[)$ , $f(x) \geq 0$ , $f'(x) \leq 0$	$\left(\int_0^1 f(t) dt\right)^{-1} \int_0^x f(t) dt$	✓

A partir de ces fonctions, nous obtenons encore d'autres copules par composition convexe. Par exemple,  $\gamma(x) = (\gamma_4 \circ \gamma_1)(x) = (\theta_1 + \theta_2)x^{1/\theta_3} (\theta_1 x^{1/\theta_3} + \theta_2)^{-1}$  définit une fonction copule.

**Remarque 20** La transformation  $\gamma$  permet d'obtenir des structures de dépendance relativement complexes (ou insolites) — voir DURRLEMAN, NIKEGHBALI et RONCALLI [2000].

## 4.6 Repères historiques

Comme la bibliographie le montre, les travaux sur les copules Archimédiennes sont principalement dûs à Christian Genest et à ses co-auteurs. C'est Wassily Hoeffding qui a découvert la copule Normale (voir aussi MARDIA [1970]).

## Références

- [1] BARBE, P., C. GENEST, K. GHOUDI et B. RÉMILLARD [1996], On Kendall's process, *Journal of Multivariate Analysis*, **58**, 197-229
- [2] CAPÉRAÀ, P., FOUGÈRES, A-L. et C. GENEST [1997], Estimation of bivariate extreme value copulas, *Biometrika*, **84**, 567-577
- [3] CAPÉRAÀ, P., A-L. FOUGÈRES et C. GENEST [2000], Bivariate distributions with given extreme value attractor, *Journal of Multivariate Analysis*, **72**, 30-49

- [4] DURRLEMAN, V., A. NIKEGHBALI et T. RONCALLI [2000], A simple transformation of copula, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [5] GENEST, C. [1987], Frank's family of bivariate distributions, *Biometrika*, **74**, 549-555
- [6] GENEST, C., K. GHOUDI et L-P RIVEST [1995], A semiparametric estimation procedure for dependence parameters in multivariate families of distributions, *Biometrika*, **82**, 543-552
- [7] GENEST, C., K. GHOUDI et L-P. RIVEST [1998], Discussion of "Understanding relationships using copulas, by Edward Frees and Emiliano Valdez", *North American Actuarial Journal*, **3**, 143-149
- [8] GENEST, C. et J. MACKAY [1986], Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données, *Canadian Journal of Statistics*, **14(2)**, 145-159
- [9] GENEST, C. et J. MACKAY [1986], The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals, *American Statistician*, **40**, 280-283
- [10] GENEST, C. et L-P. RIVEST [1989], A characterization of Gumbel's family of extreme value distributions, *Statistical Probability Letters*, **8(3)**, 207-211
- [11] GENEST, C. et L-P. RIVEST [1993], Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas, *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 1034-1043
- [12] GENEST, C. et L-P. RIVEST [2000], On the bivariate probability integral transformation, Université Laval, Québec, *Working Paper*
- [13] GENZ, A. et F. BRETZ [1999], Numerical computation of the multivariate  $t$ -probabilities with applications to power calculation of multiple contrasts, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **63(4)**, 361-378 (disponible sur le site web [www.sci.wsu.edu/math/faculty/genz/homepage](http://www.sci.wsu.edu/math/faculty/genz/homepage))
- [14] GENZ, A. et F. BRETZ [2000], Comparison of methods for the computation of multivariate  $t$ -probabilities, submitted (disponible sur le site web [www.sci.wsu.edu/math/faculty/genz/homepage](http://www.sci.wsu.edu/math/faculty/genz/homepage))
- [15] Hoeffding, W. [1940], Masstabinvariante Korrelationstheorie, *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, **5**, 181-233
- [16] JOE, H. [1997], Multivariate Models and Dependence Concepts, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, **73**, Chapman & Hall, London
- [17] LING, C-H. [1965], Representation of associative functions, *Publicationes mathematicae Debrecen*, **12**, 189-212
- [18] MARDIA, K.V. [1970], A translation family of bivariate distributions and Fréchet Bounds, *Sankhyā : The Indian Journal of Statistics A*, **32**, 119-122
- [19] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, *Lectures Notes in Statistics*, **139**, Springer Verlag, New York
- [20] RONCALLI, T. [2001], A GAUSS/DLL Implementation of Alan Genz's Fortran packages for computing multivariate  $t$  cdf, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [21] SCHWEIZER, B. et A. SKLAR [1958], Espaces métriques aléatoires, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **247**, 2092-2094
- [22] SCHWEIZER, B. et A. SKLAR [1961], Associative functions and statistical triangle inequalities, *Publicationes mathematicae Debrecen*, **8**, 169-186
- [23] SCHWEIZER, B. et A. SKLAR [1983], Probabilistic Metric Spaces, *Probability and Applied Mathematics*, North-Holland, New York

# 5

## Les copules de valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes est souvent présentée et utilisée dans un cadre unidimensionnel. Il existe finalement très peu d'applications multidimensionnelles. L'une des raisons, à mes yeux, est le caractère *mathématisé* de nombreux exposés. Pourtant, la théorie des valeurs extrêmes multivariées est relativement facile à appréhender si la théorie dans le cadre univarié est parfaitement comprise. Dans ce chapitre, j'utilise essentiellement les travaux de DEHEUVELS [1978] et GALAMBOS [1978]. Ceux-ci sont très bien exposés dans le chapitre 5 de JOE [1997]. Enfin, je mentionne deux articles car ils sont à ma connaissance les seuls à avoir étudié une famille de copule spécifique dans le cadre de la théorie des valeurs extrêmes. Le premier concerne la famille des copules Gumbel et a été écrit par Christian Genest et Louis-Paul Rivest en 1989. Le second est l'article de CAPÉRAÀ, FOUGÈRES et GENEST [2000] qui est consacré à la famille des copules Archimax.

### 5.1 Théorie des valeurs extrêmes multiples

#### 5.1.1 Une introduction rapide

**Définition 13** Une copule de valeurs extrêmes (*extreme value copula* ou copule *EV*) vérifie la relation suivante :

$$\mathbf{C}(u_1^t, \dots, u_n^t) = \mathbf{C}^t(u_1, \dots, u_n) \quad (5.1)$$

pour tout réel  $t$  positif.

Par exemple, la copule Gumbel est une copule de valeurs extrêmes :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1^t, u_2^t; \theta) &= \exp\left(-\left[(-\ln u_1^t)^\theta + (-\ln u_2^t)^\theta\right]^{1/\theta}\right) \\ &= \exp\left(-\left(t^\theta \left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]\right)^{1/\theta}\right) \\ &= \left[\exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta\right]^{1/\theta}\right)\right]^t \\ &= \mathbf{C}^t(u_1, u_2; \theta) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ce qui n'est pas le cas de la copule FGM :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1^t, u_2^t; \theta) &= u_1^t u_2^t + \theta u_1^t u_2^t (1 - u_1^t) (1 - u_2^t) \\ &= u_1^t u_2^t (1 + \theta - \theta u_1^t - \theta u_2^t + \theta u_1^t u_2^t) \\ &\neq u_1^t u_2^t (1 + \theta - \theta u_1 - \theta u_2 + \theta u_1 u_2)^t \\ &\neq \mathbf{C}^t(u_1, u_2; \theta) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Le nom “extreme value copula” suggère un lien entre la théorie des valeurs extrêmes et ces copules. Considérons le vecteur  $\chi_m^+$  des statistiques du maximum. Nous avons

$$\chi_m^+ = \mathbf{X}_{m:m} = \begin{bmatrix} X_{m:m,1} \\ \vdots \\ X_{m:m,n} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Notons  $\mathbf{F}_{m:m}$  la distribution de  $\chi_m^+$  définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{m:m}(\mathbf{x}) &= \Pr \{ \chi_m^+ \leq \mathbf{x} \} \\ &= \Pr \{ X_{m:m,1} \leq x_1, \dots, X_{m:m,n} \leq x_n \} \end{aligned} \quad (5.5)$$

La théorie multidimensionnelle des valeurs extrêmes s'intéresse à la loi limite

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{X_{m:m,1} - b_{m,1}}{a_{m,1}} \leq x_1, \dots, \frac{X_{m:m,n} - b_{m,n}}{a_{m,n}} \leq x_n \right) = \mathbf{F}^*(x_1, \dots, x_n) \quad (5.6)$$

D'après la représentation canonique de la distribution de  $\mathbf{F}^*$ , il existe une copule  $\mathbf{C} \langle \mathbf{F}^* \rangle$  telle que

$$\mathbf{F}^*(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{C} \langle \mathbf{F}^* \rangle (\mathbf{F}_1^*(x_1), \dots, \mathbf{F}_n^*(x_n)) \quad (5.7)$$

Il est évident que les marges de  $\mathbf{F}^*$  vérifient le théorème de Fisher-Tippet. Donc les marges d'une distribution multidimensionnelle de valeurs extrêmes sont des Gumbel, ou/et Fréchet ou/et Weibull. Concernant la copule  $\mathbf{C} \langle \mathbf{F}^* \rangle$ , nous avons le résultat suivant :

**Théorème 10**  $\mathbf{C} \langle \mathbf{F}^* \rangle$  est une copule de valeurs extrêmes.

La représentation copule permet donc de caractériser assez facilement les distributions multidimensionnelles de valeurs extrêmes. Prenons l'exemple du vecteur aléatoire  $(X_1, X_2)$  dont la distribution est

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \exp \left( - \left[ (-\ln \Phi(x_1))^\theta + (-\ln x_2)^\theta \right]^{1/\theta} \right) \quad (5.8)$$

$X_1$  est donc une variable aléatoire gaussienne et  $X_2$  est une variable aléatoire uniforme. La distribution  $\mathbf{F}^*$  est donc

$$\mathbf{F}^*(x_1, x_2) = \exp \left( - \left[ (-\ln \Lambda(x_1))^\theta + (-\ln \Psi_1(x_2))^\theta \right]^{1/\theta} \right) \quad (5.9)$$

Pour construire une distribution de valeurs extrêmes multivariées, il suffit donc de coupler des marges GEV avec une copule EV. Par exemple, le graphique 5.1 correspond à la distribution suivante :

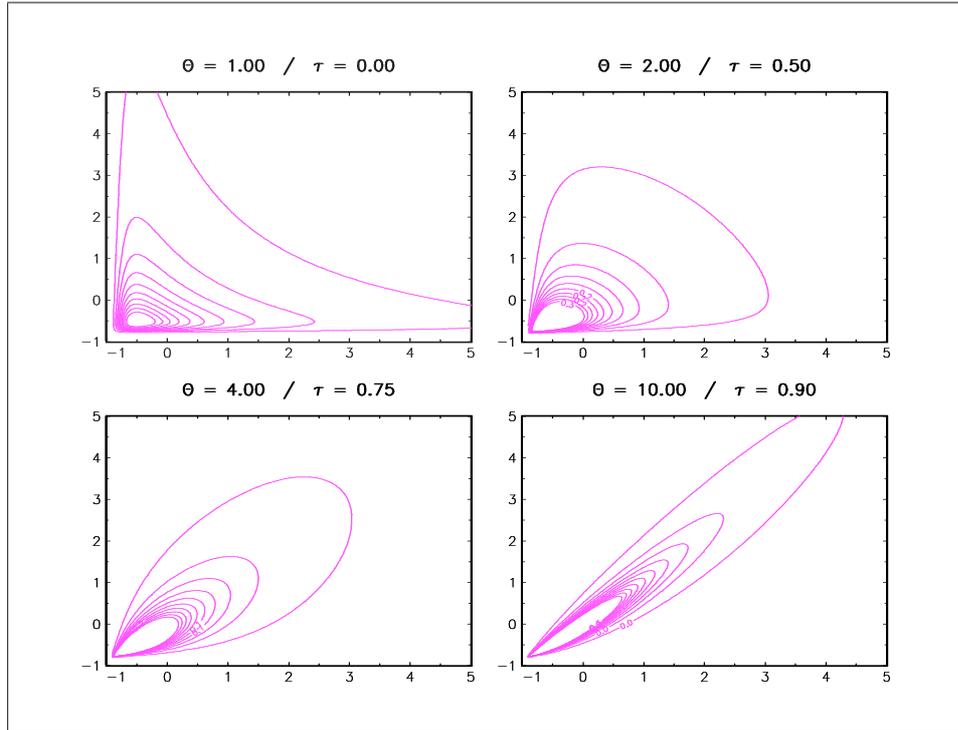
$$\mathbf{F}^*(x_1, x_2) = \exp \left( - \left[ (-\ln \mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{V}(x_1; 0, 1, 1))^\theta + (-\ln \mathcal{G}\mathcal{E}\mathcal{V}(x_2; 0, 1, 1.2))^\theta \right]^{1/\theta} \right) \quad (5.10)$$

### 5.1.2 Compléments mathématiques

Le théorème suivant permet de caractériser la loi des distributions des valeurs extrêmes dans le cas univarié :

**Théorème 11 (Th. 3.2.3 de Embrechts, Klüppelberg et Mikosch (1997))** *Supposons  $m$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_m$  indépendantes et de même loi de distribution  $\mathbf{F}$ . S'il existe des constantes  $a_m$  et  $b_m$  et une distribution limite non dégénérée  $\mathbf{F}^*$  telles que*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{\chi_m^+ - b_m}{a_m} \leq x \right) = \mathbf{F}^*(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (5.11)$$



Graphique 5.1. Exemples de distribution de valeurs extrêmes bivariées

alors  $\mathbf{F}^*$  appartient à l'un des trois types suivants de distribution :

Type I	(Gumbel)	$\mathbf{F}^*(x) = \exp(-e^{-x})$	$x \in \mathbb{R}$	$f^*(x) = \exp(-x - e^{-x})$
Type II	(Fréchet)	$\mathbf{F}^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases}$	$x \leq 0$ $x > 0$	$f^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \alpha x^{-(1+\alpha)} \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases}$
Type III	(Weibull)	$\mathbf{F}^*(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$	$x \leq 0$ $x > 0$	$f^*(x) = \begin{cases} \alpha (-x)^{\alpha-1} \exp(-(-x)^\alpha) & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

**Remarque 21** Pour distinguer les trois distributions, on utilise généralement les notations suivantes :  $\Lambda$  pour la distribution Gumbel,  $\Phi_\alpha$  pour la distribution Fréchet et  $\Psi_\alpha$  pour la distribution Weibull (RESNICK [1987]).

**Définition 14** On dit qu'une distribution  $\mathbf{F}$  appartient au max-domaine d'attraction de  $\mathbf{F}^*$ , et on note  $\mathbf{F} \in \text{MDA}(\mathbf{F}^*)$  si la distribution du maximum normalisé converge vers  $\mathbf{F}^*$ .

**Exemple 16** Considérons la distribution exponentielle standard. Nous avons

$$\mathbf{F}(x) = 1 - \exp(-x) \quad (5.12)$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned} \Pr\left(\frac{\chi_m^+ - b_m}{a_m} \leq x\right) &= \Pr(\chi_m^+ \leq a_m x + b_m) \\ &= \mathbf{F}^m(a_m x + b_m) \\ &= (1 - \exp(-a_m x - b_m))^m \end{aligned} \quad (5.13)$$

Si nous posons  $a_m = 1$  et  $b_m = \ln m$ , nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \Pr\left(\frac{\chi_m^+ - b_m}{a_m} \leq x\right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m} \exp(-x)\right)^m \\ &= \exp(-\exp(-x)) \end{aligned} \quad (5.14)$$

car

$$\begin{aligned}\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\end{aligned}\quad (5.15)$$

La distribution exponentielle appartient donc au max-domaine d'attraction de  $\Lambda$ .

Dans le cas multidimensionnel, nous cherchons à caractériser la distribution limite du vecteur  $\chi_m^+$ .

**Théorème 12** *La classe des distributions MVE est la classe des distributions avec une copule EV et des marges non dégénérées.*

**Preuve.** La preuve complète de ce théorème est dans DEHEUVELS [1978] et GALAMBOS [1978]. L'idée est la suivante (JOE [1997]). Supposons que  $\mathbf{C}$  est une copule EV et que les marges sont des distributions EV. Dans ce cas,  $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_n(x_n))$  est-elle une distribution MEV? D'après la théorie des valeurs extrêmes univariées,  $\mathbf{C}^k(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_n(x_n))$  et  $\mathbf{C}(\mathbf{F}_1^k(x_1), \dots, \mathbf{F}_n^k(x_n))$  doivent avoir la même distribution limite pour tout entier  $k$ . Nous avons

$$\mathbf{C}(u_1^k, \dots, u_n^k) = \mathbf{C}^k(u_1, \dots, u_n) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (5.16)$$

Ceci peut-être étendu au cas  $k \in \mathbb{R}_+$ . ■

Nous suivons maintenant JOE [1987] pages 174-175 afin d'obtenir la représentation Deheuvels/Pickands des distributions MEV. Soit  $\mathbf{D}$  une distribution multivariée dont les marges de survie sont des exponentielles standards et la copule est une copule à valeurs extrêmes. En utilisant la relation<sup>1</sup> suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n) &= \mathbf{C}(e^{-\tilde{u}_1}, \dots, e^{-\tilde{u}_n}) \\ &= \mathbf{D}(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)\end{aligned}\quad (5.17)$$

nous avons

$$\mathbf{D}^t(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{D}(t\tilde{\mathbf{u}}) \quad (5.18)$$

$\mathbf{D}$  est donc une distribution multivariée exponentielle min-stable (*min-stable multivariate exponential* (MSMVE) distribution).

**Théorème 13 (Représentation Deheuvels/Pickands des distributions MSMVE)** *Soit  $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}})$  une fonction de survie avec des marges exponentielles.  $\mathbf{D}$  satisfait*

$$-\ln \mathbf{D}(t\tilde{\mathbf{u}}) = -t \ln \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \forall t > 0 \quad (5.19)$$

si et seulement si la représentation de  $\mathbf{D}$  est

$$-\ln \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) = \int \dots \int_{\mathcal{S}_n} \max_{1 \leq i \leq n} (q_i \tilde{u}_i) dS(\mathbf{q}) \quad \tilde{\mathbf{u}} \geq \mathbf{0} \quad (5.20)$$

où  $\mathcal{S}_n$  est le simplexe unitaire et  $S$  est une mesure finie sur  $\mathcal{S}_n$ .

C'est la formulation donnée par JOE [1997]. Parfois, la représentation Deheuvels/Pickands est présentée en utilisant une *fonction de dépendance extrême*  $B(\mathbf{w})$  définie par

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) &= \exp \left[ - \left( \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i \right) B(w_1, \dots, w_n) \right] \\ B(\mathbf{w}) &= \int \dots \int_{\mathcal{S}_n} \max_{1 \leq i \leq n} (q_i w_i) dS(\mathbf{q})\end{aligned}\quad (5.21)$$

avec  $w_i = (\sum_{i=1}^n \tilde{u}_i)^{-1} \tilde{u}_i$ .  $B$  est une fonction convexe qui vérifie

$$\max(w_1, \dots, w_n) \leq B(w_1, \dots, w_n) \leq 1 \quad (5.22)$$

C'est la formulation donnée par TAWN [1990].

<sup>1</sup>Nous rappelons que  $\tilde{u} = -\ln u$ .

**Théorème 14** Une copule EV vérifie la condition suivante :

$$\mathbf{C}^\perp \prec \mathbf{C} \prec \mathbf{C}^+ \quad (5.23)$$

**Preuve.** Dans le paragraphe suivant, nous montrons ce résultat dans le cas bivarié. La preuve du cas multivarié est analogue. ■

### 5.1.3 Le cas bivarié

Dans le cas bivarié, la distribution des valeurs extrêmes présente une formulation plus simple car la convexité et la propriété (5.22) deviennent des conditions nécessaires et suffisantes pour la représentation (5.21) — TAWN [1988]. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1, u_2) &= \mathbf{D}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \\ &= \exp \left[ -(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2) B \left( \frac{\tilde{u}_1}{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2}, \frac{\tilde{u}_2}{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2} \right) \right] \\ &= \exp \left[ \ln(u_1 u_2) B \left( \frac{\ln u_1}{\ln(u_1 u_2)}, \frac{\ln u_2}{\ln(u_1 u_2)} \right) \right] \\ &= \exp \left[ \ln(u_1 u_2) A \left( \frac{\ln u_1}{\ln(u_1 u_2)} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

avec  $A(w) = B(w, 1-w)$ . Bien sûr,  $A$  est convexe avec  $A(0) = A(1) = 1$  et vérifie  $\max(w, 1-w) \leq A(w) \leq 1$ . Par exemple, pour la copule Gumbel, nous avons  $-\ln \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) = (\tilde{u}_1^\alpha + \tilde{u}_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $B(w_1, w_2) = (\tilde{u}_1^\alpha + \tilde{u}_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} / (\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2) = (w_1^\alpha + w_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  et  $A(w) = [w^\alpha + (1-w)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}$ .

**Théorème 15** Une copule EV bivariée vérifie la condition suivante :

$$\mathbf{C}^\perp \prec \mathbf{C} \prec \mathbf{C}^+ \quad (5.25)$$

**Preuve.** Nous avons

$$\begin{aligned} &\max(w, 1-w) \leq A(w) \leq 1 \\ \Leftrightarrow &\max \left( \frac{\ln u_1}{\ln(u_1 u_2)}, \frac{\ln u_2}{\ln(u_1 u_2)} \right) \leq A \left( \frac{\ln u_1}{\ln(u_1 u_2)} \right) \leq 1 \\ \Leftrightarrow &\min(\ln u_1, \ln u_2) \geq \ln(u_1 u_2) A \left( \frac{\ln u_1}{\ln(u_1 u_2)} \right) \geq \ln(u_1 u_2) \\ \Leftrightarrow &\min(u_1, u_2) \geq \exp \left[ \ln(u_1 u_2) A \left( \frac{\ln u_1}{\ln(u_1 u_2)} \right) \right] \geq u_1 u_2 \\ \Leftrightarrow &\mathbf{C}^+ \succ \mathbf{C} \langle \mathbf{G} \rangle \succ \mathbf{C}^\perp \end{aligned} \quad (5.26)$$

■

La spécification précédente des copules EV simplifie les calculs. Par exemple, nous avons (KHOUDRAJI [1995], CAPÉRAÀ, FOGÈRES et GENEST [1997]) :

$$\begin{aligned} \tau &= 4 \int_{[0,1]} w(1-w) d \ln A(w) \\ \varrho &= 12 \int_{[0,1]} \frac{1}{[A(w) + 1]^2} dw - 3 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Lorsque les valeurs extrêmes sont indépendantes, nous avons  $A(w) = 1$  et donc  $\tau = \varrho = 0$ . Le cas de la dépendance parfaite correspond à  $A(w) = \max(w, 1-w)$  ce qui donne la copule  $\mathbf{C}^+$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1, u_2) &= \exp \left[ \ln(u_1 u_2) \max \left( \frac{\ln u_1}{\ln(u_1 u_2)}, \frac{\ln u_2}{\ln(u_1 u_2)} \right) \right] \\ &= \min(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Le tableau suivant contient les copules EV les plus connues (GHOUDI, KHOUDRAJI et RIVEST [1998]) :

Copule	$\theta$	$\mathbf{C}(u_1, u_2)$	$A(w)$
$\mathbf{C}^\perp$		$u_1 u_2$	1
Gumbel	$[1, \infty)$	$\exp \left[ - (\tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta)^{1/\theta} \right]$	$\left[ w^\theta + (1-w)^\theta \right]^{1/\theta}$
Gumbel II	$[0, 1]$	$u_1 u_2 \exp \left[ \theta \frac{\tilde{u}_1 \tilde{u}_2}{\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2} \right]$	$\theta w^2 - \theta w + 1$
Galambos	$[0, \infty)$	$u_1 u_2 \exp \left[ (\tilde{u}_1^{-\theta} + \tilde{u}_2^{-\theta})^{-1/\theta} \right]$	$1 - \left[ w^{-\theta} + (1-w)^{-\theta} \right]^{-1/\theta}$
Hüsler-Reiss	$[0, \infty)$	$\exp \left[ -\tilde{u}_1 \vartheta(u_1, u_2; \theta) - \tilde{u}_2 \vartheta(u_2, u_1; \theta) \right]$	$w \xi(w; \theta) + (1-w) \xi(1-w; \theta)$
Marshall-Olkin	$[0, 1]^2$	$u_1^{1-\theta_1} u_2^{1-\theta_2} \min(u_1^{\theta_1}, u_2^{\theta_2})$	$\max(1 - \theta_1 w, 1 - \theta_2(1-w))$
$\mathbf{C}^+$		$\min(u_1, u_2)$	$\max(w, 1-w)$

avec  $\vartheta(u_1, u_2; \theta) = \Phi(1/\theta + 0.5\theta \ln(\ln u_1 / \ln u_2))$  and  $\xi(w; \theta) = \vartheta(w, 1-w; \theta)$ .

## 5.2 Caractérisation des domaines d'attraction

Soit  $\mathbf{F}$  la distribution multidimensionnelle dont les marges sont  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$  et dont la copule est  $\mathbf{C}$ . Soit  $\mathbf{F}^*$  la distribution multidimensionnelle des valeurs extrêmes. Notons  $\mathbf{F}_1^*, \dots, \mathbf{F}_n^*$  les marges de  $\mathbf{F}^*$  et  $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}(\mathbf{F}^*)$  la copule correspondante. Nous avons alors le théorème suivant :

**Théorème 16**  $\mathbf{F} \in \text{MDA}(\mathbf{F}^*)$  si et seulement si

1.  $\mathbf{F}_i \in \text{MDA}(\mathbf{F}_i^*)$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  ;
2.  $\mathbf{C} \in \text{MDA}(\mathbf{C}^*)$ .

Dans le cours sur la théorie des valeurs extrêmes, vous avez vu comment caractériser le max-domaine d'attraction dans le cas unidimensionnel et aussi comment calculer les coefficients de normalisation. Ces coefficients de normalisation sont valides dans le cas multidimensionnel. Donc, la seule difficulté est la détermination de  $\mathbf{C}^*$  :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{X_{m:m,1} - b_{m,1}}{a_{m,1}} \leq x_1, \dots, \frac{X_{m:m,n} - b_{m,n}}{a_{m,n}} \leq x_n \right) = \mathbf{C}^*(\mathbf{F}_1^*(x_1), \dots, \mathbf{F}_n^*(x_n))$$

**Théorème 17**  $\mathbf{C} \in \text{MDA}(\mathbf{C}^*)$  si  $\mathbf{C}$  satisfait la relation suivante :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{C}^t(u_1^{1/t}, \dots, u_n^{1/t}) = \mathbf{C}^*(u_1, \dots, u_n) \quad (5.29)$$

**Remarque 22** Si  $\mathbf{C}$  est une copule de valeurs extrêmes,  $\mathbf{C} \in \text{MDA}(\mathbf{C})$ . En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{C}^t(u_1^{1/t}, \dots, u_n^{1/t}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{C} \left( (u_1^{1/t})^t, \dots, (u_n^{1/t})^t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{C}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \mathbf{C}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Parfois, il est difficile de vérifier la relation (5.29). La condition suivante est plus facile à vérifier (ABDOUS, GHOUDI et KHOUDRAJI [1999]) :

**Théorème 18**  $\mathbf{C} \in \text{MDA}(\mathbf{C}^*)$  si et seulement si

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \mathbf{C}((1-u)^{w_1}, \dots, (1-u)^{w_n})}{u} = B(w_1, \dots, w_n) \quad (5.31)$$

Dans le cas bidimensionnel, cette condition devient

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \mathbf{C}((1-u)^{1-t}, (1-u)^t)}{u} = A(t) \quad (5.32)$$

pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Exemple 17** *Considérons la distribution de  $(X_1, X_2)$  définie par*

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \left( (1 - e^{-x_1})^{-\theta} + x_2^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta} \quad (5.33)$$

sur  $[0, \infty] \times [0, 1]$ . Les marges de  $\mathbf{F}(x_1, x_2)$  sont donc

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(x_1) &= \mathbf{F}(x_1, 1) \\ &= 1 - e^{-x_1} \end{aligned} \quad (5.34)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2(x_2) &= \mathbf{F}(\infty, x_2) \\ &= x_2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

$X_1$  est donc une variable aléatoire exponentielle et  $X_2$  est une variable aléatoire uniforme. Nous cherchons à caractériser la distribution bidimensionnelle des valeurs extrêmes :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{X_{m:m,1} - b_{m,1}}{a_{m,1}} \leq x_1, \frac{X_{m:m,2} - b_{m,2}}{a_{m,2}} \leq x_2 \right) = \mathbf{C}^*(\mathbf{F}_1^*(x_1), \mathbf{F}_2^*(x_2)) \quad (5.36)$$

Nous savons que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{X_{m:m,1} - \ln m}{1} \leq x_1 \right) = \Lambda(x_1) \quad (5.37)$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Pr \left( \frac{X_{m:m,2} - 1}{m^{-1}} \leq x_2 \right) = \Psi_1(x_2) \quad (5.38)$$

La copule de  $\mathbf{F}$  est la copule Clayton :

$$\mathbf{C}(u_1, u_2) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta} \quad (5.39)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \mathbf{C} \left( (1-u)^t, (1-u)^{1-t} \right)}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \left( (1-u)^{-\theta t} + (1-u)^{-\theta(1-t)} - 1 \right)^{-1/\theta}}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \theta u + o(u))^{-1/\theta}}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u + o(u)}{u} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.40)$$

$A(t)$  est donc égal à 1, nous en déduisons que

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^\perp \quad (5.41)$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^*(x_1, x_2) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \Pr (X_{m:m,1} - \ln m \leq x_1, m(X_{m:m,2} - 1) \leq x_2) \\ &= \Lambda(x_1) \times \Psi_1(x_2) \\ &= \exp(-e^{-x_1}) \exp(x_2) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Si maintenant nous changeons la copule de  $\mathbf{F}$ , seule la copule  $\mathbf{C}^*$  est modifiée. Par exemple, si  $\mathbf{C}$  est la copule Normale de paramètre  $\rho < 1$ , alors

$$\mathbf{F}^*(x_1, x_2) = \exp(-e^{-x_1}) \exp(x_2) \quad (5.43)$$

Si  $\mathbf{C}$  est la copule Normale de paramètre  $\rho = 1$ , nous avons

$$\mathbf{F}^*(x_1, x_2) = \min(\exp(-e^{-x_1}), \exp(x_2)) \quad (5.44)$$

Si  $\mathbf{C}$  est la copule Gumbel, nous obtenons

$$\mathbf{F}^*(x_1, x_2) = \exp\left(-\left(\exp(-\theta x_1) + (-x_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right) \quad (5.45)$$

Nous finissons ce paragraphe en évoquant le lien entre la dépendance de queue de  $\mathbf{C}$  et celle de la copule des valeurs extrêmes  $\mathbf{C}^*$  :

**Théorème 19** La dépendance de queue de  $\mathbf{C}^*$  est égale à la dépendance de queue de  $\mathbf{C}$ .

**Remarque 23** Les valeurs extrêmes multiples sont donc indépendantes si la copule  $\mathbf{C}$  n'a pas de dépendance de queue.

### 5.3 L'exemple des copules Archimax

Cette section est extraite du GT ENSAE d'Antoine Bezat et Ashkan Nikeghbali (Rapport disponible sur le site web du GRO).

Nous considérons une nouvelle famille de copules introduite par CAPÉRAÀ, FOUGÈRES et GENEST [2000] qui englobe la plupart des familles connues des copules, notamment les copules Archimédiennes et toutes les copules de valeurs extrêmes. Cette nouvelle famille offre plus de flexibilité pour la modélisation. En effet, nous pouvons connaître a priori les différents max-domaines d'attraction.

**Définition 15** Une fonction bivariée est une copule Archimax si et seulement si elle est de la forme

$$\mathbf{C}_{\phi, A}(x, y) = \phi^{-1}\left[(\phi(x) + \phi(y)) A\left(\frac{\phi(x)}{\phi(x) + \phi(y)}\right)\right] \quad (5.46)$$

pour tout  $0 \leq x, y \leq 1$ , avec

1.  $A : [0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$  tel que  $\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1$  pour tout  $0 \leq t \leq 1$  ;
2.  $\phi : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  est une fonction convexe, décroissante qui vérifie  $\phi(1) = 0$ . Nous adopterons la convention  $\phi(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t)$  et  $\phi^{-1}(s) = 0$  pour  $s \geq \phi(0)$ .

Nous voyons aisément que cette nouvelle famille de copules contient toutes les copules Archimédiennes et toutes les copules de valeurs extrêmes. En effet, si  $\phi(t) = \ln(1/t)$ , nous obtenons

$$\mathbf{C}_{\phi, A}(x, y) = \mathbf{C}_A(x, y) = \exp\left[\ln(xy) A\left(\frac{\ln(y)}{\ln(xy)}\right)\right] \quad (5.47)$$

pour tout  $0 \leq x, y \leq 1$ . On reconnaît la forme générale des copules bivariées de valeurs extrêmes. Si on choisit maintenant de prendre  $A(t) \equiv 1$ , on retrouve la forme générale des copules Archimédiennes :

$$\mathbf{C}_{\phi, A}(x, y) = \mathbf{C}_\phi(x, y) = \phi^{-1}(\phi(x) + \phi(y)) \quad (5.48)$$

L'intérêt de la construction (5.46) réside dans le fait qu'avec un choix judicieux de  $\phi$  et  $A$ , on obtient une copule qui sera dans le max-domaine d'attraction de n'importe quel "attracteur"  $\mathbf{C}_{A^*}$  donné.

Soit  $\mathbf{C}_{\phi, A}$  une copule Archimax telle que  $\phi(1-1/t) \in \text{RV}_{-m}$  pour un certain  $m \geq 1$ . Alors  $\mathbf{C}_{\phi, A}$  appartient au max-domaine d'attraction de la copule  $\mathbf{C}_{A^*}$  où la fonction  $A^*$  est donnée par

$$A^*(t) = [t^m + (1-t)^m]^{1/m} A^{1/m}\left(\frac{t^m}{t^m + (1-t)^m}\right) \quad (5.49)$$

pour  $t \in [0, 1]$ . Cet attracteur peut être considéré de deux points de vue :  $\mathbf{C}_{A^*}$  est une copule Archimax de générateur  $A^*$  et  $\phi(t) = \ln(1/t)$  ou  $\mathbf{C}_{A^*}$  est une copule Archimax de générateurs  $A$  et  $\phi^*(t) = \ln^m(1/t)$ . De plus,  $A^*$  et  $A$  coïncident si et seulement si  $m = 1$ .

Il est alors très facile de montrer que la seule copule Archimédienne et de valeurs extrêmes est la copule Gumbel.

En faisant un raisonnement en sens inverse, on remarque que  $\mathbf{C}_{\phi,A}$  appartient au max-domaine d'attraction de  $\mathbf{C}_{A^*}$  si  $\phi(1-1/t) \in \text{RV}_{-m}$  et

$$A(t) = \left[ t^{1/m} + (1-t)^{1/m} \right]^m \left\{ A^* \left( \frac{t^{1/m}}{t^{1/m} + (1-t)^{1/m}} \right) \right\}^m \quad (5.50)$$

Maintenant il faut savoir si la relation (5.50) définit bien une fonction de dépendance. En posant  $D(t) = \partial_t \ln(A^*(t))$ ,  $\mathbf{H}^*(t) = t + (1-t)D(t)$  et  $h^*(t) = \partial_t \mathbf{H}^*(t)$ , CAPÉRAÀ, FOUGÈRES et GENEST [2000] montrent que la relation (5.50) est vraie si et seulement si

$$\frac{h^*(t)}{\mathbf{H}^*(t)(1-\mathbf{H}^*(t))} \geq \frac{m}{t(1-t)} \quad (5.51)$$

pour  $t \in [0, 1]$ . On peut au passage remarquer que cette relation reste valable pour tout  $1 \leq m' \leq m$ . Ainsi, si  $A(t)$  est définie par (5.50),  $\mathbf{C}_{\phi,A}$  appartient au max-domaine d'attraction de  $\mathbf{C}_{A^*}$  pourvu que  $\phi(1-1/t) \in \text{RV}_{-m'}$  pour  $1 \leq m' \leq m$ . Enfin, on peut aussi remarquer que pour des générateurs  $A$  et  $\phi$  quelconques tels que  $\phi(1-1/t) \in \text{RV}_{-m}$ , on a

$$\lambda = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + \mathbf{C}_{\phi,A}(u, u)}{1 - u} = 2 - \{2A(1/2)\}^{1/m} \leq 1 \quad (5.52)$$

Ainsi, les copules Archimax présentent une dépendance au niveau supérieur de la queue de distribution sauf si  $m = 1$  et  $A \equiv 1$ .

On peut donner des exemples de copules Archimax. On peut par exemple considérer le générateur de TAWN [1988] qui est défini pour  $0 \leq \theta \leq 1$  par

$$A_\theta(t) = \theta t^2 - \theta t + 1 \quad (5.53)$$

pour  $t \in [0, 1]$  et le combiner au générateur de la copule Clayton<sup>2</sup>

$$\phi_{1,\eta}(t) = \frac{t^{-\eta} - 1}{\eta} \quad (5.54)$$

ou avec le générateur des copules<sup>3</sup> de GENEST et GHOUDI [1994]

$$\phi_{2,\eta}(t) = (1-t^\eta)^{1/\eta} \quad (5.55)$$

On peut remarquer que  $\phi_{2,\eta}(t) \in \text{RV}_{-1/\eta}$ . Ainsi, pour  $\eta \neq 1$ ,  $\mathbf{C}_{\phi_{2,\eta},A}(x, y)$  n'est pas dans le domaine d'attraction de  $\mathbf{C}_A$ . Enfin supposons que l'on veuille construire une copule dans le max-domaine d'attraction de

$$A_{\alpha,\beta}^*(t) = \left[ \alpha^k t^k + \beta^k (1-t)^k \right]^{1/k} + \left[ (1-\alpha)^k t^k + (1-\beta)^k (1-t)^k \right]^{1/k} \quad (5.56)$$

pour  $t \in [0, 1]$  avec  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$  et  $k \geq 1$ . Pour les valeurs  $\alpha = 1/10$ ,  $\beta = 3/10$ ,  $m = 3/2$  et  $k = 1.6$ , la condition (5.51) est vérifiée. La copule originale  $A$  est donc celle définie par l'expression (5.50).

## 5.4 Repères historiques

L'article de référence sur la théorie des valeurs extrêmes univariées est GNEDENKO [1943]. Les copules de valeurs extrêmes ont été introduites par Paul Deheuvels et Janos Galambos. La thèse d'Abdelhaq Khoudraji contient de nombreux résultats dans le cas bivarié (mesures de dépendance, simulation, copules EV asymétriques, etc.).

<sup>2</sup> $\eta > 0$ .

<sup>3</sup> $0 < \eta \leq 1$ .

## Références

- [1] ABDOUS, B., K. GHOUDI et A. KHOUDRAJI [2000], Non-parametric estimation of the limit dependence function of multivariate extremes, *Extremes*, **2(3)**, 245-268
- [2] CAPÉRAÀ, P., FOUGÈRES, A-L. et C. GENEST [1997], Estimation of bivariate extreme value copulas, *Biometrika*, **84**, 567-57
- [3] BEZAT, A. et A. NIKEGHBALI [2000], La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché, GT ENSAE (document disponible sur le site web du GRO)
- [4] CAPÉRAÀ, P., A-L. FOUGÈRES et C. GENEST [2000], Bivariate distributions with given extreme value attractor, *Journal of Multivariate Analysis*, **72**, 30-49
- [5] COLES, S.G. et J.A. TAWN [1991], Modelling extreme multivariate events, *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, **53**, 377-392
- [6] DEHEUVELS, P. [1978], Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **23**, 1-36
- [7] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C. et T. MIKOSCH [1997], Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag, Berlin
- [8] GALAMBOS, J. [1978], The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics, Kreiger Publishing, Melbourne
- [9] GENEST, C. et K. GHOUDI [1994], Une famille de lois bidimensionnelles insolite, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **318**, série I, 351-354
- [10] GENEST, C. et L-P. RIVEST [1989], A characterization of Gumbel's family of extreme value distributions, *Statistical Probability Letters*, **8(3)**, 207-211
- [11] GENEST, C. et L-P. RIVEST [2000], On the bivariate probability integral transformation, Université Laval, Québec, *Working Paper*
- [12] GHOUDI, K., A. KHOUDRAJI et L.P. RIVEST, [1998], Propriétés statistiques des copules de valeurs extrêmes bidimensionnelles, *Canadian Journal of Statistics*, **26**, 187-197
- [13] GNEDENKO, B. [1943], Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Annals of Mathematics*, **44**, 423-453
- [14] JOE, H. [1997], Multivariate Models and Dependence Concepts, Chapman & Hall, London
- [15] KHOUDRAJI, A. [1995], Contribution à l'étude des copules et à la modélisation des copules de valeurs extrêmes bivariées, Thèse de Doctorat, Université Laval de Québec, Canada
- [16] RESNICK, S.I. [1987], Extreme Values, Point Processes and Regular Variation, Springer-Verlag, New York
- [17] TAWN, J.A. [1988], Bivariate extreme value theory : models and estimation, *Biometrika*, **75**, 397-415
- [18] TAWN, J.A. [1990], Modelling multivariate extreme value distributions, *Biometrika*, **77**, 245-253

# 6

## Simulation et méthodes de Monte Carlo

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de la simulation du vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  dont la distribution est

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \dots, \mathbf{F}_n(x_n)) \quad (6.1)$$

Ce problème revient à simuler le vecteur aléatoire  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$  dont la distribution est la copule  $\mathbf{C}$  et à utiliser la transformation  $\mathbf{X} = (\mathbf{F}_1^{-1}(U_1), \dots, \mathbf{F}_n^{-1}(U_n))$ . La difficulté majeure est donc de simuler la copule  $\mathbf{C}$ . Nous présentons trois méthodes pour obtenir des nombres aléatoires de  $\mathbf{C}$ . Parfois, les marges  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$  ne sont pas connus analytiquement. Dans ce cas, nous utilisons la méthode dite des quantiles empiriques.

### 6.1 Simulation de variables aléatoires uniformes indépendantes

Cette problématique est traitée dans le cours de Nicolas Baud “Simulations et Méthodes de Monte Carlo”. Dans cette section, nous voulons juste construire un générateur **SOBOL** afin de mieux comparer graphiquement les simulations. Les procédures suivantes permettent de simuler des nombres aléatoires uniformes et gaussiens à partir du générateur classique à congruences linéaires — `rndCopulaSobol(0)` — ou à partir du générateur **SOBOL** donné dans PRESS, TEUKOLSKY, VETTERLING et FLANNERY [1992] — `rndCopulaSobol(dim)`.

Code **GAUSS 21** (Générateurs **LCG** et **SOBOL** de nombres aléatoires uniformes et gaussiens)

```
/*
**> rndCopulaSobol
**
*/

proc (0) = rndCopulaSobol(dim);
  local x;
  if dim <= 0;
    _CopulaSobol = 0;
    retp;
  endif;
  _CopulaSobol = dim;
  dim = -1; x = 0;
  dllcall _dillsobol(dim,x);
  retp;
endp;
```

```

/*
**> rnduCopula
**
*/

proc (1) = rnduCopula(r,c);
  local dim,x,u,i;
  dim = _CopulaSobol;
  if dim /= 0;
    u = zeros(c,r);
    x = zeros(dim,1);
    for i(1,r,1);
      dllcall _dillsobol(dim,x);
      u[.,i] = x[1:c];
    endfor;
    retp( u' );
  else;
    retp( rndu(r,c) );
  endif;
endp;

/*
**> rndnCopula
**
*/

proc (1) = rndnCopula(r,c);
  if _CopulaSobol /= 0;
    retp( cdfni(rnduCopula(r,c)) );
  else;
    retp( rndn(r,c) );
  endif;
endp;

```

## 6.2 La méthode des distributions

C'est la méthode inverse de celle présentée dans l'introduction. Nous avons

$$\mathbf{C}(U_1, \dots, U_n) = \mathbf{F}(\mathbf{F}_1^{-1}(U_1), \dots, \mathbf{F}_n^{-1}(U_n)) \quad (6.2)$$

Pour simuler  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ , nous pouvons simuler le vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  de distribution  $\mathbf{F}$  et appliquer la transformation  $\mathbf{U} = (\mathbf{F}_1(X_1), \dots, \mathbf{F}_n(X_n))$ .

**Remarque 24** Cette méthode est intéressante si la distribution  $\mathbf{F}$  (ou plus exactement si une distribution  $\mathbf{F}$  générée par la copule  $\mathbf{C}$ ) est plus facile à simuler que la copule  $\mathbf{C}$ .

C'est par exemple le cas de la copule Normale, puisque nous savons très facilement simuler une distribution normale multidimensionnelle  $\mathcal{N}(0, \rho)$ . En effet, nous avons

$$\mathcal{N}(0, \rho) = \mathbf{P}\mathcal{N}(0, \mathbf{I}) \quad (6.3)$$

avec  $\mathbf{P}$  la décomposition triangulaire inférieure de Cholesky qui vérifie  $\mathbf{P}\mathbf{P}^\top = \rho$ .

**Code GAUSS 22 (Simulation de la copule Normale)**

```

/*
**> rndCopulaNormal
**
*/

```

```

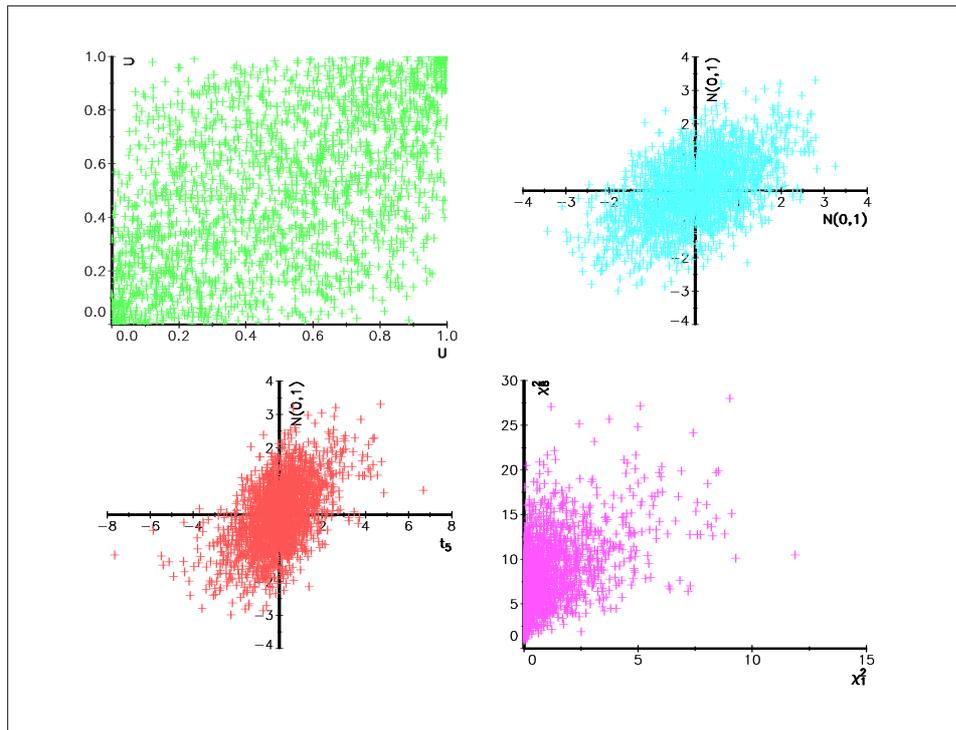
proc (1) = rndCopulaNormal(rho,ns);
  local u;
  u = rndnCopula(ns,rows(rho));
  retp( cdfn(u*chol(rho)) );
endp;

/*
**> rndCopulaNormal2
**
*/

proc (2) = rndCopulaNormal2(rho,ns);
  local u;
  u = rndnCopula(ns,2);
  retp( cdfn(u[.,1].*ones(rows(rho),cols(rho))),cdfn(rho.*u[.,1]+sqrt(1-rho^2).*u[.,2]) );
endp;

```

A titre d'illustration, nous simulons 4 distributions  $\mathbf{F}(x_1, x_2) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2))$  où  $\mathbf{C}$  est la copule Normale de paramètre  $\rho = 0.5$ . Les marges sont respectivement uniformes  $U_{[0,1]}$ , gaussiennes  $\Phi$ , Student  $t_5$  et gaussienne  $\Phi$  et chi-deux  $\chi_1^2$  et  $\chi_8^2$ . Pour le graphique 6.1, nous utilisons le générateur LCG alors que pour le graphique 6.2, nous employons le générateur SOBOL. Nous voyons que le second graphique est plus 'lisible' (du fait que les répartitions sont plus uniformes) que le premier.

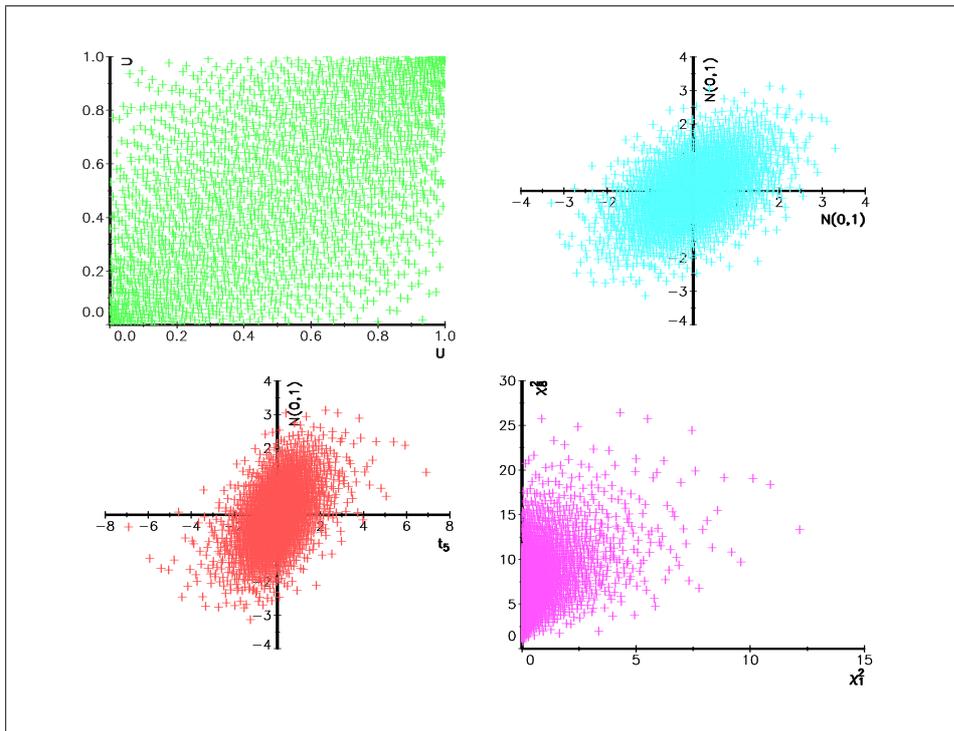


Graphique 6.1. Simulation de 4 distributions (générateur LCG)

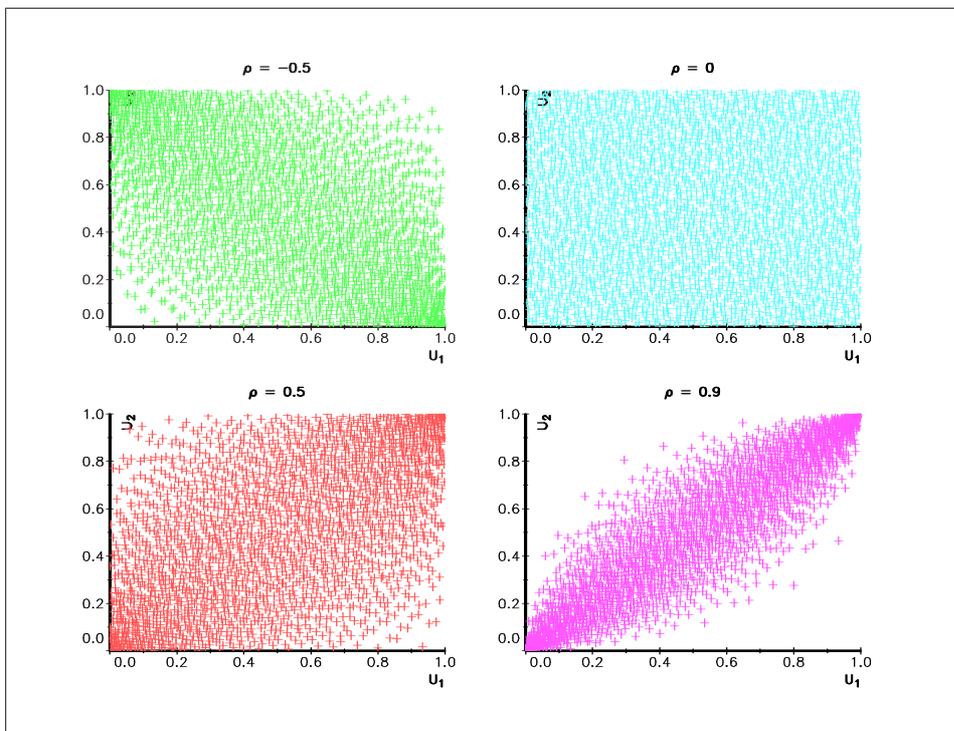
Considérons maintenant la copule Student. Soit  $\mathbf{X}$  un vecteur aléatoire dont la distribution est  $t_{\rho, \nu}$ . Nous avons

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{X}^*}{\sqrt{\chi_\nu^2 / \nu}} \quad (6.4)$$

avec  $\mathbf{X}^*$  un vecteur aléatoire gaussien de covariance  $\rho$  et  $\chi_\nu^2$  une variable aléatoire chi-deux à  $\nu$  degrés de libertés. Nous exploitons cette relation pour simuler cette copule.



Graphique 6.2. Simulation de 4 distributions (générateur SOBOL)



Graphique 6.3. Simulation de la copule Normale

### Code GAUSS 23 (Simulation de la copule Student)

```
/*
**> rndCopulaStudent
**
*/

proc (1) = rndCopulaStudent(rho,nu,ns);
  local u,n,chi2;
  if _CopulaSobol /= 0;
    u = rnduCopula(ns,1+rows(rho));
    n = cdfni(u[.,1:rows(rho)]);
    chi2 = cdfchii(u[.,1+rows(rho)],nu.*ones(ns,1));
  else;
    n = rndn(ns,rows(rho));
    chi2 = cdfchii(rndu(ns,1),nu.*ones(ns,1));
  endif;

  retp( cdfn((n*chol(rho))./sqrt(chi2./nu),nu) );
endp;

/*
**> rndCopulaStudent2
**
*/

proc (2) = rndCopulaStudent2(rho,nu,ns);
  local u,n,chi2,n1,n2;
  if _CopulaSobol /= 0;
    u = rnduCopula(ns,3);
    n = cdfni(u[.,1:2]);
    chi2 = cdfchii(u[.,3],nu.*ones(ns,1));
  else;
    n = rndn(ns,2);
    chi2 = cdfchii(rndu(ns,1),nu.*ones(ns,1));
  endif;

  n1 = n[.,1].*ones(rows(rho),cols(rho));
  n2 = rho.*n[.,1]+sqrt(1-rho^2).*n[.,2];
  chi2 = sqrt(chi2./nu);

  retp( cdfn(n1./chi2,nu),cdfn(n2./chi2,nu) );
endp;
```

A titre d'illustration, nous reprenons les exemples de la copule Normale en utilisant désormais la copule Student (graphiques 6.4 et 6.5). Le graphique 6.6 permet de comparer directement les deux copules. Nous vérifions bien que la copule Student corrèle les valeurs extrêmes et qu'elle ne correspond pas à  $\mathbf{C}^\perp$  lorsque  $\rho = 0$ .

## 6.3 La méthode des distributions conditionnelles

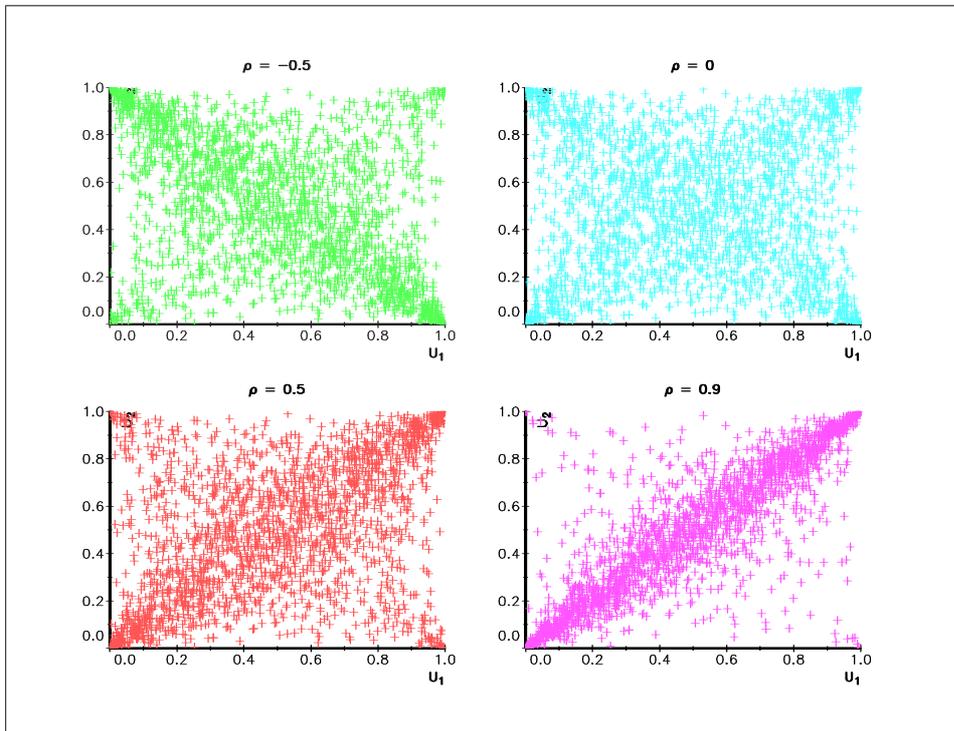
Considérons le cas bivarié. Soit  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  un vecteur aléatoire dont la distribution est  $\mathbf{C}$ . Nous savons que

$$\Pr \{U_1 \leq u_1\} = u_1 \quad (6.5)$$

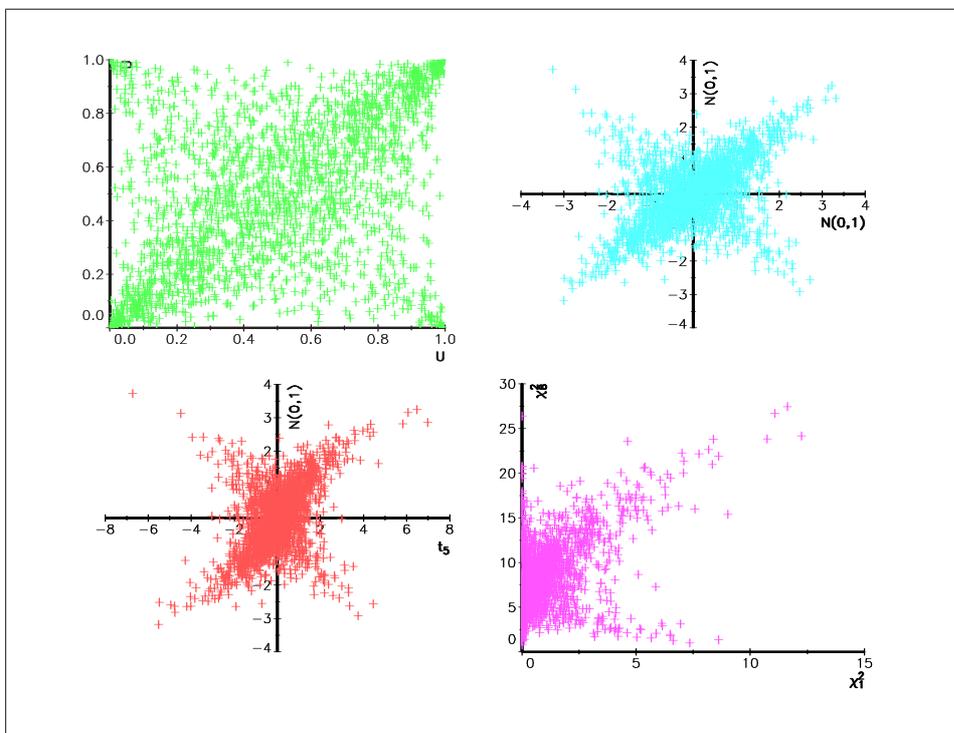
et

$$\Pr \{U_2 \leq u_2 \mid U_1 = u_1\} = \mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2) \quad (6.6)$$

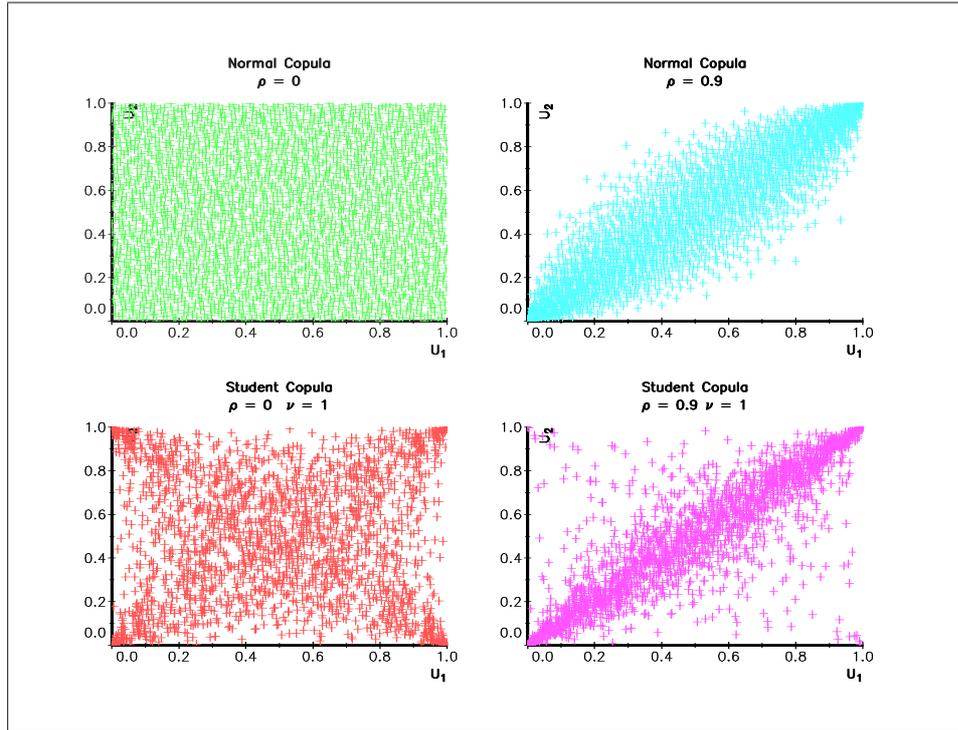
Comme  $\mathbf{C}(U_1, 1)$  et  $\mathbf{C}_{2|1}(u_1, U_2)$  sont deux variables aléatoires uniformes, nous obtenons l'algorithme suivant :



Graphique 6.4. Simulation de la copule Student ( $\nu = 1$ )



Graphique 6.5. Simulation de 4 distributions avec une copule Student ( $\rho = 0.5, \nu = 1$ )



Graphique 6.6. Comparaison des copules Normale et Student

1. Simuler deux variables aléatoires uniformes  $v_1$  et  $v_2$ .
2. Prendre  $u_1$  égal à  $v_1$ .
3. Soit  $\mathbf{C}(u_2; u_1) = \mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2)$ . Prendre  $u_2$  égal à  $\mathbf{C}^{-1}(v_2; u_1)$ .

Cet algorithme est suggéré par GENEST et MACKAY [1986]. Il est utilisé par GENEST [1987] pour simuler la copule Frank. Nous rappelons que la distribution de cette copule est

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad (6.7)$$

Nous en déduisons que

$$\mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2; \theta) = \frac{(e^{-\theta u_2} - 1)e^{-\theta u_1}}{(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)} \quad (6.8)$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{-1}(u; u_1) &= \{u_2 : \mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2; \theta) = u\} \\ &= -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{u(e^{-\theta} - 1)}{u + (1 - u)e^{-\theta u_1}} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Code GAUSS 24 (Simulation de la copule Frank)

```
/*
**> rndCopulaFrank
**
*/
```

```
proc (2) = rndCopulaFrank(theta, ns);
  local v, u1, u2;
  v = rnduCopula(ns, 2);
```

```

u1 = v[.,1] .* ones(rows(theta),cols(theta));
u2 = -ln(1 + v[.,2] .* (exp(-theta)-1) ./ (v[.,2] + (1-v[.,2]) .* exp(-theta.*u1) )) ./ theta;
retp(u1,u2);
endp;

```

Dans de nombreux cas, il n'est pas possible d'obtenir une formule analytique de  $\mathbf{C}^{-1}(u; u_1)$  (voir JOE [1987], pages 146 et 147). Dans ce cas, nous pouvons résoudre l'équation  $\mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2; \theta) = u$  par une méthode numérique. La procédure suivante `rndCopula2` est construite à partir d'une bisection classique. Lorsque la distribution conditionnelle  $\mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2; \theta)$  n'est pas spécifiée, celle-ci est obtenue par une méthode de gradient numérique.

**Code GAUSS 25 (Simulation d'une copule bivariee par la méthode des distributions conditionnelles)**

```

/*
**> rndCopula2
**
*/

proc (2) = rndCopula2(cdfCopula,cndCopula,ns);
  local v,u1,u2;
  _CopulaFunction = cdfCopula|cndCopula;
  v = rnduCopula(ns,2);
  _Copula_v = v;
  u1 = v[.,1];
  u2 = rndCopulaFindZero(&_rndCopula2,0+__machepts,1-__machepts);
  retp(u1,u2);
endp;

proc _rndCopula2(u2);
  local cdfCopula,cndCopula,u,w;
  cdfCopula = _CopulaFunction[1];
  cndCopula = _CopulaFunction[2];
  if cndCopula /= 0;
    local cndCopula:proc;
    u = cndCopula(_Copula_v[.,1],u2);
  else;
    {u,w} = gradp2D(cdfCopula,_Copula_v[.,1],u2);
  endif;
  retp( u - _Copula_v[.,2] );
endp;

proc rndCopulaFindZero(f,a,b);
  local f:proc;
  local ya,yb,Nobs,c,yc,indx1,indx2;
  local indx,s,diff,const;

  ya = f(a); yb = f(b);
  Nobs = rows(ya);
  a = a .* ones(Nobs,1);
  b = b .* ones(Nobs,1);

  indx = (ya .< 0) .and (yb .> 0);
  if sumc(indx) == 0;
    retp(miss(zeros(Nobs,1),0));
  endif;

  if sumc(indx) == Nobs;

    do while maxc(abs(a-b)) > _rndCopulaFindZero_Tol;

```

```

        c = (a+b)/2;
        yc = f(c);
        indx1 = yc.<0;
        indx2 = 1 - indx1;
        a = indx1.*c + indx2.*a;
        b = indx1.*b + indx2.*c;
    endo;

else;

    s = delif(seqa(1,1,Nobs),indx);
    diff = selif(a-b,indx);
    const = miss(zeros(Nobs-sumc(indx),1),0);

    do while maxc(abs(diff)) > _rndCopulaFindZero_Tol;
        c = (a+b)/2;
        c[s] = const;
        yc = f(c);
        indx1 = yc.<0;
        indx2 = 1 - indx1;
        a = indx1.*c + indx2.*a;
        b = indx1.*b + indx2.*c;
        diff = selif(a-b,indx);
    endo;

endif;

c = (a+b)/2;

retp(c);
endp;

```

A partir de cette procédure, nous pouvons très facilement simuler la copule Gumbel soit en utilisant la distribution bivariee soit en utilisant la distribution conditionnelle.

#### Code GAUSS 26 (Simulation de la copule Gumbel (première version))

```

/*
**> rndCopulaGumbel
**
*/

proc (2) = rndCopulaGumbel(theta,ns);
    _CopulaParameters = theta;
    retp( rndCopula2(&_rndCopulaGumbel,0,ns) );
endp;

proc _rndCopulaGumbel(u1,u2);
    retp( _cdfCopulaGumbel(u1,u2,_CopulaParameters) );
endp;

```

#### Code GAUSS 27 (Simulation de la copule Gumbel (deuxième version))

```

/*
**> rndCopulaGumbel
**
*/

proc (2) = rndCopulaGumbel(theta,ns);

```

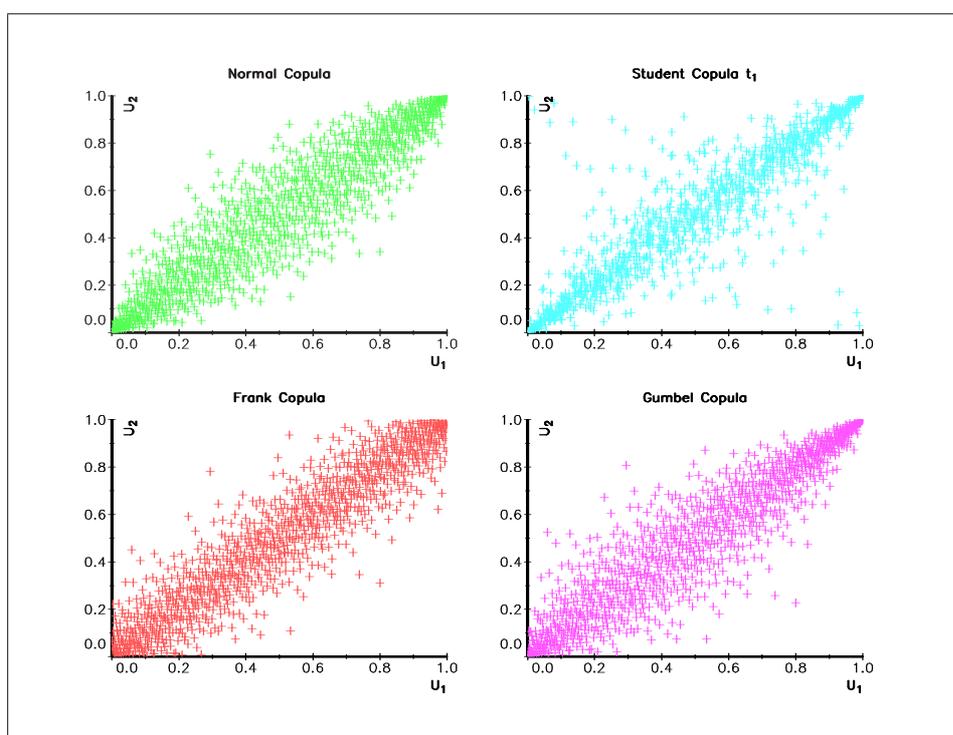
```

_CopulaParameters = theta;
retp( rndCopula2(0,&_rndCopulaGumbel,ns) );
endp;

proc _rndCopulaGumbel(u1,u2);
local theta,u1tilde,u2tilde,beta,w;
theta = _CopulaParameters;
u1tilde = -ln(u1); u2tilde = -ln(u2);
w = u1tilde^theta + u2tilde^theta;
beta = 1./theta;
retp( exp(-(w^beta)) .* ( 1+ (u2tilde./u1tilde)^theta )^(-1+beta) ./ u1 );
endp;

```

Bien sûr, la seconde version est plus stable, puisqu'elle ne fait pas appel à une dérivation numérique. Cependant, les deux procédures donnent pratiquement les mêmes nombres aléatoires, puisque la différence maximale sur les 1024 premiers nombres du générateur Sobol est  $7.57 \times 10^{-6}$ .



Graphique 6.7. Simulation des copules Normale, Student, Frank et Gumbel (marges uniformes)

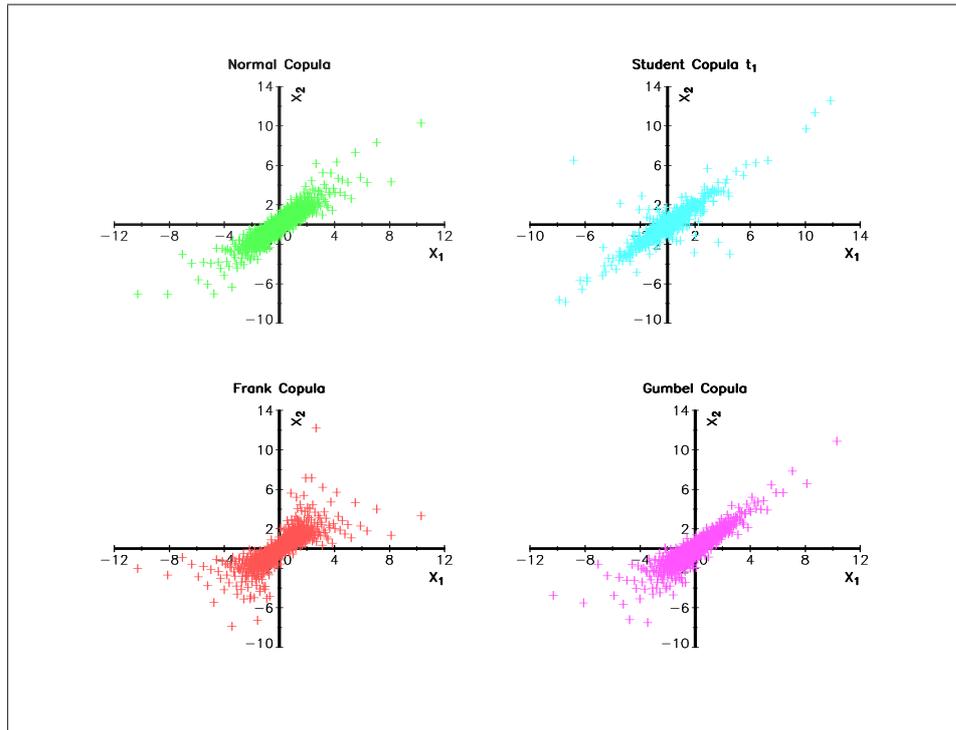
La méthode bivariable s'étend sans difficultés (sur le plan mathématique) au cas multivarié. Prenons par exemple le cas trivarié. Nous avons l'algorithme suivant :

1. Simuler trois variables aléatoires uniformes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ .
2. Prendre  $u_1$  égal à  $v_1$ .
3. Soit  $\mathbf{C}(u_2; u_1) = \mathbf{C}_{2|1}(u_1, u_2, 1)$ . Prendre  $u_2$  égal à  $\mathbf{C}^{-1}(v_2; u_1)$ .
4. Soit  $\mathbf{C}(u_3; u_1, u_2) = \mathbf{C}_{3|1,2}(u_1, u_2, u_3)$ . Prendre  $u_3$  égal à  $\mathbf{C}^{-1}(v_3; u_1, u_2)$ .

La seule difficulté **numérique** est donc le calcul de la distribution conditionnelle  $\mathbf{C}_{m|1,\dots,m-1}(u_1, \dots, u_{m-1})$  pour  $m \leq n$ . Cela n'est cependant pas un problème si vous maîtrisez la récursivité.

**Exercice 4** *Ecrire une procédure GAUSS pour simuler une copule de dimension  $n$  à partir de la méthode des distributions conditionnelles (25 lignes de code suffisent si vous employez une procédure récursive<sup>1</sup>).*

<sup>1</sup>Vous pouvez vous inspirer de la procédure de densité multivariée du chapitre suivant.



Graphique 6.8. Simulation des copules Normale, Student, Frank et Gumbel (marges  $t_3$ )

## 6.4 Les méthodes dites analytiques

Dans ce paragraphe, la simulation est spécifique à chaque copule ou à un type de copule.

Pour simuler la copule Clayton (pour  $\theta > 0$ ), nous pouvons employer l'algorithme donné par DEVROYE [1986] :

1. Simuler deux variables aléatoires exponentielles standards  $x_1$  et  $x_2$ .
2. Simuler une variable aléatoire  $x$  de distribution  $\Gamma(1, \theta)$ .
3. Prendre  $u_1 = (1 + x_1/x)^{-\theta}$  et  $u_2 = (1 + x_2/x)^{-\theta}$ .

**Remarque 25** *Cet algorithme exploite le fait que la copule Clayton est une copule Frailty (voir le chapitre sur les survies multiples).*

### Code GAUSS 28 (Simulation de la copule Clayton)

```

/*
**> rndCopulaClayton
**
*/

proc (2) = rndCopulaClayton(theta,ns);
  local x1,x2,x,u1,u2;
  x1 = -ln(rndu(ns,1));
  x2 = -ln(rndu(ns,1));
  x = rndgam(ns,1,theta);
  u1 = (1+x1./x)^(-theta);
  u2 = (1+x2./x)^(-theta);
  retp(u1,u2);
endp;

```

Il existe plusieurs algorithmes pour simuler les copules Archimédiennes. GENEST et MACKAY [1986] proposent celui-ci :

1. Simuler deux variables aléatoires uniformes  $v_1$  et  $v_2$ .
2. Prendre  $u_1 = v_1$ .
3. Prendre  $u_2 = \varphi^{-1} \left( \varphi \left( \varphi'^{-1} \left( \varphi' \left( \frac{v_1}{v_2} \right) \right) \right) - \varphi(v_1) \right)$ .

**Exercice 5** Montrer que cet algorithme est celui des distributions conditionnelles.

## 6.5 La méthode des quantiles empiriques

Le problème de cette section n'est plus la simulation du vecteur  $\mathbf{U}$  dont la distribution est une copule  $\mathbf{C}$ , mais concerne la simulation du vecteur  $\mathbf{X}$  dont la copule est  $\mathbf{C}$  et les marges pas forcément uniformes. Dans les sections précédentes,  $\mathbf{X}$  est simulé à partir de la transformation suivante :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^{-1}(U_1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n^{-1}(U_n) \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

Cela implique de connaître les distributions analytiques  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ . Cela n'est pas toujours le cas (pensez au risque opérationnel et aux distributions composées des pertes, ou encore à un modèle bidimensionnel de volatilité stochastique à la Heston). Néanmoins, s'il est possible de simuler les marges  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ , alors nous pouvons simuler la distribution multidimensionnelle  $\mathbf{F}$  grâce à la méthode des quantiles empiriques. Soit  $\mathbb{F}_{i,m}$  le processus de distribution empirique (non normalisé). Nous avons le résultat suivant (SHORACK et WELLNER [1986]) :

$$\sup_x |\mathbb{F}_{i,m}(x) - \mathbf{F}_i(x)| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \text{ lorsque } m \rightarrow 0 \quad (6.11)$$

Soient  $\mathbb{U}_m$  et  $\mathbb{F}_m$  les processus de distribution empirique correspondants aux distributions  $\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n)$  et  $\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n)$ . En utilisant un argument de type Glivenko-Cantelli, nous avons

$$\sup_{u_1, \dots, u_n} |\mathbb{U}_p(\mathbb{F}_{1,m}^{-1}(u_1), \dots, \mathbb{F}_{n,m}^{-1}(u_n)) - \mathbf{C}(\mathbf{F}_1^{-1}(u_1), \dots, \mathbf{F}_n^{-1}(u_n))| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \text{ lorsque } m \wedge p \rightarrow 0 \quad (6.12)$$

**Code GAUSS 29 (Simulation de la distribution multidimensionnelle  $\mathbf{F}$  par la méthode des quantiles emp**

```

/*
**> rndCopulaEmpiricalQuantile
**
*/

proc (1) = rndCopulaEmpiricalQuantile(u,x);
  local n,ns,y,i;

  n = cols(u);
  ns = rows(u);
  y = zeros(ns,n);
  x = x .* ones(1,n);

  i = 1;
  do until i > n;
    y[.,i] = _rndCopulaEmpiricalQuantile(x[.,i],u[.,i]);
    i = i + 1;
  endo;

  retp(y);
endp;

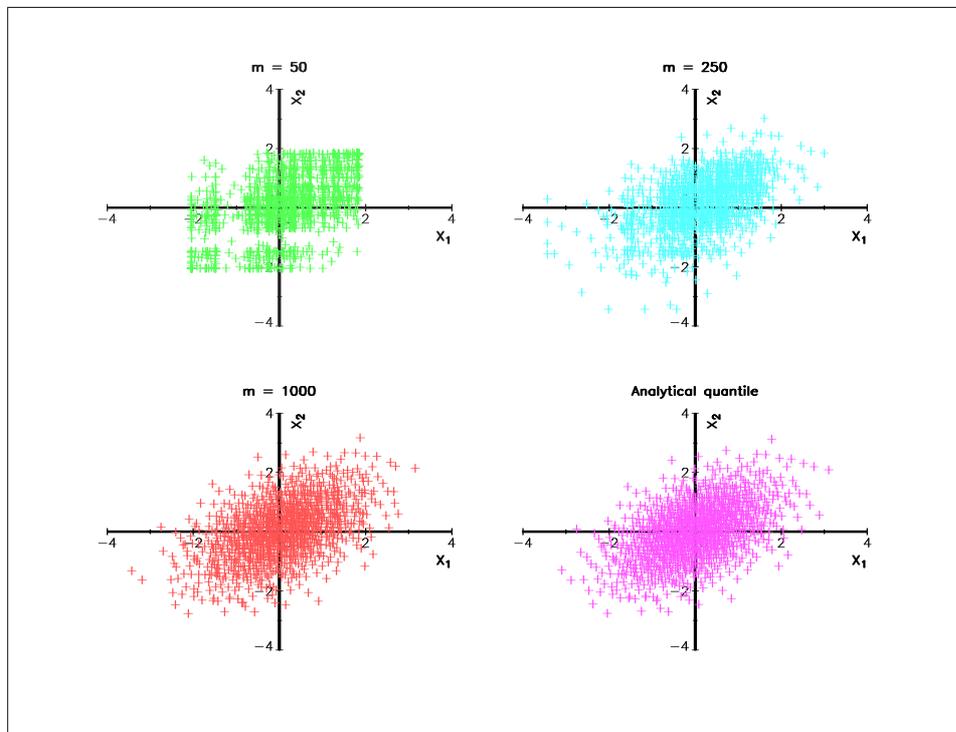
```

```

proc _rndCopulaEmpiricalQuantile(x,e);
  local w,wt,f,z,r;
  w = rows(x) * e;
  wt = floor(w);
  f = w - wt;
  z = sortc(x,1);
  z = z[1]|z|z[rows(x)];
  wt = wt + 1;
  r = z[wt,.] + f .* (z[wt+1,.] - z[wt,.]);
  retp(r);
endp;

```

A titre d'illustration, le graphique 6.8 montre la convergence de la méthode des quantiles empiriques vers la méthode des distributions.  $X_1$  et  $X_2$  sont deux variables aléatoires gaussiennes (copule Normale de paramètre 0.5).  $m$  est le nombre de simulations pour construire les fonctions  $\mathbb{F}_1(x_1)$  et  $\mathbb{F}_2(x_2)$ . Le graphique 6.10 présente 1024 simulations d'une distribution bivariee dont les marges sont  $\mathcal{N}(0, 1) + \Gamma(1, 2)$  et  $\mathcal{N}(0, 1) \times \Gamma(1, 2)$  et la copule est Normale de paramètre 0.5.



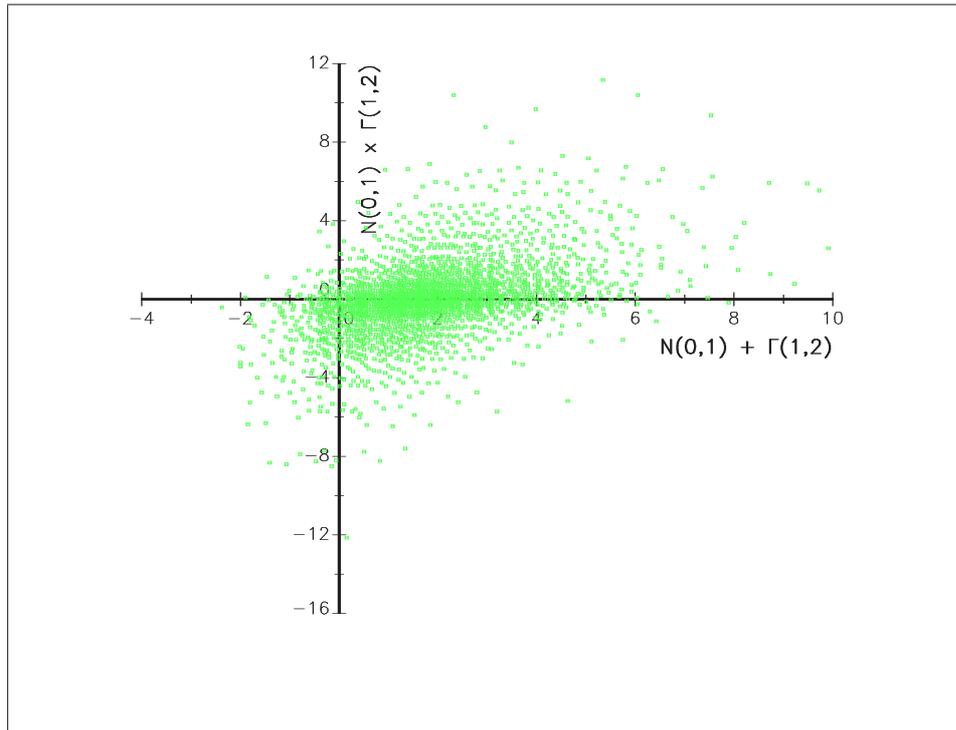
Graphique 6.9. Convergence de la méthode des quantiles empiriques vers la méthode des distributions

## 6.6 Repères historiques

Il existe peu d'articles sur le sujet. Vous trouverez des compléments dans DEVROYE [1986] et surtout JOHNSON [1987] (la plupart de ces algorithmes sont aussi dans NELSEN [1999]).

## Références

- [1] DEHEUVELS, P. [1978], Caractérisation complète des lois extrêmes multivariées et de la convergence des types extrêmes, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **23(3-4)**, 1-36



Graphique 6.10. Une distribution bivarée dont les marges sont  $\mathcal{N}(0,1) + \Gamma(1,2)$  et  $\mathcal{N}(0,1) \times \Gamma(1,2)$

- [2] DEHEUVELS, P. [1981], An asymptotic decomposition for multivariate distribution-free tests of independence, *Journal of Multivariate Analysis*, **11**, 102-113
- [3] DEVROYE, L. [1986], Non-Uniform Random Variate Generation, Springer-Verlag, New York
- [4] GENEST, C. [1987], Frank's family of bivariate distributions, *Biometrika*, **74**, 549-555
- [5] GENEST, C. et J. MACKAY [1986], Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données, *Canadian Journal of Statistics*, **14(2)**, 145-159
- [6] GENEST, C. et J. MACKAY [1986], The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals, *American Statistician*, **40**, 280-283
- [7] JOE, H. [1997], Multivariate Models and Dependence Concepts, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, **73**, Chapman & Hall, London
- [8] JOHNSON, M.E. [1987], Multivariate Statistical Simulation, John Wiley & Sons, New York
- [9] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, *Lectures Notes in Statistics*, **139**, Springer Verlag, New York
- [10] PRESS, W.H., S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING et B.P. FLANNERY [1992], Numerical Recipes in Fortran, second edition, Cambridge University Press, Cambridge
- [11] SHORACK, G.R. et J.A. WELLNER [1986], Empirical Processes with Applications to Statistics, John Wiley & Sons, New York

# 7

## Inférence statistique des copules

Nous nous intéressons maintenant au problème majeur d'estimation et d'identification de la copule. Le premier article sur la question est celui de GENEST [1987] et concerne la copule Frank. On peut aussi citer le remarquable article de Christian Genest et Paul-Louis Rivest du *JASA* sur l'inférence des copules Archimédiennes. Mais les recherches les plus significatives dans ce domaine viennent des problèmes de modélisation des survies multiples (voir le chapitre 10 de ce cours).

### 7.1 La copule empirique de Paul Deheuvels

Dans cette section, nous considérons la copule empirique introduite par DEHEUVELS [1979]. Soit  $\mathbf{X}_m = (X_{m,1}, \dots, X_{m,n}) \in \mathbb{R}^n$  une séquence de vecteurs aléatoires *i.i.d.* de distribution  $\mathbf{F}$  et de marges  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ . Nous supposons que  $\mathbf{F}$  est continue afin que la copule  $\mathbf{C} \langle \mathbf{F} \rangle$  soit unique. Si  $\delta_{\mathbf{u}}$  correspond à la mesure de Dirac avec  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ , nous définissons la mesure empirique de l'échantillon de  $\mathbf{X}$  de la façon suivante :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{\mathbf{X}_j} \quad (7.1)$$

La distribution empirique est alors

$$\hat{\mathbf{F}}(x_1, \dots, x_n) = \hat{\mu} \left( \prod_{i=1}^n ]-\infty, x_i] \right) \quad (7.2)$$

Nous notons  $\{x_{j:m,1}, \dots, x_{j:m,n}\}$  les statistiques d'ordre et  $\{r_{j,1}, \dots, r_{j,n}\}$  les statistiques de rang. Nous avons la correspondance suivante :

$$x_{r_{j,i}:m,i} = x_{j,i} \quad (7.3)$$

Nous pouvons introduire la copule empirique de l'échantillon comme la copule  $\hat{\mathbf{C}} \langle \hat{\mathbf{F}} \rangle$  de la distribution empirique  $\hat{\mathbf{F}}$ . Le problème est que  $\hat{\mathbf{C}}$  n'est pas unique, c'est pourquoi DEHEUVELS [1981] propose la solution suivante :

**Définition 16** Toute copule  $\hat{\mathbf{C}} \in \mathcal{C}$  définie sur le treillis  $\mathfrak{L}$  :

$$\mathfrak{L} = \left\{ \left( \frac{j_1}{m}, \dots, \frac{j_n}{m} \right) : 1 \leq i \leq n, j_i = 0, \dots, m \right\} \quad (7.4)$$

par la fonction suivante :

$$\hat{\mathbf{C}} \left( \frac{j_1}{m}, \dots, \frac{j_n}{m} \right) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \mathbf{1} \{r_{j,i} \leq j_i\} \quad (7.5)$$

est une copule empirique.

### Code GAUSS 30 (Distribution de la copule empirique ( $n = 2$ ))

```
/*
**> cdfCopulaDeheuvels
**
*/

proc (2) = cdfCopulaDeheuvels(data,fileName);
    local m,u,y,order,cdfCopulaHat;
    local f,i;

    m = rows(data);
    u = seqa(1,1,m)/m;

    fileName = ''' $+ fileName;

    if fileName $== ''';
        y = submat(sortc(data,1),0,2);
        order = sortc(y,1);
        cdfCopulaHat = cumsumc(y .<= order') / m;
    else;
        y = submat(sortc(data,2),0,1);
        order = sortc(y,1);
        create f = ^fileName with C,m,8;
        i = 1;
        do until i > m;
            cdfCopulaHat = cumsumc(y .<= order[i]) / m;
            call writer(f,cdfCopulaHat');
            i = i + 1;
        endo;
        f = close(f);
        cdfCopulaHat = error(0);
    endif;

    retp(u,cdfCopulaHat);
endp;

/*
**> readCopulaDeheuvels
**
*/

proc (1) = readCopulaDeheuvels(fileName,u,u1,u2);
    local m,indx1,indx2,m1,m2,cdfCopulaHat;
    local f,i;

    m = rows(u);

    if u1 == 0;
        indx1 = seqa(1,1,m);
    else;
        indx1 = indnv(u1,u);
    endif;

    if u2 == 0;
        indx2 = seqa(1,1,m);
    else;
```

```

    indx2 = indnrv(u2,u);
endif;

m1 = rows(indx1); m2 = rows(indx2);
cdfCopulaHat = zeros(m1,m2);

open f = ^fileName for read;
i = 1;
do until i > m1;
    call seekr(f,indx1[i]);
    cdfCopulaHat[i,.] = submat(readr(f,1),0,indx2);
    i = i + 1;
endo;

f = close(f);

retp(cdfCopulaHat);
endp;

```

Nous utilisons la base de données du London Metal Exchange étudiée par BOUYÉ et al. [2000]. Nous considérons en particulier la dépendance entre le prix spot de l'aluminium (que nous notons AL) et le prix forward 15 mois (que nous notons AL-15). Supposons que les rendements de ces deux actifs sont gaussiens, c'est-à-dire que le rendement de chaque actif est gaussien et que la copule des deux rendements est Normale. Nous pouvons estimer la matrice de corrélation et nous obtenons

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8192 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

Sur le graphique 7.1, nous représentons les courbes de niveaux de la copule empirique, ainsi que celles de la copule Normale de paramètre 81.92%. Nous remarquons que la copule Normale reproduit assez mal la copule empirique. Comme nous allons le voir un peu plus loin, la copule Normale n'est pas forcément la meilleure copule pour représenter le vecteur des rendements (AL,AL-15), et de plus le fait de spécifier une distribution normale bivariable introduit un biais dans l'estimation de la copule Normale.

Dans le cas bidimensionnel, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{C}\left(\frac{p}{m}, \frac{q}{m}\right) &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{1}\{r_{j,1} \leq p, r_{j,2} \leq q\} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{1}\{x_{j,1} \leq x_{p:m,1}, x_{j,2} \leq x_{p:m,2}\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

NELSEN [1999] introduit la fréquence de la copule empirique de la façon suivante :

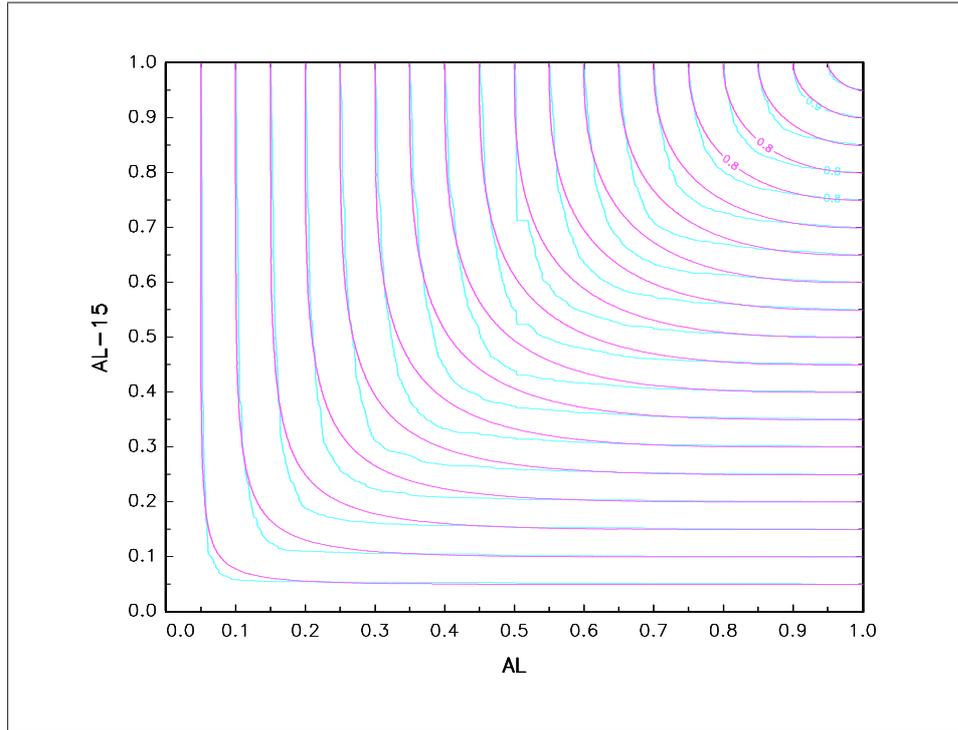
$$\hat{c}\left(\frac{p}{m}, \frac{q}{m}\right) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{1}\{x_{p:m,1} = x_{j,1}, x_{p:m,2} = x_{j,2}\} \quad (7.7)$$

Nous avons alors

$$\hat{C}\left(\frac{p}{m}, \frac{q}{m}\right) = \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^q \hat{c}\left(\frac{r}{m}, \frac{s}{m}\right) \quad (7.8)$$

Nous pouvons donc assimiler  $\hat{c}$  à la fonction de probabilité (au sens des distributions discrètes) ou à une 'densité'. En général, il est difficile d'extraire de l'information de  $\hat{c}$ . Il est préférable de construire un **dépendogramme**. Cette représentation a été introduite par Paul Deheuvels en 1981 dans le volume 861 des *Lecture Notes in Mathematics* :

*We now introduce a statistical visualisation of dependence functions, which we have named dependogram, and which has proved itself to be quite useful in appreciating the dependence structure of multivariate samples.*



Graphique 7.1. Comparaison de la copule empirique et de la copule Normale associée à la distribution normale bivariée

First, assume  $n = 2$ . Take a square  $[0, 1]^2$  divided in  $m^2$  identical subsquares  $\left[\frac{p-1}{m}, \frac{p}{m}\right] \times \left[\frac{q-1}{m}, \frac{q}{m}\right] = C[p, q]$ . Darken then the  $C[r_{p,1}, r_{q,2}]$ , to obtain  $m$  materialized squares in the grid. It can be seen that if one puts an uniform measure with mass  $1/m$  on each of these squares, the resulting measure is the standard dependence measure  $\mu_m$ .

Now take an arbitrary  $n$ . The same can be done dividing  $[0, 1]^n$  divided in  $m^n$  identical blocks. To make an understable drawing containing all the necessary information, it is though enough to take for example  $n - 1$  dependograms corresponding to all couples of margins with one of them fixed (DEHEUVELS [1981], pages 44-45).

L'idée est en fait de transformer les données  $\{(x_{1,1}, x_{1,2}), \dots, (x_{m,1}, x_{m,2})\}$  en une série de données 'uniformes'  $\{(u_{1,1}, u_{1,2}), \dots, (u_{m,1}, u_{m,2})\}$  par le biais des statistiques d'ordre :

$$u_{j,i} = \frac{1}{m} r_{j,i} \quad (7.9)$$

et de construire la fonction de probabilité en posant  $p_{j,i} = 1/m$ .

#### Code GAUSS 31 (Dépendogramme de la copule empirique)

```

/*
**> Dependogram
**
*/

proc Dependogram(data);
    local u;
    u = __copula_rankindx(data);
    retp( u ./ rows(u) );
endp;

proc __copula_rankindx(x);
    local r,i;
    r = zeros(rows(x),cols(x));
    if _copula_rankindx /= 1;

```

```

i = 1;
do until i > cols(r);
  r[.,i] = ___copula_rankindx(x[.,i]);
  i = i + 1;
endo;
else;
i = 1;
do until i > cols(r);
  r[.,i] = rankindx(x[.,i],1);
  i = i + 1;
endo;
endif;
ret(r);
endp;

proc ___copula_rankindx(x);
  local nx,y,d,nd,cpt,i,indx,k;
  nx = rows(x);
  y = zeros(nx,1);
  d = unique(x,1);
  nd = rows(d);
  cpt = 0;
  i = 1;
  do until i > nd;
    indx = indexcat(x,d[i]);
    k = rows(indx);
    y[indx] = ones(k,1) * meanc(seqa(cpt+1,1,k));
    cpt = cpt + k;
    i = i + 1;
  endo;
  ret(y);
endp;

```

Le dépendogramme des rendements (AL,AL-15) correspond au graphique 7.2. La base de données comporte 2713 observations non manquantes. Nous simulons alors 2713 nombres aléatoires de la copule Normale de paramètre 0.8192. Si nous comparons les graphiques 7.2 et 7.3, nous remarquons des comportements différents des valeurs extrêmes, ce qui semble indiquer que la copule Normale n'est pas appropriée pour modéliser le risque associé aux rendements (AL,AL-15).

Lorsque nous cherchons à vérifier que la copule Normale est appropriée ou non pour modéliser des données, il peut être intéressant de construire les ellipses de covariance associées. Soit  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  le vecteur aléatoire dont la distribution est une copule Normale de paramètre  $\rho$ . Nous avons

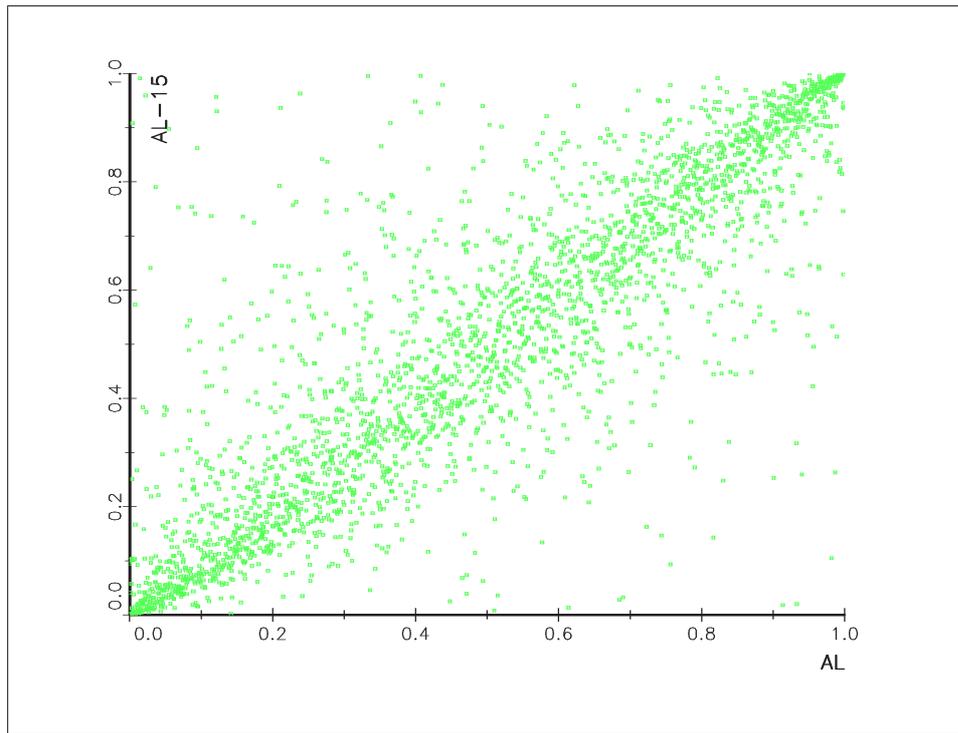
$$[\Phi^{-1}(U_1)]^2 - 2\rho\Phi^{-1}(U_1)\Phi^{-1}(U_2) + [\Phi^{-1}(U_2)]^2 \sim \chi_2^2 \quad (7.10)$$

L'ellipse de covariance au seuil de confiance  $\alpha$  est donc l'ensemble des points  $(u_1, u_2)$  qui vérifient l'équation de l'ellipse suivante :

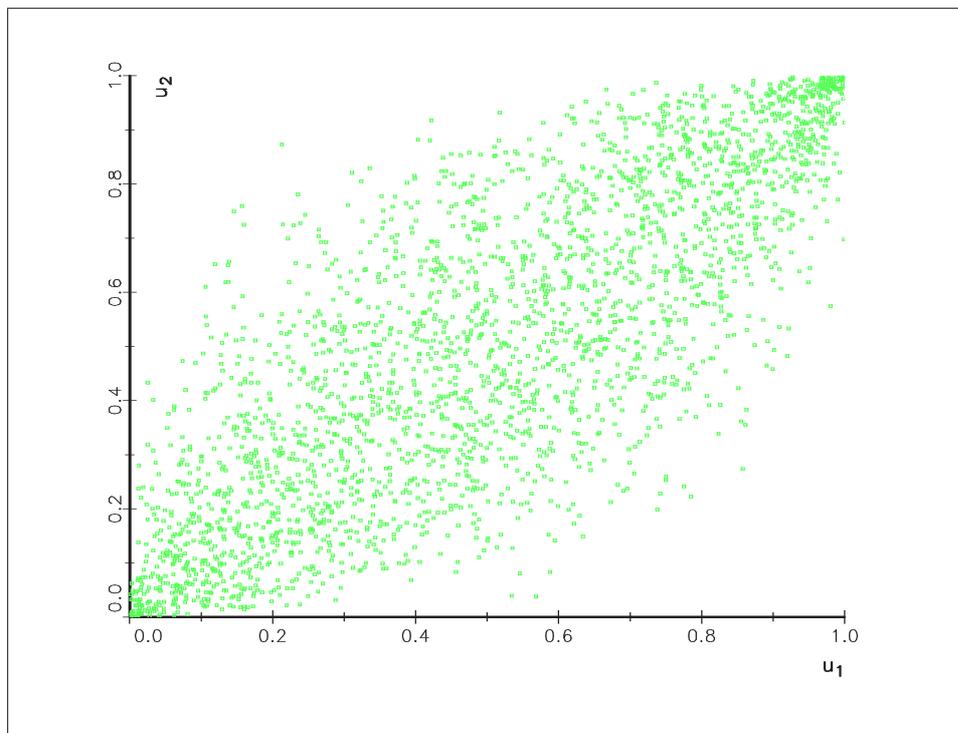
$$[\Phi^{-1}(u_1)]^2 - 2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) + [\Phi^{-1}(u_2)]^2 \leq \chi^{-1}(\alpha, 2) \quad (7.11)$$

où  $\chi^{-1}(\alpha, 2)$  est le quantile  $\alpha$  de la distribution chi-deux à 2 degrés de liberté. Reprenons les rendements (AL,AL-15). Si nous considérons une copule Normale de paramètre 0.8192, nous obtenons les ellipses de covariance du graphique 7.4. Sur le graphique 7.5, nous représentons l'ellipse de covariance à 90% ainsi que les points  $(u_{j,1}, u_{j,2})$  du dépendogramme qui sont à l'extérieur de cette ellipse. Notons  $q(\alpha)$  le seuil de confiance empirique, c'est-à-dire

$$q(\alpha) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{1} \left\{ [\Phi^{-1}(u_{j,1})]^2 - 2\rho\Phi^{-1}(u_{j,1})\Phi^{-1}(u_{j,2}) + [\Phi^{-1}(u_{j,2})]^2 \leq \chi^{-1}(\alpha, 2) \right\} \quad (7.12)$$

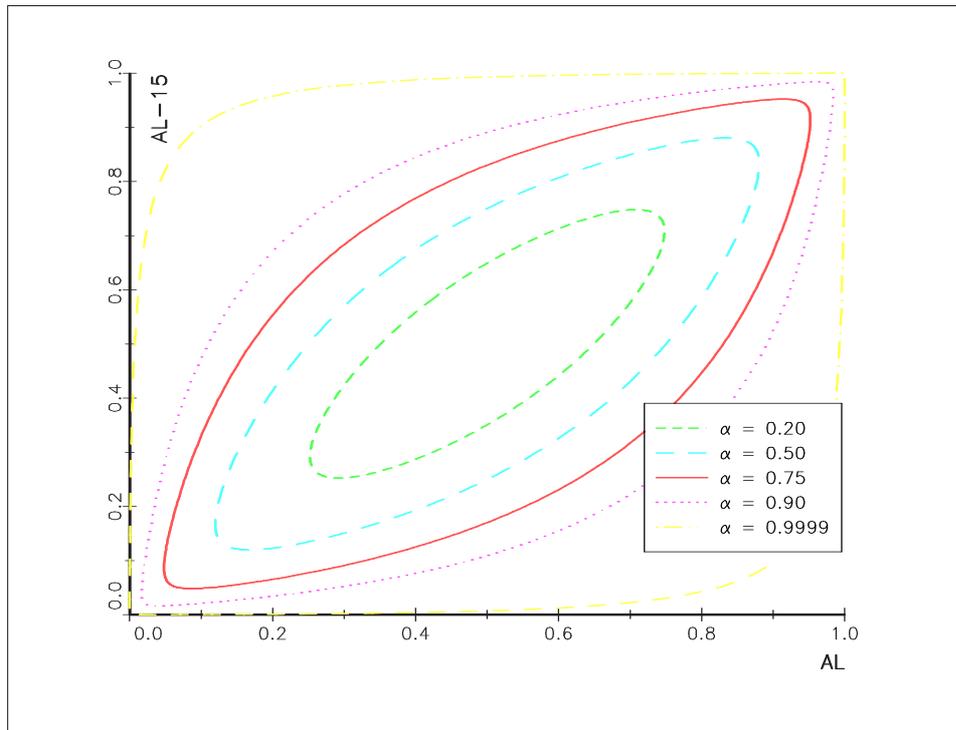


Graphique 7.2. Dépendogramme des rendements (AL,AL-15)



Graphique 7.3. Dépendogramme des simulations de la copule Normale de paramètre 0.8192

Théoriquement,  $q(\alpha) = \alpha$  sous l'hypothèse que c'est la bonne copule pour modéliser les données. Le graphique 7.6 est un tracé quantile-quantile (*qq-plot* en anglais) de  $\alpha$  et  $q(\alpha)$ . Il est évident que la copule Normale de paramètre 0.8192 sous-estime les valeurs extrêmes.



Graphique 7.4. Ellipses de covariance de la copule Normale

#### Code GAUSS 32 (Ellipse de covariance de la copule Normale)

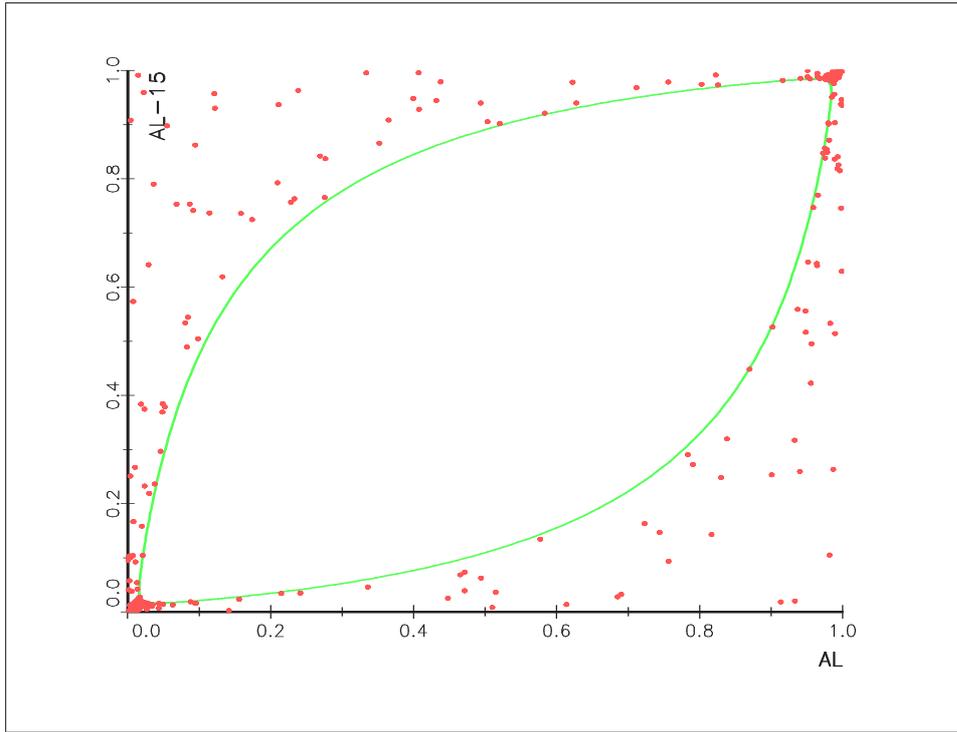
```

/*
**> CovarianceEllipseCopulaNormal2
**
*/

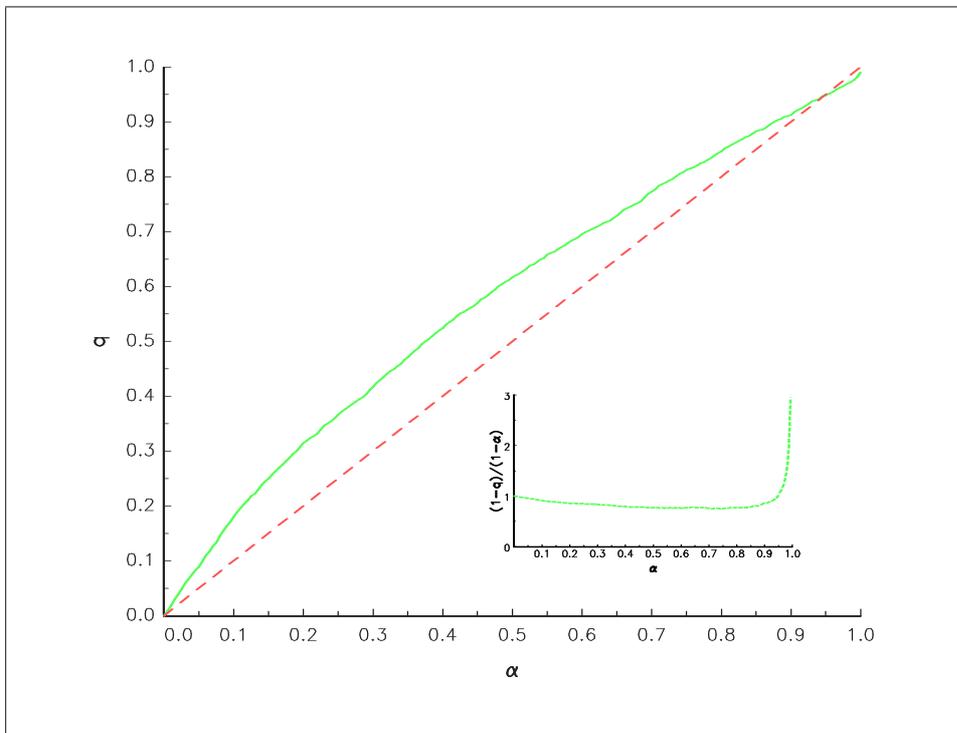
proc (2) = CovarianceEllipseCopulaNormal2(rho,alpha,N);
    local max,u1,u2,i;
    max = maxc(rows(rho)|rows(alpha));
    rho = rho.*ones(max,1); alpha = alpha.*ones(max,1);
    u1 = zeros(N,max); u2 = u1;
    i = 1;
    do until i > max;
        {u2[.,i],u1[.,i]} = _CovarianceEllipseCopulaNormal2(rho[i],alpha[i],N);
        i = i + 1;
    endo;
    retp(u1,u2);
endp;

proc (2) = _CovarianceEllipseCopulaNormal2(rho,alpha,N);
    local phi,t,y,lambda,V,Q,u;
    phi = sqrt(cdfchii(alpha,2*ones(rows(alpha),cols(alpha))));
    t = seqa(0,1,N)/(N-1);
    y = sqrt(cdfchii(alpha,2)) * exp(2*pi*complex(0,1)*t);
    y = real(y)~imag(y);
    {lambda,V} = eighv(xpnd(1|rho|1));

```



Graphique 7.5. Observations en dehors de l'ellipse de covariance à 90%



Graphique 7.6. *QQ-plot* de  $\alpha$  et  $q(\alpha)$

```

LAMBDA = diagrv(eye(2),lambda);
Q = V*sqrt(LAMBDA);
u = cdfn(y*Q');
retp(u[:,1],u[:,2]);
endp;

/*
**> InCovarianceEllipseCopulaNormal2
**
*/

proc (1) = InCovarianceEllipseCopulaNormal2(u1,u2,rho,alpha);
  u1 = cdfni(u1); u2 = cdfni(u2);
  retp( dotfle( (u1^2 - 2 * rho .* u1 .* u2 + u2^2) ./ (1-rho^2) ,
    cdfchii(alpha,2*ones(rows(alpha),cols(alpha))) ) );
endp;

```

## 7.2 L'identification d'une copule Archimédienne

Dans un très célèbre article paru dans le *JASA*, Christian Genest et Louis-Paul Rivest propose une méthode originale d'identification d'une copule Archimédienne. Ils considèrent la fonction  $\mathbf{K}$  définie par

$$\mathbf{K}(u) = \Pr \{ \mathbf{C}(U_1, U_2) \leq u \} \quad (7.13)$$

Ils montrent que dans le cas d'une copule Archimédienne de générateur  $\varphi$ , nous avons

$$\mathbf{K}(u) = u - \varphi(u) / \varphi'(u) \quad (7.14)$$

La connaissance de  $\mathbf{K}$  permet de spécifier complètement la copule Archimédienne, puisque  $\mathbf{K}$  "contient toute l'information" sur  $\varphi$ . GENEST et RIVEST [1993] proposent alors de sélectionner la copule Archimédienne en comparant  $\mathbf{K}(u)$  avec un estimateur empirique de  $\mathbf{K}(u)$  défini de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{K}}(u) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \mathbf{1} \{ \vartheta_j \leq u \} \quad (7.15)$$

avec

$$\vartheta_j = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m \mathbf{1} \{ x_{k,1} < x_{j,1}, x_{k,2} < x_{j,2} \} \quad (7.16)$$

A titre d'illustration, nous cherchons à modéliser la dépendance des rendements (AL,CU) par une copule Gumbel. D'après le graphique 7.7,  $\theta = 1.5$  convient mieux que  $\theta = 2$  ou  $\theta = 1$ .

**Remarque 26** La fonction  $\mathbf{K}$  est liée au tau de Kendall puisque nous avons

$$\tau \langle \mathbf{C} \rangle = 4 \int_0^1 (1 - \mathbf{K}(u)) du - 1 \quad (7.17)$$

(voir BARBE, GENEST, GHOUDI et RÉMILLARD [1996] et GENEST et RIVEST [2000] pour d'autres applications de la fonction  $\mathbf{K}$ ).

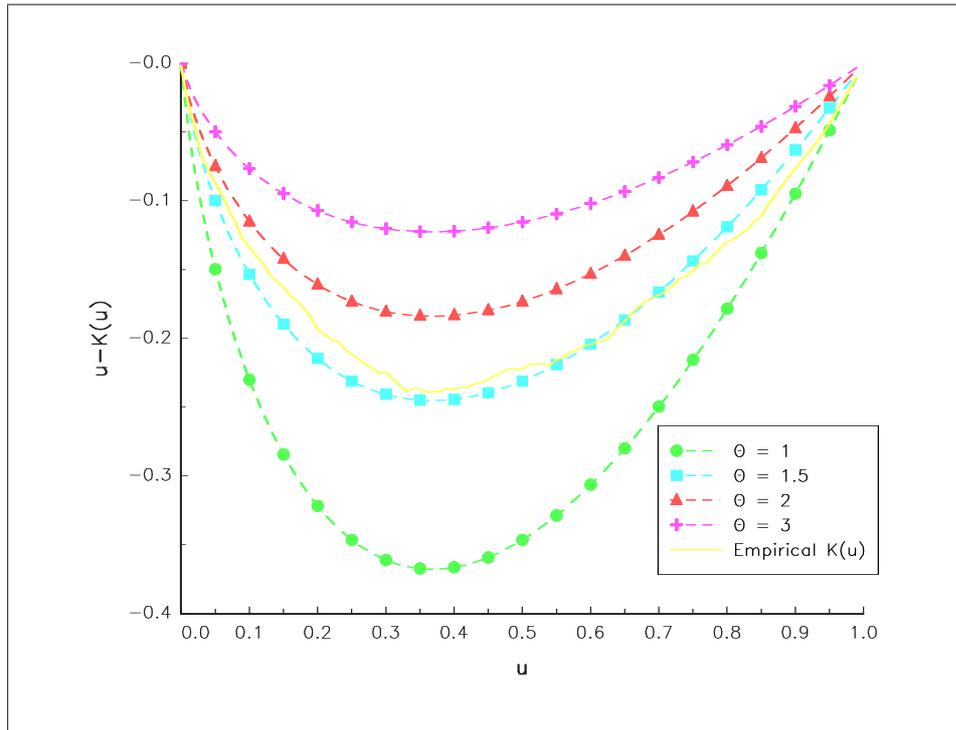
Code GAUSS 33 (Calcul de  $\hat{\mathbf{K}}(u)$ )

```

/*
**> CopulaK
**
*/

proc CopulaK(data,u);

```



Graphique 7.7. Comparaison de  $\hat{K}(u)$  et  $K(u)$  pour les données (AL,CU)

```

local n,x1,x2,vartheta,i,indx;
n = rows(data);
x1 = data[.,1]; x2 = data[.,2];
vartheta = zeros(n,1);
i = 1;
do until i > n;
  vartheta[i] = sumc(x1 .< x1[i] .and x2 .< x2[i]);
  i = i + 1;
endo;
vartheta = vartheta / (n -1);
indx = sortind(u);
retp( submat(cumsumc(counts(vartheta,u[indx])),indx,1)/n );
endp;

```

### 7.3 La méthode des moments

Pour la copule Gumbel de paramètre  $\theta$ , nous avons

$$\tau = 1 - 1/\theta \quad (7.18)$$

Nous en déduisons que

$$\theta = \frac{1}{1 - \tau} \quad (7.19)$$

Si nous avons une estimation  $\hat{\tau}$  du tau de Kendall, nous pouvons obtenir une estimation du paramètre de la copule en posant

$$\hat{\theta} = \frac{1}{1 - \hat{\tau}} \quad (7.20)$$

Nous pouvons généraliser cette méthode à d'autres fonctions copules et d'autres mesures de dépendance. Considérons par exemple les mesures de concordance  $\kappa(\mathbf{C})$ . Dans le cas d'une copule paramétrique, nous notons  $\kappa(\theta) := \kappa(\mathbf{C}_\theta)$ . L'estimateur des moments revient alors à résoudre l'équation suivante :

$$\kappa(\theta) = \hat{\kappa} \quad (7.21)$$

où  $\hat{\kappa}$  est l'estimateur non paramétrique. Nous notons  $\hat{\theta}(\hat{\kappa})$  la solution.

L'estimateur non paramétrique du tau de Kendall est

$$\hat{\tau} = \frac{c - d}{c + d} \quad (7.22)$$

où  $c$  et  $d$  sont respectivement le nombre de paires disjointes concordantes et discordantes.

#### Code GAUSS 34 (Estimateur du tau de Kendall)

```
/*
**> KendallTau
**
*/

proc (1) = KendallTau(x1,x2);
  local n,c,d,i,e;

  n = rows(x1);
  x2 = submat(sortc(x1~x2,1),0,2);
  c = 0; d = 0;
  i = 1;
  do until i > n;
    c = c + sumc(x2[i:n] .> x2[i]);
    d = d + sumc(x2[i:n] .< x2[i]);
    i = i + 1;
  endo;
  retp((c-d)/(c+d));
endp;
```

L'estimateur non paramétrique du rho de Spearman correspond (grosso modo) à la corrélation linéaire des statistiques de rang.

#### Code GAUSS 35 (Estimateur du rho de Spearman)

```
/*
**> SpearmanRho
**
*/

proc (1) = SpearmanRho(x1,x2);
  local n;
  n = rows(x1);
  x1 = __copula_rankindx(x1);
  x2 = __copula_rankindx(x2);
  retp( 1 - 6/(n*(n^2-1))*sumc((x1-x2)^2) );
endp;
```

Reprenons les rendements (AL,AL-15). Nous obtenons  $\hat{\tau} = 0.35128$  et  $\hat{\rho} = 0.49955$ . Si nous considérons une copule Normale de paramètre  $\rho$ , nous en déduisons que

$$\hat{\rho}(\hat{\tau}) = 89.63\% \quad (7.23)$$

et

$$\hat{\rho}(\hat{\rho}) = 86.69\% \quad (7.24)$$

Remarquez que sous l'hypothèse de distribution normale bivariée, nous avons trouvé

$$\hat{\rho} = 81.92\% \quad (7.25)$$

**Remarque 27** *Le fait d'avoir imposé des marges gaussiennes a biaisé l'estimation du paramètre  $\rho$ . Comme les marginales sont mal spécifiées, l'estimateur corrige la valeur de la corrélation pour compenser cette mauvaise spécification. Ce qui explique que la valeur de ce paramètre est sous-estimée dans notre exemple. A titre d'illustration, nous reportons la matrice des paramètres de la copule **Normale** de 5 rendements (AL,AL-15) — voir les tables 7.1, 7.2 et 7.3.*

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1.00	0.8193	0.4435	0.3628	0.3312
AL-15		1.00	0.3893	0.3358	0.2975
CU			1.00	0.3693	0.3121
NI				1.00	0.3089
PB					1.00

TABLE 7.1. Matrice  $\hat{\rho}$

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1.00	0.8963	0.5242	0.4166	0.3693
AL-15		1.00	0.4570	0.3642	0.3263
CU			1.00	0.4367	0.3947
NI				1.00	0.3490
PB					1.00

TABLE 7.2. Matrice  $\hat{\rho}(\hat{\tau})$

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1.00	0.8669	0.5172	0.4073	0.3622
AL-15		1.00	0.4542	0.3576	0.3215
CU			1.00	0.4306	0.3877
NI				1.00	0.3433
PB					1.00

TABLE 7.3. Matrice  $\hat{\rho}(\hat{\varrho})$

## 7.4 La méthode du maximum de vraisemblance

Cette méthode est classique. L'expression de la log-vraisemblance est

$$\ell(\theta) = \sum_{j=1}^m \ln c(\mathbf{F}_1(x_{j,1};\theta), \dots, \mathbf{F}_n(x_{j,n};\theta); \theta) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{j,i};\theta) \quad (7.26)$$

où  $\theta$  est le vecteur des paramètres (des marges et de la copule). L'estimateur du maximum de vraisemblance correspond à

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max \ell(\theta) \quad (7.27)$$

Nous considérons l'exemple des rendements (AL,CU). Nous supposons que les marges sont gaussiennes et la copule est Frank. La log-vraisemblance individuelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \ell_j(\theta) = & \ln \left( \theta_{\mathbf{C}} (1 - \exp(-\theta_{\mathbf{C}})) \exp \left( -\theta_{\mathbf{C}} \left( \Phi \left( \frac{x_{j,1} - m_1}{\sigma_1} \right) + \Phi \left( \frac{x_{j,2} - m_2}{\sigma_2} \right) \right) \right) \right) - \\ & \ln \left( (1 - \exp(-\theta_{\mathbf{C}})) - \left( 1 - \exp \left( -\theta_{\mathbf{C}} \Phi \left( \frac{x_{j,1} - m_1}{\sigma_1} \right) \right) \right) \left( 1 - \exp \left( -\theta_{\mathbf{C}} \Phi \left( \frac{x_{j,2} - m_2}{\sigma_2} \right) \right) \right) \right)^2 - \\ & \left( \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln \sigma_1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x_{j,1} - m_1}{\sigma_1} \right)^2 \right) - \left( \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln \sigma_2^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x_{j,2} - m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Nous obtenons  $\hat{\theta}_{\mathbf{C}} = 4.597625$ .

## 7.5 La méthode IFM

L'estimation par maximum de vraisemblance peut-être *time-consuming* surtout lorsque  $n$  est grand. Néanmoins, l'approche par les copules suggère une estimation à deux étapes (SHIH et LOUIS [1995]) :

1. Nous estimons les paramètres  $\theta_1, \dots, \theta_n$  des marges dans un premier temps.
2. Etant donné ces estimations, nous estimons ensuite le paramètre de la copule  $\theta_{\mathbf{C}}$  dans un second temps.

Cette méthode d'estimation est appelée par Shih et Louis "*two-stage parametric ML method*". JOE et XU [1996] utilisent le terme "*inference functions for margins*" (IFM). L'idée sous-jacente est d'écrire la vraisemblance sous la forme suivante :

$$\ell(\theta) = \sum_{j=1}^m \ln c(\mathbf{F}_1(x_{j,1}; \theta_1), \dots, \mathbf{F}_n(x_{j,n}; \theta_n); \theta_{\mathbf{C}}) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{j,i}; \theta_i) \quad (7.29)$$

avec

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \\ \theta_{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Chaque paramètre  $\theta_i$  (qui peut-être multidimensionnel) est estimé par maximum de vraisemblance sans tenir compte de la copule :

$$\hat{\theta}_i = \arg \max \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{j,i}; \theta_i) \quad (7.31)$$

Le paramètre  $\theta_{\mathbf{C}}$  de la copule est ensuite estimé en tenant compte des estimations précédentes :

$$\hat{\theta}_{\mathbf{C}} = \arg \max \sum_{j=1}^m \ln c(\mathbf{F}_1(x_{j,1}; \hat{\theta}_1), \dots, \mathbf{F}_n(x_{j,n}; \hat{\theta}_n); \theta_{\mathbf{C}}) \quad (7.32)$$

L'estimateur IFM  $\hat{\theta}_{\text{IFM}}$  est alors défini de la façon suivante :

$$\hat{\theta}_{\text{IFM}} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_n \\ \hat{\theta}_{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Comme pour l'estimateur ML, nous pouvons vérifier qu'il possède la propriété de normalité asymptotique :

$$m^{1/2} (\hat{\theta}_{\text{IFM}} - \theta_0) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathcal{V}^{-1}(\theta_0)) \quad (7.34)$$

avec  $\mathcal{V}(\theta_0)$  la matrice d'information de Godambe (JOE [1997]) :

$$\mathcal{V}(\theta_0) = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} (\mathbf{D}^{-1})^\top \quad (7.35)$$

avec

$$\mathbf{D} = \mathbb{E} \left[ \frac{\partial \mathbf{g}(\theta)}{\partial \theta^\top} \right] \quad (7.36)$$

et

$$\mathbf{M} = \mathbb{E} \left[ \mathbf{g}(\theta)^\top \mathbf{g}(\theta) \right] \quad (7.37)$$

$\mathbf{g}(\theta)$  n'est rien d'autre que la fonction score  $(\partial_{\theta_1} \ell^1, \dots, \partial_{\theta_n} \ell^n, \partial_{\theta_{\mathbf{C}}} \ell^c)$ .

Reprenons l'exemple de la section précédente. Pour  $i = 1, 2$ , nous avons

$$\ell^i(m_i, \sigma_i) = - \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln \sigma_i^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x_{j,i} - m_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (7.38)$$

Notons  $\hat{m}_i$  and  $\hat{\sigma}_i$  les estimateurs ML. Nous définissons ensuite

$$u_{j,i} = \Phi \left( \frac{x_{j,i} - \hat{m}_i}{\hat{\sigma}_i} \right) \quad (7.39)$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \ell^c(\theta_{\mathbf{C}}) &= \ln(\theta_{\mathbf{C}} (1 - \exp(-\theta_{\mathbf{C}})) \exp(-\theta_{\mathbf{C}} (u_{j,1} + u_{j,2}))) - \\ &\quad \ln((1 - \exp(-\theta_{\mathbf{C}})) - (1 - \exp(-\theta_{\mathbf{C}} u_{j,1})) (1 - \exp(-\theta_{\mathbf{C}} u_{j,2})))^2 \end{aligned} \quad (7.40)$$

La matrice de covariance de Godambe est calculée avec la fonction score :

$$\mathbf{g}(\theta) = \begin{bmatrix} \partial \ell^1(m_1, \sigma_1) / \partial m_1 \\ \partial \ell^1(m_1, \sigma_1) / \partial \sigma_1 \\ \partial \ell^2(m_2, \sigma_2) / \partial m_2 \\ \partial \ell^2(m_2, \sigma_2) / \partial \sigma_2 \\ \partial \ell^c(\theta_{\mathbf{C}}) / \partial \theta_{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

Nous obtenons  $\hat{\theta}_{\mathbf{C}} = 4.440463$ .

## 7.6 L'estimateur omnibus

GENEST, GHOUDI et RIVEST [1995], et SHIH et LOUIS [1995] propose une troisième méthode d'estimation. Celle-ci consiste à estimer le paramètre  $\theta_{\mathbf{C}}$  en considérant les estimateurs non paramétriques de  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$  :

$$\hat{\theta}_{\mathbf{C}} = \arg \max \sum_{j=1}^m \ln c \left( \hat{\mathbf{F}}_1(x_{j,1}), \dots, \hat{\mathbf{F}}_n(x_{j,n}); \theta_{\mathbf{C}} \right) \quad (7.42)$$

Cet estimateur est appelé *omnibus* (om) par GENEST et WERKER [2002]. En fait,  $\hat{\mathbf{F}}_i(x_{j,i})$  n'est rien d'autre que la statistique de rang normalisé  $\frac{1}{m} r_{j,i}$ .

Si nous reprenons l'exemple précédent, nous obtenons  $\hat{\theta}_{\mathbf{C}} = 3.578972$ . Nous constatons que les estimations ML et IFM donnent des résultats similaires. Ce n'est pas le cas de l'estimation om. Nous pouvons donc penser que l'hypothèse de marges gaussiennes n'est pas vérifiée. En fait, le fait d'avoir spécifié des marges non appropriées induit des biais dans l'estimation du paramètre de la copule. Sur le tableau suivant, nous reportons les valeurs

des 3 estimateurs, ainsi que celles des estimateurs des moments. L'estimateur om est très proche des estimateurs  $\hat{\theta}_{\mathbf{C}}(\hat{\tau})$  et  $\hat{\theta}_{\mathbf{C}}(\hat{\varrho})$ .

	ML	IFM	om	$\hat{\theta}_{\mathbf{C}}(\hat{\tau})$	$\hat{\theta}_{\mathbf{C}}(\hat{\varrho})$
$\hat{\theta}_{\mathbf{C}}$	4.597	4.440	3.579	3.525	3.442
$\tau(\hat{\theta}_{\mathbf{C}})$	0.43	0.42	0.36	0.35	0.34
$\varrho(\hat{\theta}_{\mathbf{C}})$	0.61	0.60	0.51	0.51	0.50

Pour certaines copules, nous pouvons obtenir des expressions analytiques des estimateurs IFM et om de  $\theta_{\mathbf{C}}$ , ce qui réduit les temps de calcul. Remarquons tout d'abord que la log-vraisemblance s'écrit

$$\hat{\theta}_{\mathbf{C}} = \arg \max \sum_{j=1}^m \ln c(\hat{u}_{j,1}, \dots, \hat{u}_{j,n}; \theta_{\mathbf{C}}) \quad (7.43)$$

Pour la méthode IFM, nous avons  $\hat{u}_{j,i} = \mathbf{F}_i(x_{j,i}; \hat{\theta}_i)$ . Dans le cas de la méthode om,  $\hat{u}_{j,i} = \hat{\mathbf{F}}_i(x_{j,i})$ . Nous en déduisons que les estimateurs IFM et om ont la même expression analytique.

**Remarque 28** Pour estimer la matrice  $\rho$  des paramètres de la copule Normale, nous pouvons employer l'algorithme suivant :

1. Transformer les données  $\hat{u}_{j,i}$  en données 'gaussiennes'  $\Phi^{-1}(\hat{u}_{j,i})$ .
2. Calculer la matrice de corrélation des données gaussiennes.

**Code GAUSS 36 (Estimation de la matrice  $\rho$  des paramètres de la copule Normale)**

```
/*
**> regCopulaNormal
**
*/

proc (1) = regCopulaNormal(u);
    retp( corrx(cdfni(u)) );
endp;
```

**Remarque 29** BOUYÉ *et al.* [2000] proposent d'estimer la matrice  $\rho$  des paramètres de la copule Student avec l'algorithme suivant :

1. Soit  $\hat{\rho}_0$  l'estimation de la matrice  $\rho$  des paramètres de la copule Normale.
2.  $\hat{\rho}_{k+1}$  est obtenue de la façon suivante :

$$\hat{\rho}_{k+1} = \frac{1}{m} \left( \frac{\nu + n}{\nu} \right) \sum_{j=1}^m \frac{\varsigma_j \varsigma_j^\top}{1 + \varsigma_j^\top \hat{\rho}_k^{-1} \varsigma_j / \nu} \quad (7.44)$$

avec

$$\varsigma_j = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_\nu^{-1}(\hat{u}_{j,1}) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_\nu^{-1}(\hat{u}_{j,n}) \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

3. Répéter la seconde étape jusqu'à la convergence —  $\hat{\rho}_{k+1} = \hat{\rho}_k$  ( $:= \hat{\rho}_\infty$ ).

**Code GAUSS 37 (Estimation de la matrice  $\rho$  des paramètres de la copule Student)**

```
/*
**> regCopulaStudent
**
*/
```

```

proc (2) = regCopulaStudent(u,nu);
  local varsigma,rhoNormal,rho;
  local m,n,v,cvg,inv_rho,j,stderr;

  varsigma = cdfni(u);
  rhoNormal = corrx(varsigma);
  if _rho_student /= 0;
    _rho_ = _rho_student;
  else;
    _rho_ = rhoNormal;
  endif;
  m = rows(u); n = cols(u);
  varsigma = cdfti(u,nu);
  cvg = 1;
  do until cvg < 1e-6;
    inv_rho = invpd(_rho_);
    rho = 0;
    j = 1;
    do until j > m;
      v = varsigma[j,.]';
      rho = rho + (v*v') / (1+v'inv_rho*v/nu);
      j = j + 1;
    endo;
    rho = (nu + n) / nu * (rho/m);
    stderr = sqrt(diag(rho));
    rho = rho ./ stderr ./ stderr';
    cvg = abs(det(rho)-det(_rho_));
    _rho_ = rho;
  endo;

  retp(rho,rhoNormal);
endp;

```

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1	0.8418	0.4850	0.3790	0.3525
AL-15		1	0.4262	0.3390	0.3133
CU			1	0.4037	0.3524
NI				1	0.3292
PB					1

TABLE 7.4. Matrice  $\hat{\rho}_{om}$  (copule Normale)

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1	0.8183	0.3256	0.2538	0.1888
AL-15		1	0.2706	0.2225	0.1634
CU			1	0.2668	0.2184
NI				1	0.1944
PB					1

TABLE 7.5. Matrice  $\hat{\rho}_{om}$  (copule Student avec  $\nu = 1$ )

Reprenons l'exemple du LME. En supposant une copule Normale, nous obtenons la matrice des paramètres de la table 7.4. Nous pouvons comparer ces résultat avec ceux des tables 7.1, 7.2 et 7.3. Dans le cas de la copule Student, nous obtenons les résultats des tables 7.5 à 7.9.

**Remarque 30** Parfois, il est fastidieux de calculer analytiquement la densité de la copule. La procédure *Compute-PdfCopula2* permet de l'obtenir à partir des différences finies.

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1	0.8738	0.4281	0.3501	0.2812
AL-15		1	0.3705	0.3136	0.2517
CU			1	0.3626	0.3006
NI				1	0.2770
PB					1

TABLE 7.6. Matrice  $\hat{\rho}_{om}$  (copule Student avec  $\nu = 2$ )

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1	0.8867	0.4653	0.3859	0.3193
AL-15		1	0.4086	0.3491	0.2895
CU			1	0.3979	0.3353
NI				1	0.3109
PB					1

TABLE 7.7. Matrice  $\hat{\rho}_{om}$  (copule Student avec  $\nu = 3$ )

### Code GAUSS 38 (Calcul numérique de la densité d'une copule)

```

/*
**> ComputePdfCopula2
**
*/

proc (1) = ComputePdfCopula2(cdfCopula,u1,u2);
  local cdfCopula:proc;
  local C0,C1,C2,C12,eps,au1,dau1,u1dh,dh1,au2,dau2,u2dh,dh2;
  C0 = cdfCopula(u1,u2);
  eps = 6.0554544523933429e-6;
  au1 = abs(u1);
  dau1 = u1 ./ missrv(miss(au1,0),1);
  u1dh = u1 + eps*_max_(au1,1e-2).*dau1;
  dh1 = u1dh-u1;
  au2 = abs(u2);
  dau2 = u2 ./ missrv(miss(au2,0),1);
  u2dh = u2 + eps*_max_(au2,1e-2).*dau2;
  dh2 = u2dh-u2;
  C1 = cdfCopula(u1+dh1,u2);
  C2 = cdfCopula(u1,u2+dh2);
  C12 = cdfCopula(u1+dh1,u2+dh2);
  retp( ((C12 - C2) - (C1 - C0)) ./ (dh1.*dh2) );
endp;

```

A titre de comparaison, le graphique 7.8 reproduit les exemples du graphique 3.8, mais la densité de la copule a été calculée numériquement avec la procédure `ComputePdfCopula2`.

Reprenons l'exemple de la transformation  $\gamma$  de DURRLEMAN, NIKEGHBALI et RONCALLI [2000]. Nous avons

$$\mathbf{C}_\gamma(u_1, u_2) = \gamma^{-1}(\mathbf{C}(\gamma(u_1), \gamma(u_2))) \quad (7.46)$$

L'expression de la densité est relativement complexe :

$$c_\gamma(u_1, u_2) = \frac{\gamma'(u_1)\gamma'(u_2)}{\gamma'(\gamma^{-1}(\mathbf{C}(\gamma(u_1), \gamma(u_2))))} \times \left( c(\gamma(u_1), \gamma(u_2)) - \frac{\gamma''(\gamma^{-1}(\mathbf{C}(\gamma(u_1), \gamma(u_2))))}{(\gamma'(\gamma^{-1}(\mathbf{C}(\gamma(u_1), \gamma(u_2))))^2} \mathbf{C}_{2|1}(\gamma(u_1), \gamma(u_2)) \mathbf{C}_{1|2}(\gamma(u_1), \gamma(u_2)) \right) \quad (7.47)$$

Le graphique 7.9 correspond au graphique 11 de DURRLEMAN, NIKEGHBALI et RONCALLI [2000]. Il a été obtenu avec le code suivant :

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1	0.8908	0.4824	0.4020	0.3377
AL-15		1	0.4263	0.3653	0.3080
CU			1	0.4137	0.3521
NI				1	0.3271
PB					1

TABLE 7.8. Matrice  $\hat{\rho}_{om}$  (copule Student avec  $\nu = 4$ )

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1	0.8919	0.4913	0.4099	0.3477
AL-15		1	0.4355	0.3732	0.3181
CU			1	0.4216	0.3610
NI				1	0.3356
PB					1

TABLE 7.9. Matrice  $\hat{\rho}_{om}$  (copule Student avec  $\nu = 5$ )

```

new;
library copula,optmum,pgraph;
CopulaSet;

tau = 0.5;

proc FindParameter(theta);
  retp((-KendallCopulaFrank(theta) + tau)^2);
endp;

{theta,f0,g0,retcode} = Qnewton(&FindParameter,7);

beta1 = 1; beta2 = 1;
beta3 = 1; beta4 = 0.025;

proc phi(x);
  local y;
  x = x^(1/beta1); y = (beta3+beta4)*x ./ (beta3*x+beta4) ;
  retp( y^(1/beta2) );
endp;

proc invphi(x);
  local y;
  x = x^beta2; y = beta4*x ./ (-beta3*x+beta4+beta3) ;
  retp( y^beta1 );
endp;

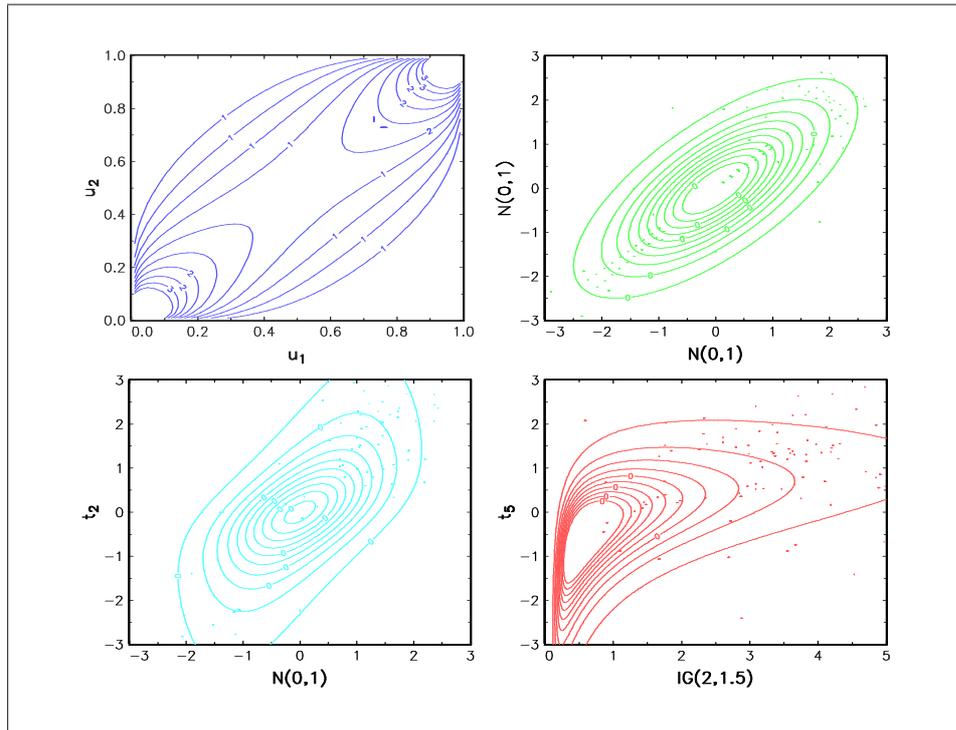
proc cdfCopula(u1,u2);
  retp( invphi(cdfCopulaFrank(phi(u1),phi(u2),theta)) );
endp;

proc pdfCopula(u1,u2);
  retp( ComputePdfCopula2(&cdfCopula,u1,u2) );
endp;

x1 = seqa(-3,0.01,601); x2 = x1';
u1 = seqa(0.01,0.01,99); u2 = u1';

pdf1 = pdfCopula(u1,u2);
pdf2 = pdfCopula(cdfn(x1),cdfn(x2)) .* pdfn(x1) .* pdfn(x2);

```



Graphique 7.8. Courbes de niveau de densités bivariées (copule Normale)

```
pdf3 = pdfCopula(cdfn(x1),cdfn(x2,2)) .* pdfn(x1) .* pdfn(x2,2);
pdf4 = pdfCopula(cdfn(x1,1),cdfn(x2,5)) .* pdfn(x1,1) .* pdfn(x2,5);

graphset;
  begwind;
  window(2,2,0);
  _pnum = 2; _paxht = 0.25; _pnumht = 0.20;
  fonts('simplex simgrma');
  _pzclr = 9|10|11|12|13|14|15|9|10|11|12|13|14|15|9|10|11|12|13|14|15;

  setwind(1);
  _plev = seqa(0.25,0.25,7)|seqa(1.5,0.1,50);
  xtics(0,1,0.2,2); ytics(0,1,0.2,2);
  xlabel('\214u1[''); ylabel('\214u2['');
  contour(u1',u2',pdf1');

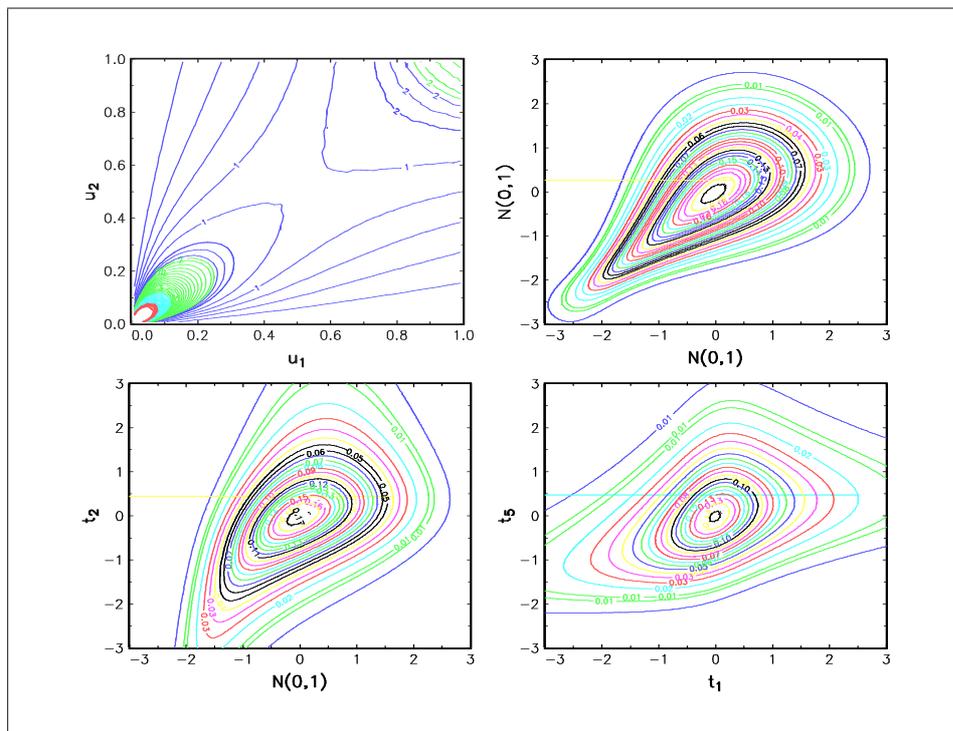
  _plev = 0.01|seqa(0.005,0.0075,60);
  xtics(-3,3,1,2); ytics(-3,3,1,2);

  setwind(2);
  xlabel('\214N(0,1)'); ylabel('\214N(0,1)');
  contour(x1',x2',pdf2');

  setwind(3);
  xlabel('\214N(0,1)'); ylabel('\214t2['');
  contour(x1',x2',pdf3');

  setwind(4);
  xlabel('\214t1[''); ylabel('\214t5['');
  contour(x1',x2',pdf4');
```

```
graphprt(''-c=1 -cf=chap7-13.ps'');
endwind;
```



Graphique 7.9. Lignes de niveau de la densité de la copule  $\gamma$ -Frank avec  $\gamma(x) = \hat{h}(x)$  ( $\theta_1 = 1$ ,  $\theta_2 = 0.025$ )

## 7.7 Repères historiques

La copule empirique a été introduite par DEHEUVELS [1979], qui l'a utilisée pour étudier les processus empiriques et les tests d'indépendance (voir les trois articles de Paul Deheuvels de 1981). L'estimateur IFM est proposé par SHIH et LOUIS [1995] et JOE et XU [1996]. Concernant l'estimateur omnibus, la formalisation a été faite par GENEST, GHOUDI et RIVEST [1995] et SHIH et LOUIS [1995]. Néanmoins, on trouve la trace de celui-ci dans des études antérieures sur les modèles de survie (voir le chapitre 10). Enfin, le problème de l'efficacité asymptotique de cet estimateur est considéré par KLAASSEN et WELLNER [1997] et GENEST et WERKER [2002].

## Références

- [1] BARBE, P., C. GENEST, K. GHOUDI et B. RÉMILLARD [1996], On Kendall's process, *Journal of Multivariate Analysis*, **58**, 197-229
- [2] BOUYÉ, E., V. DURRLEMAN, A. NIKEGHBALI, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000], Copulas for finance — a reading guide and some applications, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [3] DEHEUVELS, P. [1979], La fonction de dépendance empirique et ses propriétés — Un test non paramétrique d'indépendance, *Académie Royale de Belgique – Bulletin de la Classe des Sciences – 5e Série*, **65**, 274-292
- [4] DEHEUVELS, P. [1981], Multivariate tests of independence, in D. Dugue, E. Lukacs et V.K. Rohatgi (Eds.), *Analytical methods in probability theory (Proceedings of a conference held at Oberwolfach in 1980)*, *Lecture Notes in Mathematics*, **861**, Springer-Verlag, New York
- [5] DEHEUVELS, P. [1981], A Kolmogorov-Smirnov type test for independence and multivariate samples, *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, **26**, 213-226

- [6] DEHEUVELS, P. [1981], A non parametric test for independence, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **26**, 29-50
- [7] DEHEUVELS, P. [1981], An asymptotic decomposition for multivariate distribution-free tests of independence, *Journal of Multivariate Analysis*, **11**, 102-113
- [8] DURRLEMAN, V., A. NIKEGHBALI et T. RONCALLI [2000], A simple transformation of copula, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [9] DURRLEMAN, V., A. NIKEGHBALI et T. RONCALLI [2000], Which copula is the right one?, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [10] GENEST, C., K. GHOUDI et L-P RIVEST [1995], A semiparametric estimation procedure for dependence parameters in multivariate families of distributions, *Biometrika*, **82(3)**, 543-552
- [11] GENEST, C. et L. RIVEST [1993], Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas, *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 1034-1043
- [12] GENEST, C. et L-P. RIVEST [2000], On the bivariate probability integral transformation, Université Laval, Québec, *Working Paper*
- [13] GENEST, C. et B.J.M. WERKER [2002], Conditions for the asymptotic semiparametric efficiency of an omnibus estimator of dependence parameters in copula models, in C.M. Cuadras and J.A. Rodríguez Lallena (Eds.), *Proceedings of the Conference on Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling (Barcelona, Espagne)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [14] JOE, H. [1997], Multivariate Models and Dependence Concepts, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, **73**, Chapman & Hall, London
- [15] JOE, H. et J.J. XU [1996], The estimation method of inference functions for margins for multivariate models, Department of Statistics, University of British Columbia, *Technical Report*, **166**
- [16] KLAASSEN, C.A.J. et J.A. WELLNER [1997], Efficient estimation in the bivariate normal copula model : normal margins are least favorable, *Bernoulli*, **3(1)**, 55-77
- [17] SHIH, J.H. et T.A. LOUIS [1995], Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data, *Biometrics*, **51**, 1384-1399



Deuxième partie

# Aspects Multidimensionnels du Risque



# 8

## Le problème de l'agrégation de (et dans) la valeur en risque

### 8.1 L'effet de diversification

Considérons deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  représentant les pertes de deux marchés. Soient  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  les distributions de  $X_1$  et  $X_2$ . Les valeurs en risque au seuil de confiance  $\alpha$  sont alors

$$\text{VaR}(X_1; \alpha) = \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha) \quad (8.1)$$

et

$$\text{VaR}(X_2; \alpha) = \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha) \quad (8.2)$$

Nous cherchons à agréger ces deux valeurs en risque, c'est-à-dire à déterminer la VaR de  $X_1 + X_2$  :

$$\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha) := \inf \{x : \Pr \{X_1 + X_2 \leq x\} \geq \alpha\} \quad (8.3)$$

Soit  $\mathbf{F}_{1+2}$  la distribution de  $X_1 + X_2$ . Nous avons

$$\mathbf{F}_{1+2}(x) = \iint_{x_1+x_2 \leq x} d\mathbf{C}(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \quad (8.4)$$

La valeur en risque  $\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha)$  dépend des distributions marginales, mais aussi de la copule  $\mathbf{C}$ .

Nous considérons le cas  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^+$ . Nous supposons que  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  sont continues. Nous avons  $X_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{F}_1(X_1))$ . Soit la fonction  $\varpi$  définie par  $x \mapsto x + \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{F}_1(x))$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr \{X_1 + X_2 \leq \text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha)\} \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1} \{\varpi(X_1) \leq \text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha)\}] \\ &= \mathbf{F}_1(\varpi^{-1}(\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha))) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Nous en déduisons que  $\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha) = \varpi(\mathbf{F}_1^{-1}(\alpha))$  et nous obtenons le résultat suivant

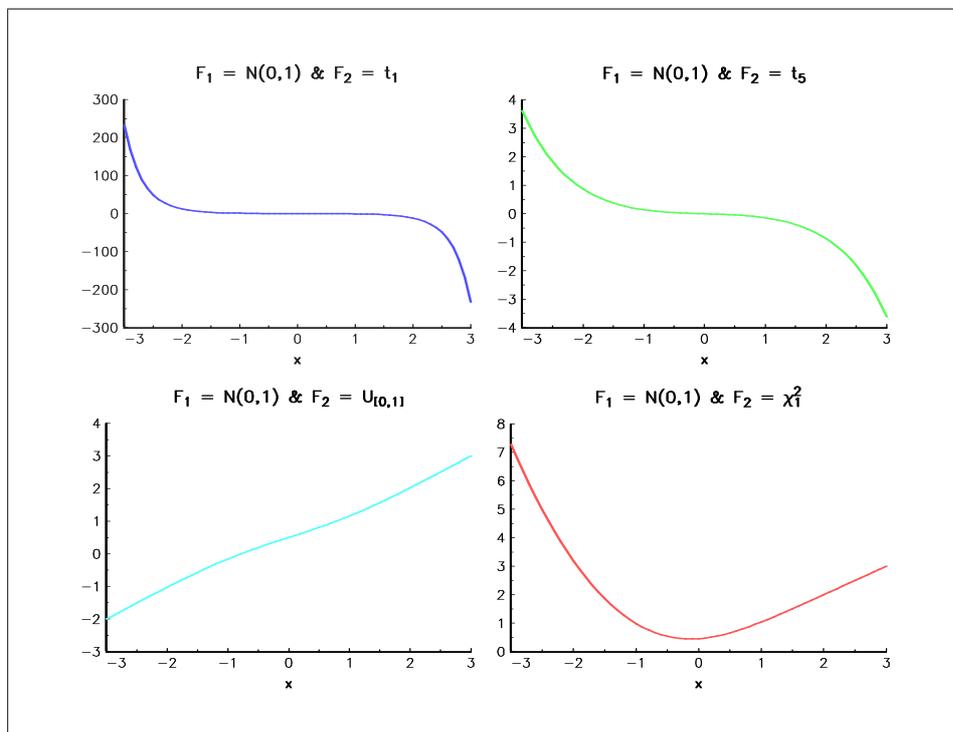
$$\begin{aligned} \text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha) &= \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha) + \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{F}_1(\mathbf{F}_1^{-1}(\alpha))) \\ &= \mathbf{F}_1^{-1}(\alpha) + \mathbf{F}_2^{-1}(\alpha) \\ &= \text{VaR}(X_1; \alpha) + \text{VaR}(X_2; \alpha) \end{aligned} \quad (8.6)$$

**Théorème 20** *Le principe d'agrégation des valeurs en risque qui consiste à sommer les VaRs individuelles repose sur l'hypothèse que la dépendance entre les pertes aléatoires est la copule Fréchet  $\mathbf{C}^+$ .*

Nous considérons maintenant le cas  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^-$ . Nous avons  $X_2 = \mathbf{F}_2^{-1}(1 - \mathbf{F}_1(X_1))$ . Soit la fonction  $\varpi$  définie par  $x \mapsto x + \mathbf{F}_2^{-1}(1 - \mathbf{F}_1(x))$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \alpha &= \Pr\{X_1 + X_2 \leq \text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha)\} \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}\{\varpi(X_1) \leq \text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha)\}] \end{aligned} \quad (8.7)$$

Contrairement au cas précédent,  $\varpi$  n'est plus forcément une fonction monotone croissante. A titre d'exemple, nous représentons la fonction  $\varpi(x)$  sur le graphique 8.1 pour différentes fonctions  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$ .  $\varpi(x)$  peut donc être croissante, décroissante ou non monotone. Par exemple, dans le cas croissant, nous avons  $\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha) =$



Graphique 8.1. Fonction  $\varpi(x)$  pour différentes fonctions  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$

$\varpi(\mathbf{F}_1^{-1}(\alpha))$  et nous obtenons  $\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha) = \text{VaR}(X_1; \alpha) + \text{VaR}(X_2; 1 - \alpha)$ . Dans les autres cas, nous avons  $\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha) = \text{VaR}(X_1; 1 - \alpha) + \text{VaR}(X_2; \alpha)$  ou d'autres expressions plus complexes.

**Exemple 18** *Considérons le cas où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  est un vecteur aléatoire gaussien standard de corrélation  $\rho$ . Nous avons  $\text{VaR}(X_1; \alpha) = \text{VaR}(X_2; \alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$ .  $X_1 + X_2$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance  $2(1 + \rho)$ . Nous en déduisons que*

$$\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha) = \sqrt{2(1 + \rho)}\Phi^{-1}(\alpha) \quad (8.8)$$

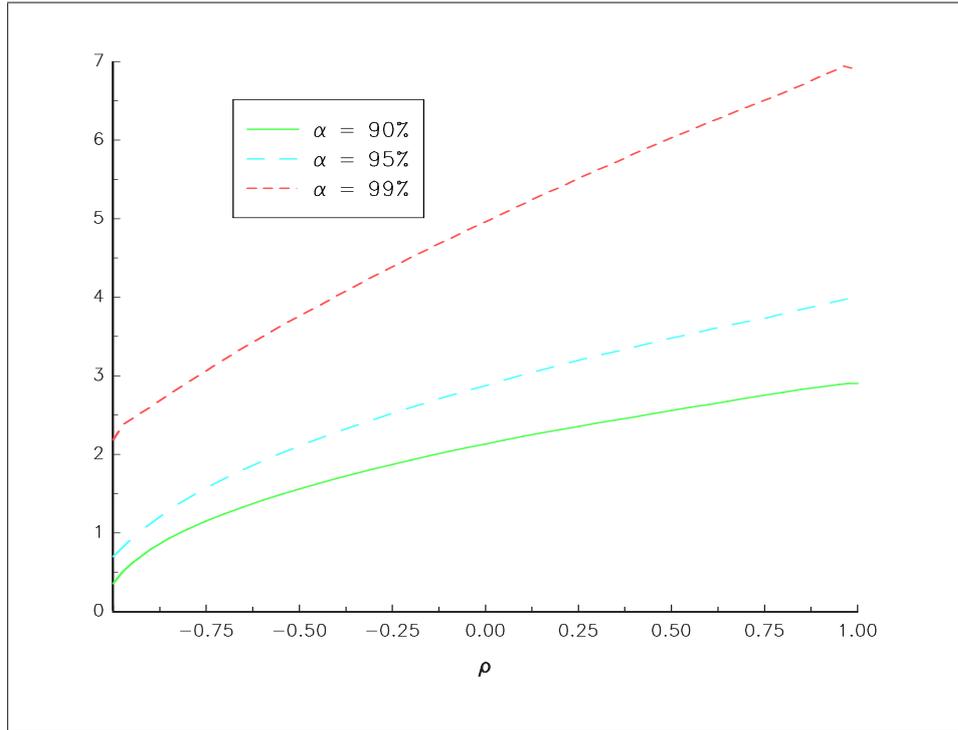
Nous avons donc les cas particuliers suivants :

$\rho$	-1	0	1
$\text{VaR}(X_1 + X_2)$	0	$(\text{VaR}(X_1) + \text{VaR}(X_2))^{1/2}$	$\text{VaR}(X_1) + \text{VaR}(X_2)$

Le choix de la dépendance est donc primordial pour agréger les risques.

**Exemple 19** *Considérons le cas où  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $X_2 \sim \mathbf{t}_3$ . Le graphique 8.2 représente  $\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha)$  en fonction du paramètre  $\rho$  de la copule Normale.*

Revenons sur la problématique générale de la mesure des risques dans le cas multidimensionnel. L'approche copule permet de la considérer sous trois angles :



Graphique 8.2.  $\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha)$  lorsque  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $X_2 \sim \mathbf{t}_3$  et  $\mathbf{C}(X_1, X_2)$  est une copule Normale

1. La première ‘source de risque’ concerne évidemment les facteurs pris de façon individuelle. Il est évident que le choix de modélisation de la distribution d’un facteur peut avoir une influence **importante** sur la mesure de risque. De plus, même si deux distributions ont été calibrées pour donner la même mesure pour un seuil de confiance donné, le passage à un seuil de confiance plus élevé peut entraîner des différences énormes. Bien sûr, ceci est lié au comportement (asymptotique et non-asymptotique) des valeurs extrêmes. Par exemple, la table 8.1 illustre les différences induites par des distributions  $\Phi$ ,  $\mathbf{t}_4$  et  $\mathbf{t}_2$ .

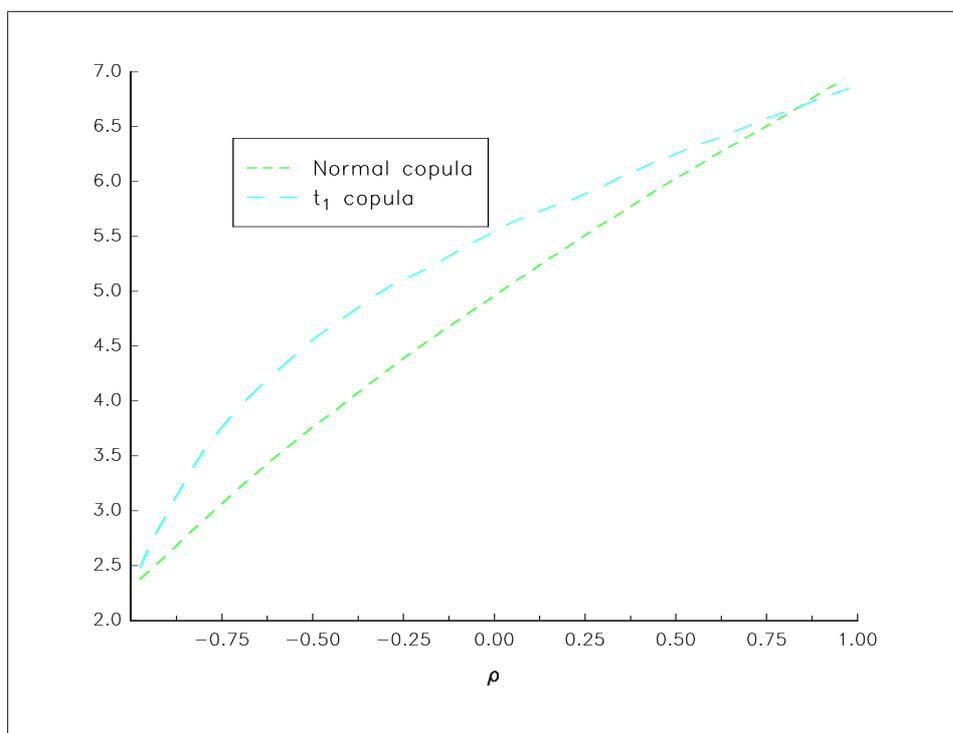
Rating	Réglementaire (marché)	BBB	A	AA	AAA
$\alpha$	99%	99.75%	99.9%	99.95%	99.97%
Temps de retour	100 jours	400 jours	4 années	8 années	13 années
$\Phi^{-1}(\alpha)$	2.33	2.81	3.09	3.29	3.43
$\mathbf{t}_4^{-1}(\alpha)$	3.75	5.60	7.17	8.61	9.83
$\frac{\Phi^{-1}(0.99)}{\mathbf{t}_4^{-1}(0.99)} \mathbf{t}_4^{-1}(\alpha)$	2.33	3.48	4.45	5.35	6.10
$\mathbf{t}_2^{-1}(\alpha)$	6.96	14.1	22.3	31.6	40.8
$\frac{\Phi^{-1}(0.99)}{\mathbf{t}_2^{-1}(0.99)} \mathbf{t}_2^{-1}(\alpha)$	2.33	4.71	7.46	10.6	13.6

TABLE 8.1. Influence de la distribution sur la mesure de risque

2. La seconde ‘source de risque’ porte sur la dépendance des facteurs, c’est-à-dire comment sont corrélés les risques unidimensionnels. Il est difficile d’analyser le risque multidimensionnel lorsque nous n’utilisons pas une approche copule, car il n’est pas évident de voir quelle est la part des marginales et la part de la copule. Reprenons l’exemple 19. Nous avons  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $X_2 \sim \mathbf{t}_3$ . Nous cherchons à calculer la mesure agrégée  $\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha)$ . Le graphique 8.3 représente  $\text{VaR}(X_1 + X_2; \alpha)$  en fonction du paramètre  $\rho$  des copules Normale et Student ( $\nu = 1$ ). Nous constatons que la mesure est plus grande pour cette dernière copule. Remarquez que la ‘source de risque’ due à la copule peut encore être décomposée en deux :

- (a) La famille de la copule est un choix important à faire. Nous rappelons que le problème de l’agrégation de la mesure de risque est un problème d’agrégation de quantiles extrêmement élevés ( $\alpha > 99\%$ ). Il est évident qu’une copule qui présente une dépendance de queue ne corrèle pas ces quantiles de la même façon qu’une copule qui n’a pas de dépendance de queue.

- (b) La valeur du paramètre (qui peut-être multidimensionnel) de la copule est aussi un autre choix important à faire. En général, ce choix est guidé par une méthode de calibration.



Graphique 8.3. Comparaison de la mesure  $\text{VaR}(X_1 + X_2; 99\%)$  (copules Normale et  $t_1$ )

3. Enfin, la troisième ‘source de risque’ concerne directement la composition du portefeuille. Il est difficile de dire que tel choix de modélisation conduit à une mesure de risque élevée ou faible sans considérer la nature même du portefeuille.

**Prendre en compte l’effet de diversification, c’est ne pas sommer directement les valeurs en risque, c’est-à-dire considérer une dépendance qui n’est pas la copule  $C^+$ .**

## 8.2 L’influence de la dépendance dans la VaR marché

Reprenons l’exemple de BOUYÉ et al. [2000]. Nous considérons trois portefeuilles composés d’actifs du LME :

	AL	AL-15	CU	NI	PB
$P_1$	1	1	1	1	1
$P_2$	-1	-1	-1	1	1
$P_3$	2	1	-3	4	5

Nous reportons les valeurs en risque obtenues pour différentes spécifications dans les tables 8.2, 8.3 et 8.4. Par rapport à la valeur en risque analytique (ou gaussienne), une valeur en risque construite à partir de distributions et d’une copule plus risquées<sup>1</sup> n’est pas systématiquement plus élevée. Dans notre exemple, pour  $\alpha$  égal à 90%, la VaR gaussienne est plus élevée que les deux autres. Ceci est vrai aussi pour  $\alpha$  égal à 95% dans de nombreux cas. C’est à partir de 99% que la VaR gaussienne commence à être moins élevée que les deux autres VaRs, et pour des quantiles extrêmes, la différence peut être importante.

Voici le programme qui calcule les valeurs en risque de l’exemple LME.

<sup>1</sup> Terme abusif pour dire que les marges sont des distributions à queues épaisses et la copule présente une dépendance de queue – par forcément asymptotique — plus grande que celle de la copule Normale.

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P <sub>1</sub>	7.340	9.402	13.20	14.65	17.54
P <sub>2</sub>	4.047	5.176	7.318	8.107	9.753
P <sub>3</sub>	13.96	17.90	25.21	27.92	33.54

TABLE 8.2. Marges gaussiennes et copule Normale

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P <sub>1</sub>	5.797	8.112	13.36	15.65	20.15
P <sub>2</sub>	3.812	5.531	9.801	11.65	16.34
P <sub>3</sub>	13.45	19.32	34.15	40.77	54.95

TABLE 8.3. Marges gaussiennes et copule Student  $t_1$

```

new;
library copula,pgraph,optmum;
CopulaSet;

dataset = 'lme';
let vars = AL AL-15 CU NI PB;

data = LoadData(dataset,vars);
dates = LoadData(dataset,'date');

let theta[3,5] =      1 1 1 1 1
                    -1 -1 -1 1 1
                    2 1 -3 4 -5;

theta = theta';
let alpha = 0.90 0.95 0.99 0.995 0.999;
let P = 100 100 100 100 100;
ns = 300000;
nu = 1;

data = ln(data);
r = packr(data - lag1(data));
mu = meanc(r);
sigma = stdc(r);

u = dependogram(r);
{rhoStudent,rhoNormal} = regCopulaStudent(substute(u,u.==1,1-__macheps),nu);

format 8,4;

output file = chap8-4.out reset;

/*
**> Normal copula + Gaussian distributions
**
*/

rndseed 123;

u = rndCopulaNormal(rhoNormal,ns);
r = mu' + cdfni(u) .* sigma';
thetaStar = theta .* P;
VaR = zeros(rows(alpha),cols(thetaStar));
i = 1;
do until i > cols(VaR);

```

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P <sub>1</sub>	6.593	8.885	14.33	16.98	23.96
P <sub>2</sub>	3.778	5.021	7.928	9.351	13.42
P <sub>3</sub>	12.80	17.13	27.52	32.89	49.09

TABLE 8.4. Marges student  $t_4$  et copule Normale

```

    VaR[:,i] = - _rndCopulaEmpiricalQuantile(r*thetaStar[:,i],1-alpha);
    i = i + 1;
endo;

print VaR';
clear u,r;

/*
**> Student copula + Gaussian distributions
**
*/

rndseed 123;

u = rndCopulaStudent(rhoStudent,nu,ns);
r = mu' + cdfni(u) .* sigma';
i = 1;
do until i > cols(VaR);
    VaR[:,i] = - _rndCopulaEmpiricalQuantile(r*thetaStar[:,i],1-alpha);
    i = i + 1;
endo;

print VaR';
clear u,r;

/*
**> Normal copula + Student distributions
**
*/

rndseed 123;

df = 4;
sigma = sigma/sqrt(df/(df-2));

u = rndCopulaNormal(rhoNormal,ns);
r = mu' + cdfti(u,df) .* sigma';
thetaStar = theta .* P;
VaR = zeros(rows(alpha),cols(thetaStar));
i = 1;
do until i > cols(VaR);
    VaR[:,i] = - _rndCopulaEmpiricalQuantile(r*thetaStar[:,i],1-alpha);
    i = i + 1;
endo;

print VaR';
clear u,r;

output off;

```

### 8.3 Construire une VaR marché semi-historique

Nous proposons dans cette section une utilisation originale des copules pour calculer la valeur en risque. C'est une VaR semi-historique puisque la dépendance des facteurs est une copule **Normale** (ou une autre copule) et les marges des facteurs sont les distributions empiriques. C'est donc une combinaison de la VaR historique (pour les directions unidimensionnelles) et de la VaR paramétrique (pour la dépendance des directions unidimensionnelles).

**Remarque 31** Cette VaR peut être intéressante lorsque les facteurs de risque ne sont pas évalués sur les mêmes périodes de temps. Dans ce cas, Il n'est pas possible de construire une VaR historique. On peut construire une VaR gaussienne en prenant des corrélations conservatrices (à dire d'expert par exemple). Il est à craindre que celle-ci sous-estime fortement le risque puisque les marges sont gaussiennes. La VaR semi-historique est donc une VaR historique avec un mécanisme de dépendance paramétrique ou une VaR paramétrique (au sens où la copule est paramétrique, par exemple **Normale**) avec des marges historiques (c'est-à-dire empiriques).

Soit un portefeuille linéaire de  $n$  actifs. Nous notons  $P_i(t)$  et  $r_i(t)$  le prix et le rendement de l'actif  $i$  à la date  $t$ . Si  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ , la valeur du portefeuille à la date  $t$  est

$$P(t) = \sum_{i=1}^n \theta_i P_i(t) \quad (8.9)$$

Nous supposons que les facteurs de risque sont les rendements des actifs. A la date  $t$ , la valeur du portefeuille  $P(t+1)$  est aléatoire et nous avons

$$\begin{aligned} P(t+1) &= \sum_{i=1}^n \theta_i P_i(t+1) \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_i P_i(t) (1 + r_i(t+1)) \end{aligned} \quad (8.10)$$

Le P&L entre les dates  $t$  et  $t+1$  est donc

$$\begin{aligned} \Pi(t+1 | t) &= P(t+1) - P(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_i P_i(t) r_i(t+1) \\ &= \theta_\star(t)^\top \mathbf{r}(t+1) \end{aligned} \quad (8.11)$$

où  $\mathbf{r}(t+1)$  est le vecteur aléatoire des rendements  $(r_1(t+1), \dots, r_n(t+1))$  et  $\theta_\star(t)$  est le vecteur dont la  $i$ -ième composante est  $\theta_i P_i(t)$ . Notons  $\mathbf{F}$  la distribution de  $\mathbf{r}(t+1)$ . La valeur en risque au seuil de confiance  $\alpha$  est alors définie par

$$\begin{aligned} \text{VaR}(\alpha) &= -\inf \{x : \Pr \{ \Pi(t+1 | t) \leq x \} \geq 1 - \alpha \} \\ &= -\mathbf{F}^{-1}(1 - \alpha) \end{aligned} \quad (8.12)$$

Dans le cas de VaR gaussienne, nous supposons que  $\mathbf{r}(t+1) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ . Nous en déduisons que

$$\Pi(t+1 | t) \sim \mathcal{N}(\theta_\star(t)^\top \mu, \theta_\star(t)^\top \Sigma \theta_\star(t)) \quad (8.13)$$

Nous obtenons finalement

$$\Phi \left( \frac{x - \theta_\star(t)^\top \mu}{\sqrt{\theta_\star(t)^\top \Sigma \theta_\star(t)}} \right) = 1 - \alpha \quad (8.14)$$

et donc

$$\text{VaR}(\alpha) = -\theta_\star(t)^\top \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\theta_\star(t)^\top \Sigma \theta_\star(t)} \quad (8.15)$$

### Code GAUSS 39 (Calcul de la valeur en risque gaussienne)

```

/*
**> gaussianVaR
**
*/

proc (1) = gaussianVaR(data,P,theta,alpha);
    local r,mu,sigma,thetaStar,VaR,i;

    data = ln(data);
    r = packr(data - lag1(data));
    mu = meanc(r);
    Sigma = vcx(r);

    thetaStar = theta .* P;
    VaR = zeros(rows(alpha),cols(thetaStar));
    i = 1;
    do until i > cols(VaR);
        VaR[:,i] = - thetaStar[:,i]'mu +
            cdfni(alpha) * sqrt(thetaStar[:,i]'Sigma*thetaStar[:,i]);
        i = i + 1;
    endo;

    retp(VaR);
endp;

```

Pour la VaR historique,  $\mathbf{F}$  est modélisée par la distribution empirique  $\hat{\mathbf{F}}$ . Supposons que nous disposions d'un historique de  $m$  observations des rendements. Soit  $\hat{\mathbf{r}}_j = (\hat{r}_{j,1}, \dots, \hat{r}_{j,n})$  le vecteur des rendements de la  $j$ -ième observation. Nous pouvons calculer le P&L historique associé

$$\hat{\Pi}_j = \theta_\star(t)^\top \hat{\mathbf{r}}_j \quad (8.16)$$

La distribution empirique  $\hat{\mathbf{F}}$  est alors caractérisée par le vecteur  $(\hat{\Pi}_1, \dots, \hat{\Pi}_m)$  et  $\hat{\mathbf{F}}^{-1}(1 - \alpha)$  correspond au quantile  $1 - \alpha$  de  $(\hat{\Pi}_1, \dots, \hat{\Pi}_m)$ .

### Code GAUSS 40 (Calcul de la valeur en risque historique)

```

/*
**> historicalVaR
**
*/

proc (1) = historicalVaR(data,P,theta,alpha);
    local r,thetaStar,VaR,i;

    data = ln(data);
    r = packr(data - lag1(data));
    thetaStar = theta .* P;
    VaR = zeros(rows(alpha),cols(thetaStar));
    i = 1;
    do until i > cols(VaR);
        VaR[:,i] = - _rndCopulaEmpiricalQuantile(r*thetaStar[:,i],1-alpha);
        i = i + 1;
    endo;

    retp(VaR);
endp;

```

Pour la VaR semi-historique, la distribution des rendements est construite avec les marges empiriques et une copule paramétrique.  $F^{-1}(1 - \alpha)$  est ensuite calculé par la méthode de Monte Carlo.

#### Code GAUSS 41 (Calcul de la valeur en risque semi-historique (copule Normale))

```

/*
**> copulaNormalVaR
**
*/

proc (1) = copulaNormalVaR(data,P,theta,alpha,ns);
    local r,u,rho,thetaStar,VaR,i;

    data = ln(data);
    r = packr(data - lag1(data));
    u = dependogram(r);
    rho = regCopulaNormal(substute(u,u.==1,1-__machepts));
    thetaStar = theta .* P;
    r = rndCopulaEmpiricalQuantile(rndCopulaNormal(rho,ns),r);

    VaR = zeros(rows(alpha),cols(thetaStar));
    i = 1;
    do until i > cols(VaR);
        VaR[.,i] = - _rndCopulaEmpiricalQuantile(r*thetaStar[.,i],1-alpha);
        i = i + 1;
    endo;

    retp(VaR);
endp;

```

#### Code GAUSS 42 (Calcul de la valeur en risque semi-historique (copule Student))

```

/*
**> copulaStudentVaR
**
*/

proc (1) = copulaStudentVaR(data,P,theta,alpha,nu,ns);
    local r,u,rhoStudent,rho,thetaStar,VaR,i;

    data = ln(data);
    r = packr(data - lag1(data));
    u = dependogram(r);
    {rhoStudent,rho} = regCopulaStudent(substute(u,u.==1,1-__machepts),nu);
    thetaStar = theta .* P;
    r = rndCopulaEmpiricalQuantile(rndCopulaStudent(rhoStudent,nu,ns),r);

    VaR = zeros(rows(alpha),cols(thetaStar));
    i = 1;
    do until i > cols(VaR);
        VaR[.,i] = - _rndCopulaEmpiricalQuantile(r*thetaStar[.,i],1-alpha);
        i = i + 1;
    endo;

    retp(VaR);
endp;

```

Reprenons l'exemple de la section précédente. Les tables 8.5 et 8.6 correspondent aux valeurs en risque gaussienne et historique. Notons que nous obtenons de légères différences entre la table 8.2 et 8.5 à cause du

Monte Carlo. Les VaRs semi-historiques sont celles des tables 8.7 et 8.8. C'est la VaR semi-paramétrique avec une copule Normale qui est la plus proche de la VaR historique.

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P <sub>1</sub>	7.185	9.192	12.96	14.33	17.18
P <sub>2</sub>	4.082	5.241	7.417	8.213	9.855
P <sub>3</sub>	14.18	18.19	25.70	28.45	34.12

TABLE 8.5. Valeur en risque gaussienne

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P <sub>1</sub>	6.627	9.023	14.43	16.52	29.56
P <sub>2</sub>	3.434	5.008	8.946	11.28	16.24
P <sub>3</sub>	12.24	17.32	31.77	36.09	50.02

TABLE 8.6. Valeur en risque historique

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P <sub>1</sub>	6.601	8.979	14.98	17.82	24.52
P <sub>2</sub>	3.807	5.088	8.140	9.617	13.84
P <sub>3</sub>	12.83	17.28	28.28	33.78	46.12

TABLE 8.7. Valeur en risque semi-historique (copule Normale)

## 8.4 Calcul de la charge en capital pour le risque opérationnel

Dans la méthode LDA (voir FRACHOT, GEORGES et RONCALLI [2001]), nous cherchons à modéliser la perte totale des risques opérationnels (pour un type de risque donné et une ligne de métier donnée) qui est perçue comme une perte agrégée (**aggregate loss distribution**) de différents événements. Celle-ci se définit donc par

1. le nombre de pertes individuelles,
2. et le montant de chaque pertes individuelles.

A priori, nous ne connaissons pas le nombre de pertes ainsi que le montant des pertes pour la future année. C'est pourquoi nous allons les considérer aléatoires. Nous allons donc modéliser ce nombre de pertes  $N$  par un processus de comptage, et la distribution  $\mathbf{P}$  de ce nombre de pertes est appelée la distribution de la fréquence des pertes (**loss frequency distribution**). Nous supposons aussi que les pertes individuelles sont indépendantes et identiquement distribuées. La distribution du montant d'une perte individuelle  $\zeta$  est appelée la distribution de la sévérité des pertes  $\mathbf{F}$  (**loss severity distribution**). Dans ce cas là, la perte agrégée  $\vartheta$  est la somme **aléatoire** (car  $N$  est aléatoire) des pertes individuelles :

$$\vartheta = \sum_{n=1}^N \zeta_n \quad (8.17)$$

La distribution  $\mathbf{G}$  de la perte agrégée est donc une distribution composée (**compound distribution**) :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(x) &= \Pr\{N = 1\} \times \mathbf{F}(x) + \Pr\{N = 2\} \times \mathbf{F}^{2*}(x) + \\ &\Pr\{N = 3\} \times \mathbf{F}^{3*}(x) + \dots \end{aligned} \quad (8.18)$$

$\mathbf{F}^{n*}$  est la distribution de la somme de  $n$  pertes  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ . La charge en capital réglementaire (Capital-at-Risk) correspond à la valeur en risque au seuil de confiance  $\alpha$  :

$$\text{CaR}(\alpha) = \mathbf{G}^{-1}(\alpha) \quad (8.19)$$

Pour information, le Comité de Bâle a fixé  $\alpha$  égal à 99.9% dans son dernier document consultatif.

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P <sub>1</sub>	4.937	7.275	14.43	18.63	30.53
P <sub>2</sub>	3.237	4.882	10.16	13.09	21.91
P <sub>3</sub>	11.38	17.17	35.15	45.42	72.88

TABLE 8.8. Valeur en risque semi-historique (copule  $t_1$ )

**Remarque 32** Même si cela n'est pas l'objet du cours, précisons ce que peut être un risque de sévérité. Pour cela, nous utilisons les données réelles du *Crédit Lyonnais*. Pour un type de risque, nous calculons le rapport entre la perte maximale observée et le quantile  $\alpha$  empirique. Nous obtenons les résultats suivants :

$\alpha$	Maximum/Quantile
50%	$\simeq 160000$
75%	$\simeq 27000$
90%	$\simeq 13825$

Bien sûr, ce type de risque présente des rapports Maximum/Quantile peu communs. Néanmoins, cela illustre parfaitement la nature de nombreux types de risque opérationnel. A titre de comparaison, le rapport du quantile 99.9999% de la distribution gaussienne sur le quantile 90% de la distribution gaussienne est beaucoup plus faible :

$$\frac{\Phi^{-1}(99.9999\%)}{\Phi^{-1}(90\%)} = 3.7 \quad (8.20)$$

En fait, le risque opérationnel est sûrement le risque qui présente le plus d'événements rares. Le choix de la distribution de sévérité est donc crucial. Généralement, les distributions les plus utilisées sont les lois *lognormale*, *Pareto*, *Weibull*, *GEV*, etc.

L'aggrégation est un problème relativement difficile dans le cas du risque opérationnel. Bien sûr, nous pouvons faire l'hypothèse que les différents types de risque sont indépendants. Dans ce cas, le problème est résolu. Si nous voulons prendre en compte la dépendance entre les risques, nous pouvons

- soit corrélérer les fréquences ;
- soit corrélérer les pertes agrégées.

La première méthode a été proposée par BOUYÉ et al. [2000]. L'idée est de construire des distributions multidimensionnelles de variables aléatoires de Poisson à partir des copules :

$$\begin{aligned} \Pr\{N_1 = n_1, N_2 = n_2\} &= \mathbf{C} \left( \sum_{n=0}^{n_1} \frac{\lambda_1^n e^{-\lambda_1}}{n!}, \sum_{n=0}^{n_2} \frac{\lambda_2^n e^{-\lambda_2}}{n!} \right) - \\ &\quad \mathbf{C} \left( \sum_{n=0}^{n_1-1} \frac{\lambda_1^n e^{-\lambda_1}}{n!}, \sum_{n=0}^{n_2} \frac{\lambda_2^n e^{-\lambda_2}}{n!} \right) - \\ &\quad \mathbf{C} \left( \sum_{n=0}^{n_1} \frac{\lambda_1^n e^{-\lambda_1}}{n!}, \sum_{n=0}^{n_2-1} \frac{\lambda_2^n e^{-\lambda_2}}{n!} \right) + \\ &\quad \mathbf{C} \left( \sum_{n=0}^{n_1-1} \frac{\lambda_1^n e^{-\lambda_1}}{n!}, \sum_{n=0}^{n_2-1} \frac{\lambda_2^n e^{-\lambda_2}}{n!} \right) \end{aligned} \quad (8.21)$$

A titre d'illustration, les tables 8.9 et 8.10 correspondent aux probabilités  $p_{i,j} = \Pr\{N_1 = i, N_2 = j\}$  de la distribution de Poisson bivariable avec  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$  et une copule Normale de paramètre  $\rho$ . Néanmoins, les simulations que nous avons faites montrent que le paramètre  $\rho$  de la copule Normale a très peu d'influence sur la mesure de risque. Les explications sont les suivantes :

- Le choix de la copule Normale ne permet pas de mettre de la dépendance sur les extrêmes. Une copule de valeurs extrêmes a une influence plus importante sur la mesure de risque.
- L'absence de dépendance sur les extrêmes est accentuée par deux phénomènes : les fréquences sont discrètes (ce qui veut dire par exemple que la mesure de risque sera plus sensible à la copule si les fréquences de Poisson sont importantes, car le caractère discret de la distribution est moins accentué) et la mesure de risque porte sur la distribution agrégée. Nous pouvons très bien avoir deux extrêmes  $N_1$  et  $N_2$ , cela ne veut

$p_{i,j}$	0	1	2	3	4	5	...	$p_{i,\cdot}$
0	0.0945	0.133	0.0885	0.0376	0.0114	0.00268		0.368
1	0.0336	0.1	0.113	0.0739	0.0326	0.0107		0.368
2	0.00637	0.0312	0.0523	0.0478	0.0286	0.0123		0.184
3	0.000795	0.00585	0.0137	0.0167	0.013	0.0071		0.0613
4	7.28E-005	0.000767	0.00241	0.00381	0.00373	0.00254		0.0153
5	5.21E-006	7.6E-005	0.000312	0.000625	0.000759	0.000629		0.00307
⋮								
$p_{\cdot,j}$	0.135	0.271	0.271	0.18	0.0902	0.0361		1

TABLE 8.9. Loi de Poisson bidimensionnelle avec  $\rho = 0.5$

$p_{i,j}$	0	1	2	3	4	5	...	$p_{i,\cdot}$
0	0.0136	0.0617	0.101	0.0929	0.058	0.027		0.368
1	0.0439	0.112	0.111	0.0649	0.026	0.00775		0.368
2	0.0441	0.0683	0.0458	0.0188	0.00548	0.00121		0.184
3	0.0234	0.0229	0.0109	0.00331	0.000733	0.000126		0.0613
4	0.00804	0.00505	0.00175	0.000407	7.06E-005	9.71E-006		0.0153
5	0.002	0.00081	0.000209	3.79E-005	5.26E-006	5.89E-007		0.00307
⋮								
$p_{\cdot,j}$	0.135	0.271	0.271	0.18	0.0902	0.0361		1

TABLE 8.10. Loi de Poisson bidimensionnelle avec  $\rho = -0.5$

pas dire que nous obtenons nécessairement un extrême pour la somme des deux distributions composées, car le risque opérationnel est avant tout **un risque de sévérité** (quelques pertes extrêmes suffisent à représenter 95% du risque opérationnel).

Dans FRACHOT, GEORGES et RONCALLI [2001], nous présentons une seconde méthode pour agréger les risques qui est beaucoup plus acceptable. La dépendance est directement mise sur les pertes. Soient  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  deux pertes correspondant à deux types différents de risque opérationnel. Soit  $\mathbf{G}$  la distribution jointe. Nous avons

$$\mathbf{G}(x_1, x_2) = \mathbf{C}(\mathbf{G}_1(x_1), \mathbf{G}_2(x_2)) \quad (8.22)$$

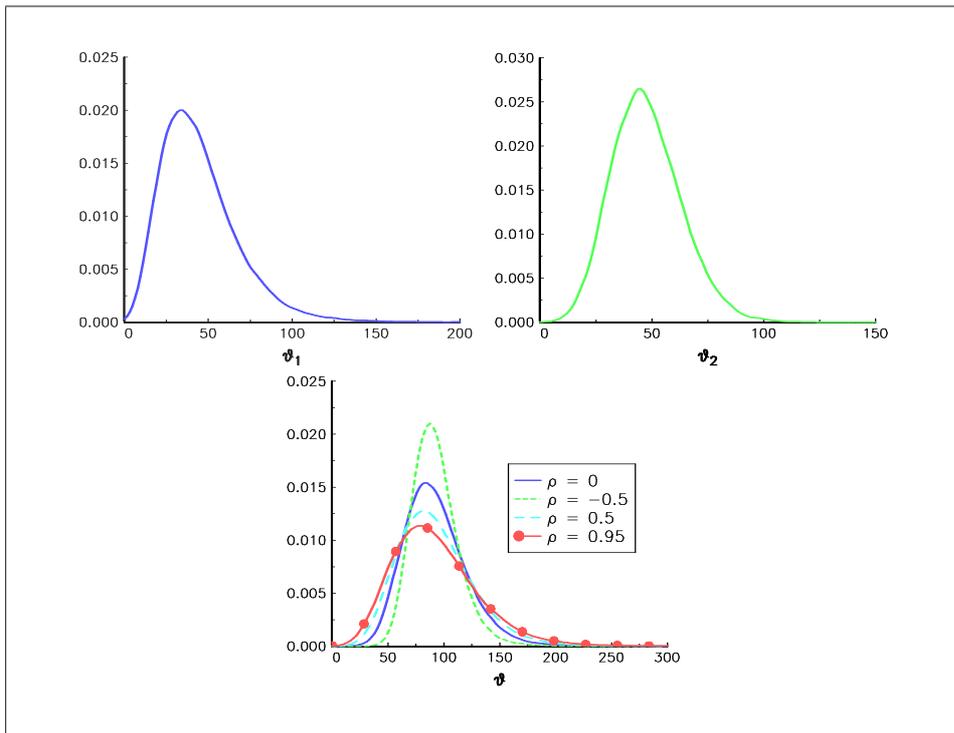
Dans ce cas,  $\mathbf{G}_1$  et  $\mathbf{G}_2$  sont les deux distributions composées qui correspondent aux variables aléatoires  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$ . Soit  $\mathbf{G}_{1+2}$  la distribution de  $\vartheta_1 + \vartheta_2$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{1+2}(x) &= \Pr\{\vartheta_1 + \vartheta_2 \leq x\} \\ &= \iint_{x_1+x_2 \leq x} d\mathbf{C}(\mathbf{G}_1(x_1), \mathbf{G}_2(x_2)) \end{aligned} \quad (8.23)$$

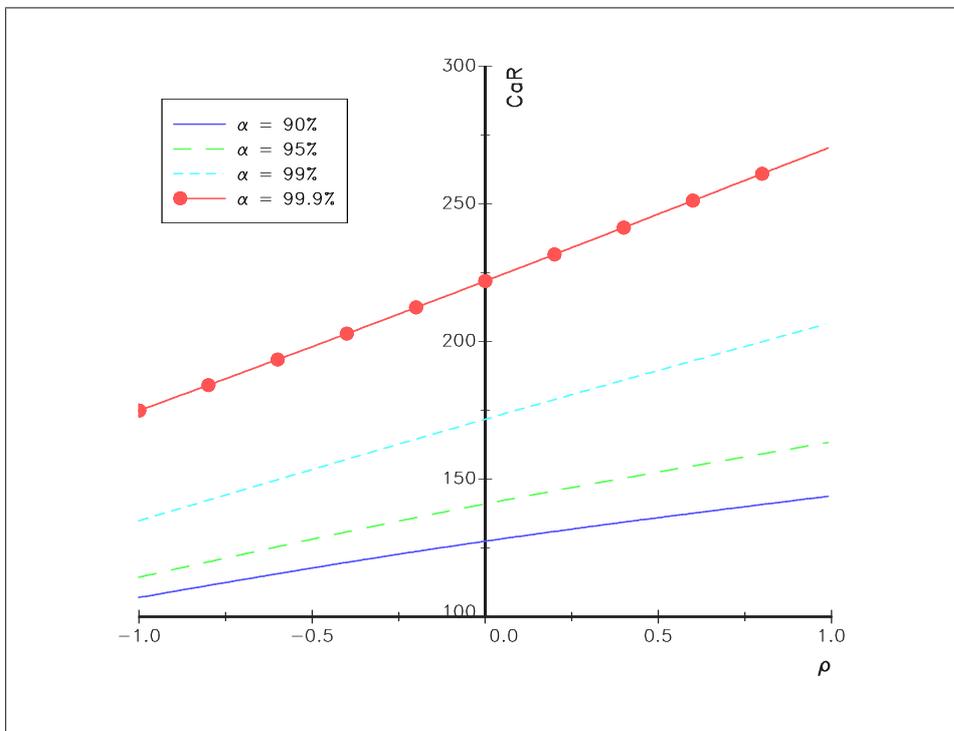
et

$$\text{CaR}(\alpha) = \mathbf{G}_{1+2}^{-1}(\alpha) \quad (8.24)$$

La grande difficulté de cette méthode est l'aspect numérique pour obtenir  $\text{CaR}(\alpha)$ . En général, nous n'avons pas d'expression analytique des marges  $\mathbf{G}_1$  et  $\mathbf{G}_2$ . Il est donc difficile de construire la distribution  $\mathbf{G}$  et encore plus difficile d'obtenir  $\mathbf{G}_{1+2}$  et  $\text{CaR}(\alpha)$ . Néanmoins, nous pouvons contourner ces difficultés en utilisant une méthode de Monte Carlo. Dans ce cas, la simulation de  $\mathbf{G}$  se fait par la méthode des quantiles empiriques. L'exemple suivant est celui donné par FRACHOT, GEORGES et RONCALLI [2001]. Nous avons  $\zeta_1 \sim \mathcal{LN}(1, 1)$  et  $\zeta_2 \sim \mathcal{LN}(1.25, 0.5)$ . Les distributions de fréquence sont respectivement  $\mathcal{P}(10)$  et  $\mathcal{P}(12)$ . Sur le graphique 8.4, nous représentons la distribution de la perte totale  $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$  pour différentes copules Nomales. La charge en capital correspondante est reportée sur le graphique 8.5. Il est intéressant de noter que le *Capital-at-Risk* semble être une fonction linéaire du paramètre  $\rho$  de la copule. **Encore une fois, cette propriété provient du caractère gaussien de la copule.** De plus, ceci n'est plus forcément vrai si les distributions lognormales ont un paramètre  $\sigma$  plus élevé.



Graphique 8.4. Impact de la fonction de dépendance sur la distribution de la perte totale



Graphique 8.5. Impact du paramètre  $\rho$  sur la charge en capital

Code GAUSS 43 (Simulation de  $\vartheta_1$  et  $\vartheta_2$  avec une copule Normale ( $\zeta_1 \sim \mathcal{LN}(\mu_1, \sigma_1)$ ,  $\zeta_2 \sim \mathcal{LN}(\mu_2, \sigma_2)$ ,  $N_1 \sim$

```
/*
**> rndCopulaRiskOp
**
*/

proc (1) = rndCopulaRiskOp(mu1,sigma1,lambda1,mu2,sigma2,lambda2,rho,ns);
  local vartheta1,vartheta2,N1,N2,i,u1,u2,vartheta;

  vartheta1 = zeros(ns,1);
  vartheta2 = zeros(ns,1);

  N1 = rndp(ns,1,lambda1);
  N2 = rndp(ns,1,lambda2);

  i = 1;
  do until i > ns;
    if N1[i] /= 0;
      vartheta1[i] = sumc(_rndLN(mu1,sigma1,N1[i],1));
    endif;
    if N2[i] /= 0;
      vartheta2[i] = sumc(_rndLN(mu2,sigma2,N2[i],1));
    endif;
    i = i + 1;
  endo;

  {u1,u2} = rndCopulaNormal2(rho,ns);
  vartheta = rndCopulaEmpiricalQuantile(u1~u2,vartheta1~vartheta2);

  retp(vartheta);
endp;

proc (1) = _rndLN(mu,sigma,r,c);
  local u;

  u = exp(mu + sigma * rndn(r,c));

  retp(u);
endp;
```

## Références

- [1] BOUYÉ, E., V. DURRLEMAN, A. NIKEGBALI, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000], Copulas for finance — a reading guide and some applications, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [2] BOUYÉ, E., V. DURRLEMAN, A. NIKEGBALI, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000], Copulas : an open field for risk management, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [3] FRACHOT, A., P. GEORGES et T. RONCALLI [2001], Loss Distribution Approach for operational risk, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*

# 9

## Construction et évaluation de scénarios de crise

### 9.1 Le cas unidimensionnel

Ce cas a déjà été traité dans le cours “Théorie des valeurs extrêmes et gestion des risques de marché”. Nous considérons l'exemple de BOUYÉ et al. [2000] portant sur les actifs du LME. Nous reportons les échelles de risque unidimensionnelles :

#### Code GAUSS 44 (Distribution GEV)

```
/*
**> cdfGEV
**
*/

proc cdfGEV(x,mu,sigma,xi);
  local y,e,cdf;

  x = (x - mu) ./ sigma;
  y = 1 + xi .* x;
  e = y .> 0;
  y = y .* e + __macheps .* (1-e);
  cdf = exp(-( y^(-1./xi) ));
  cdf = cdf .* e + (1-e) .* (xi .< 0);

  retp(cdf);
endp;

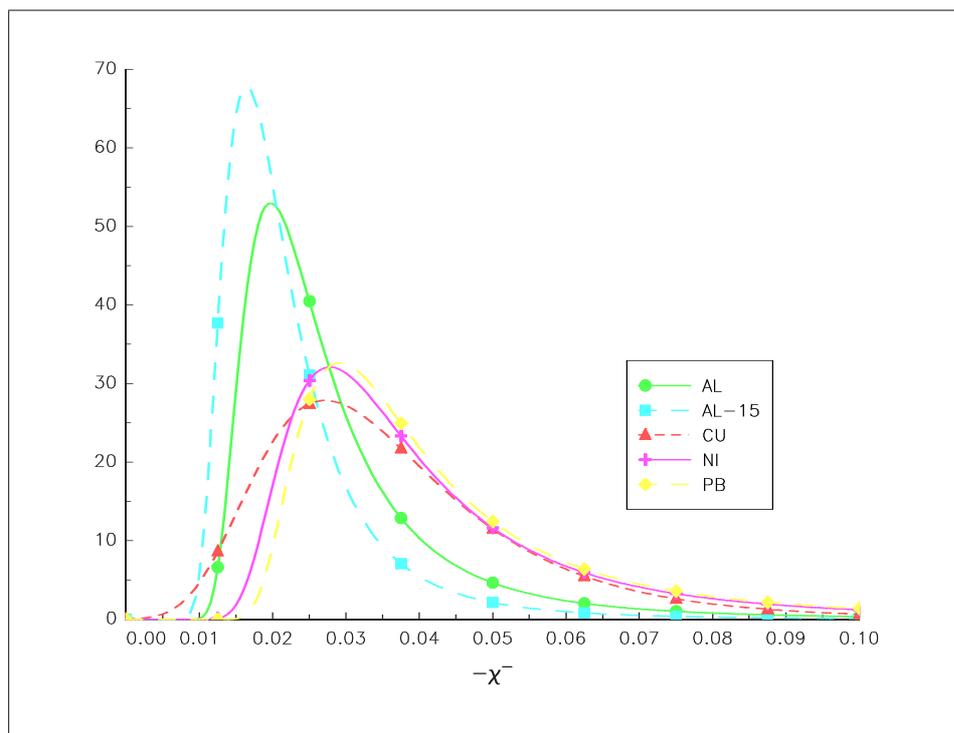
/*
```

Risk scales (daily variation) for long positions (in %)					
Waiting time (in years)	AL	AL-15	CU	NI	PB
5	-6.74	-4.82	-8.03	-11.01	-12.25
10	-8.57	-5.90	-9.35	-14.27	-16.35
25	-11.75	-7.68	-11.23	-20.02	-23.96
50	-14.91	-9.36	-12.76	-25.83	-32.03
75	-17.14	-10.49	-13.70	-29.97	-37.97
100	-18.92	-11.38	-14.39	-33.29	-42.85

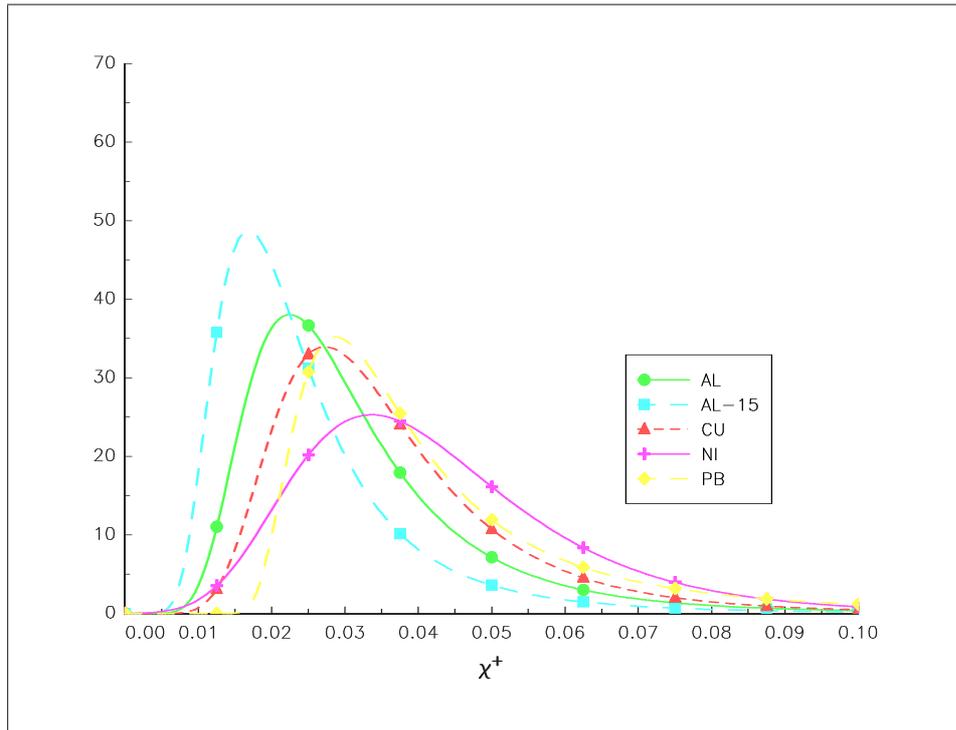
TABLE 9.1. Exemple de BOUYÉ et al. [2000] — Scénarios de crise pour les positions longues

Risk scales (daily variation) for short positions (in %)					
Waiting time (in years)	AL	AL-15	CU	NI	PB
5	6.96	5.79	7.53	8.46	11.13
10	8.35	7.10	8.82	9.59	14.65
25	10.46	9.20	10.73	11.10	21.07
50	12.32	11.12	12.34	12.26	27.76
75	13.52	12.39	13.36	12.95	32.64
100	14.43	13.38	14.12	13.45	36.63

TABLE 9.2. Exemple de BOUYÉ et al. [2000] — Scénarios de crise pour les positions courtes



Graphique 9.1. Distribution GEV des minimums



Graphique 9.2. Distribution GEV des maximums

```

**> pdfGEV
**
*/

proc pdfGEV(x,mu,sigma,xi);
  local y,e,pdf;

  x = (x - mu) ./ sigma;
  y = (1 + xi .* x);
  e = y .> 0;
  y = y .* e + __machepts * (1-e);
  pdf = (y^(-(1+xi)./xi)) .* exp( -(y^(-1./xi)) ) ./ sigma;
  pdf = pdf .* e;

  retp(pdf);
endp;

/*
**> cdfGEVi
**
*/

proc cdfGEVi(alpha,mu,sigma,xi);
  local cdfi;

  alpha = missex(missex(alpha,alpha .<= 0), alpha .>= 1);
  cdfi = mu - sigma.*(1 - (-ln(alpha))^(-xi))./xi;

  retp(cdfi);
endp;

```

```

/*
**> rndGEV
**
*/

proc rndGEV(mu,sigma,xi,r,c);
  local u;

  u = cdfGEVi(rndu(r,c),mu,sigma,xi);

  retp(u);
endp;

```

### Code GAUSS 45 (Estimation ML des paramètres de la distribution GEV)

```

/*
**> mleGEV
**
*/

proc (3) = mleGEV(data,sv);
  local mu0,sigma0,xi0;
  local theta,g,retcode,Logl;
  local mu,sigma,xi,ParNames;

  if sv == 0;
  sigma0 = sqrt(6/pi) * stdc(data);
  mu0 = meanc(data) - 0.5772 * sigma0;
  xi0 = 0.10;
  sv = mu0|sigma0|xi0;
  endif;

  _mleGEV_data = data;

  _opgdprc = &_mleGEV_gradient;
  {theta,LogL,g,retcode} = optmum(&_mleGEV_fn,sv);
  _opgdprc = 0;
  {mu,sigma,xi} = _mleGEV_parameters(theta);

  retp(mu,sigma,xi);
endp;

proc _mleGEV_fn(theta);
  local mu,sigma,xi,w,logl;
  {mu,sigma,xi} = _mleGEV_parameters(theta);
  w = 1 + xi*(_mleGEV_data-mu)/sigma;
  w = missex(w,w.<=0);
  logl = - ln(sigma) - (1+xi)*ln(w)/xi - w^(-1/xi);
  retp( -sumc(packr(logl)) );
endp;

proc _mleGEV_gradient(theta);
  local mu,sigma,xi,g;
  local w,Xc,w_xi,sigma_w,Xc_w;
  {mu,sigma,xi} = _mleGEV_parameters(theta);
  Xc = (_mleGEV_data-mu)/sigma;
  w = 1 + xi*Xc;
  w = missex(w,w.<=0);

```

```

w_xi = w^(-1/xi);
sigma_w = sigma * w;
Xc_w = Xc ./ w;
g = zeros(rows(_mleGEV_data),3);
g[:,1] = ((1+xi) - w_xi) ./ sigma_w;
g[:,2] = (g[:,1].*(_mleGEV_data-mu) - 1)/sigma;
g[:,3] = (1-w_xi) .* ( ln(w)/xi - Xc_w) / xi - Xc_w;
retp( -sumc(packr(g))' );
endp;

proc (3) = _mleGEV_parameters(theta);
local mu,sigma,xi;
mu = theta[1];
sigma = sqrt(theta[2]^2); /* positive parameter */
xi = sqrt(theta[3]^2); /* positive parameter */
retp(mu,sigma,xi);
endp;

```

## 9.2 Le cas bidimensionnel

Les scénarios bivariés de crise peuvent être vus comme la représentation d'une zone de défaillance. Soit  $\chi_1^+$  et  $\chi_2^+$  les statistiques du maximum des variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
\Pr(\chi_1^+ > \chi_1, \chi_2^+ > \chi_2) &= 1 - \Pr(\chi_1^+ \leq \chi_1) - \Pr(\chi_2^+ \leq \chi_2) + \Pr(\chi_1^+ \leq \chi_1, \chi_2^+ \leq \chi_2) \\
&= 1 - \mathbf{F}_1(\chi_1) - \mathbf{F}_2(\chi_2) + \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(\chi_1), \mathbf{F}_2(\chi_2)) \\
&= \overline{\mathbf{C}}(\mathbf{F}_1(\chi_1), \mathbf{F}_2(\chi_2))
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Soit  $\mathcal{T}$  le temps de retour. La zone de défaillance est représentée par

$$\left\{ (\chi_1, \chi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \overline{\mathbf{C}}(\mathbf{F}_1(\chi_1), \mathbf{F}_2(\chi_2)) < \frac{1}{\mathcal{T}} \right\} \tag{9.2}$$

Prenons l'exemple du CAC40 et du DowJones de COSTINOT, RONCALLI et TEILETCHE [2000]. En utilisant une copule Galambos et des marges GEV, nous pouvons définir la zone de défaillance à 5 ans (voir le graphique 9.3). Notons que pour un scénario de crise donné, nous pouvons facilement calculer le temps de retour implicite en utilisant la relation suivante :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{\Pr(\chi_1^+ > \chi_1, \chi_2^+ > \chi_2)} = \frac{1}{\overline{\mathbf{C}}(\mathbf{F}_1(\chi_1), \mathbf{F}_2(\chi_2))} \tag{9.3}$$

La structure de dépendance joue alors un rôle crucial pour le calcul de  $\mathcal{T}$ . Supposons une simulation de crise correspondant à une baisse simultanée de 10% du CAC40 et 10% du DowJones. Voici les temps de retour implicites unidimensionnels :

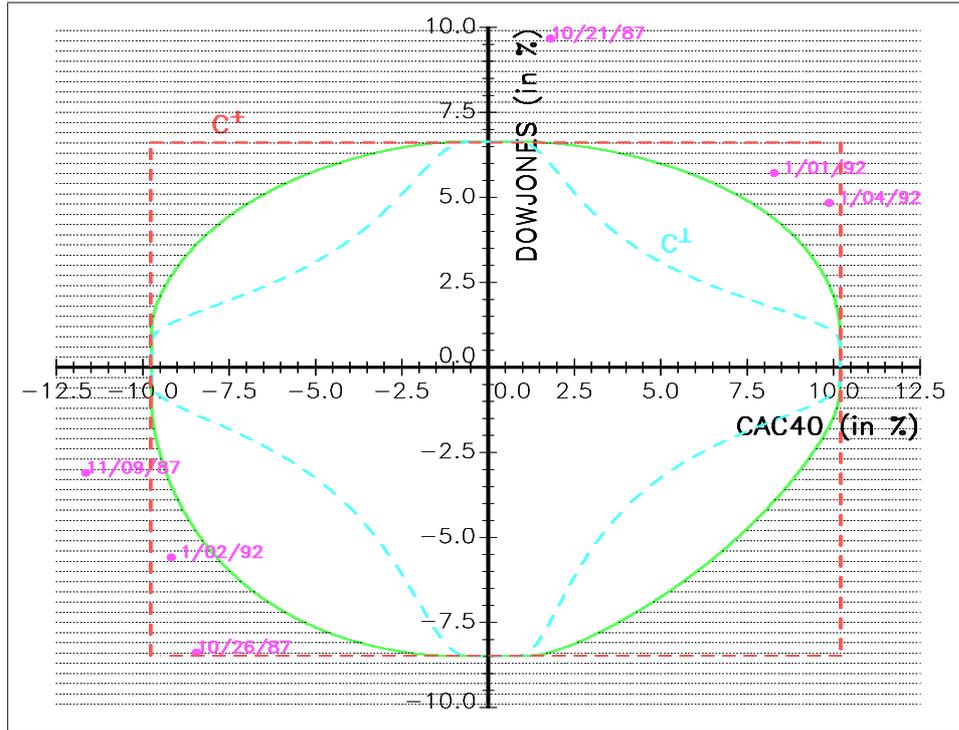
	CAC40	DowJones
$\mathcal{T}$	5.090	4.959

Si les deux actifs sont parfaitement dépendants, alors le temps de retour du couple (CAC40,DowJones) est le maximum des temps de retour unidimensionnels. Mais si la dépendance n'est pas parfaite, alors nous obtenons des temps de retour beaucoup plus élevés. Par exemple, nous obtenons un temps de retour égal à 304 années dans le cas de l'indépendance. En l'absence d'information sur la dépendance, les bornes minimales et maximales du temps de retour sont donc

$$5.090 \leq \mathcal{T} \leq 304.12$$

Un programme de stress-testing doit être un scénario extrême susceptible de se réaliser. Il est totalement absurde de faire des scénarios de crise présentant des temps de retour de plusieurs centaines d'années. En général, nous privilégions des temps de retour de 5 ans, 10 ans voire 25 ans. C'est pourquoi il est important d'avoir une estimation de la fonction de dépendance. Dans notre exemple, le temps de retour  $\mathcal{T}$  est égal à 10.779 années. Il est deux fois plus grand que la borne inférieure, mais beaucoup plus faible que les 304 années !

**Remarque 33** Vous trouverez le code **GAUSS** de l'exemple précédent dans RONCALLI [2000].



Graphique 9.3. Zone de défaillance pour le couple (CAC40,DowJones) et un temps de retour de 5 ans

### 9.3 Le cas multidimensionnel

Dans le cas multivarié, la zone de défaillance est définie par

$$\left\{ (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_1 = \mathbf{F}_1(\chi_1), \dots, u_n = \mathbf{F}_n(\chi_n), \bar{\mathbf{C}}(u_1, \dots, u_n) < \frac{1}{T} \right\} \quad (9.4)$$

avec

$$\bar{\mathbf{C}}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^n \left[ (-1)^i \sum_{\mathbf{v}(\mathbf{u}) \in \mathcal{Z}(n-i, n, 1)} \mathbf{C}(\mathbf{v}) \right] \quad (9.5)$$

et  $\mathcal{Z}(m, n, \epsilon)$  est l'ensemble correspondant à  $\{\mathbf{v} \in [0, 1]^n \mid v_i \in \{u_i, \epsilon\}, \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_{\{\epsilon\}}(v_i) = m\}$ . Il est alors possible de calculer le temps de retour pour un vecteur donné  $(\chi_1, \dots, \chi_n)$ . Nous avons alors

$$\mathcal{T}(\chi_1, \dots, \chi_n) = \frac{1}{\bar{\mathbf{C}}(\mathbf{F}_1(\chi_1), \dots, \mathbf{F}_n(\chi_n))} \quad (9.6)$$

Voici quelques représentations explicites de la copule  $\bar{\mathbf{C}}$ . Dans le cas  $n = 2$ , nous avons

$$\bar{\mathbf{C}}(u_1, u_2) = \mathbf{1} - u_1 - u_2 + \mathbf{C}(u_1, u_2) \quad (9.7)$$

Pour  $n = 3$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}(u_1, u_2, u_3) &= \mathbf{1} - u_1 - u_2 - u_3 + \\ &\quad \mathbf{C}(u_1, u_2) + \mathbf{C}(u_1, u_3) + \mathbf{C}(u_2, u_3) - \\ &\quad \mathbf{C}(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \quad (9.8)$$

BOUYÉ et al. [2000] utilise la copule suivante pour modéliser la dépendance des rendements du LME :

$$\mathbf{C}^N(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \exp \left[ - \left( \left( \tilde{u}_1^{\theta_2} + \tilde{u}_2^{\theta_2} \right)^{\theta_1/\theta_2} + \tilde{u}_4^{\theta_1} \right)^{1/\theta_1} - \tilde{u}_3 - \tilde{u}_5 \right] \quad (9.9)$$

## Code GAUSS 46 (Distribution et densité de la copule $C^N$ )

```

/*
**> cdfCopulaBDNRR
**
*/

proc (1) = cdfCopulaBDNRR(u1,u2,u3,u4,u5,theta1,theta2);
    retp( cdfCopulaGumbel3(u1,u2,u4,theta1,theta2) .* u3 .* u5 );
endp;

/*
**> pdfCopulaBDNRR
**
*/

proc (1) = pdfCopulaBDNRR(u1,u2,u3,u4,u5,theta1,theta2);
    retp( pdfCopulaGumbel3(u1,u2,u4,theta1,theta2) );
endp;

/*
**> cdfCopulaGumbel3
**
*/

proc (1) = cdfCopulaGumbel3(u1,u2,u3,theta1,theta2);
    local cdf;
    u1 = -ln(u1); u2 = -ln(u2); u3 = -ln(u3);
    cdf = u1^theta2 + u2^theta2;
    cdf = exp( - (cdf^(theta1./theta2) + u3^theta1)^(1./theta1) );
    retp(cdf);
endp;

/*
**> pdfCopulaGumbel3
**
*/

proc pdfCopulaGumbel3(u1,u2,u3,theta1,theta2);
    local pdf,A,B,beta1,beta2,beta12;
    pdf = 1./(u1.*u2.*u3);
    u1 = -ln(u1); u2 = -ln(u2); u3 = -ln(u3);
    A = u1^theta2 + u2^theta2;
    B = A^(theta1./theta2) + u3^theta1;
    beta1 = 1./theta1;
    beta2 = 1./theta2;
    beta12 = theta1./theta2;
    pdf = pdf .* exp( - (B^(1./theta1)) );
    pdf = pdf .* (u1.*u2)^(theta2-1) .* u3^(theta1-1);
    pdf = pdf .* A^(beta12-2) .* B^(beta1-2);
    pdf = pdf .* ( A^beta12 .* B^(2./theta1-1) +
        (theta2-theta1) .* B^beta1 +
        (theta1-1) .* A^beta12 .* B^(1./theta1-1) +
        (theta1-1) .* (2*theta1-1) .* B^(-1) .* A^beta12 +
        (theta1-1) .* (theta2 - theta1) );

    retp(pdf);
endp;

```

Considérons un premier scénario de crise :

$$\chi^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Le temps de retour associé avec la copule estimée  $\mathbf{C}^{\mathbb{N}}$  de BOUYÉ et al. [2000] est égale à 209 années. Si nous supposons que la copule est respectivement  $\mathbf{C}^{\perp}$  et  $\mathbf{C}^+$ , le temps de retour devient 2317 et 3 années. Considérons un deuxième scénario de crise :

$$\chi^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.03 \\ 0.03 \\ 0.01 \\ 0.10 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons  $T_{(2)}^{\mathbb{N}} = 27$ ,  $T_{(2)}^{\perp} = 34$ , and  $T_{(2)}^+ = 4$ .

**Remarque 34** *Ces deux exemples montrent qu'il est possible de comparer deux scénarios de crise en utilisant la notion de temps de retour. Si nous faisons l'hypothèse que la 'bonne' copule est  $\mathbf{C}^{\mathbb{N}}$ , alors le premier scénario de crise est plus sévère que le second.*

**Remarque 35** *Il est complètement absurde de construire des scénarios de crise multidimensionnels à partir des scénarios de crise unidimensionnels. Par exemple, si nous collectons les scénarios de crise unidimensionnels de temps de retour 5 ans, nous obtenons*

$$\chi^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.0696 \\ 0.0579 \\ 0.0753 \\ 0.0846 \\ 0.1113 \end{bmatrix}$$

Les temps de retour implicites sont alors  $T_{(3)}^{\mathbb{N}} = 49939$ ,  $T_{(3)}^{\perp} = 3247832$  and  $T_{(3)}^+ = 5$  !

**Remarque 36** *L'ensemble des stress scénarios unidimensionnels et multidimensionnels est obtenu avec le programme GAUSS suivant :*

```
new;
library copula,pgraph,optmum;
CopulaSet;

cls;

dataset = 'lme';
let vars = AL AL-15 CU NI PB;

data = ln(LoadData(dataset,vars));
r = data - lag1(data);

varphi = 44; /* size of blocks (in trading days) */
T = 5|10|25|50|75|100; /* Return time (in years) */

x = seqa(0,0.0005,501);

uMax = zeros(rows(r)/varphi,cols(r));
uMin = zeros(rows(r)/varphi,cols(r));
thetaMax = zeros(3,cols(r));
```

```

thetaMin = zeros(3,cols(r));

__output = 0;
i = 1;
do until i > cols(r);

    rndseed 123;
    block = reshape(r[. ,i],rows(r)/varphi,varphi)';
    Max = maxc(block); Min = -minc(block);
    {mu,sigma,xi} = mleGEV(Max,0);
    thetaMax[. ,i] = mu|sigma|xi;
    uMax[. ,i] = cdfGEV(Max,mu,sigma,xi);

    {mu,sigma,xi} = mleGEV(Min,0);
    thetaMin[. ,i] = mu|sigma|xi;
    uMin[. ,i] = cdfGEV(Min,mu,sigma,xi);

    i = i + 1;
endo;

T = 250*T / varphi; /* Return time in trading days */
alpha = 1 - 1./T;
stressMin = -100*cdfGEVi(alpha,thetaMin[1,.],thetaMin[2,.],thetaMin[3,.]);
stressMax = 100*cdfGEVi(alpha,thetaMax[1,.],thetaMax[2,.],thetaMax[3,.]);

proc computeTheta(theta);
    local goodtheta;
    goodtheta = zeros(2,1);
    goodtheta[1] = 1 + sqrt(theta[1]^2);
    goodtheta[2] = goodtheta[1] + sqrt(theta[2]^2);
    retp(goodtheta);
endp;

proc mlProc(theta);
    theta = computeTheta(theta);
    retp( -sumc(
        ln(pdfCopulaBDNRR(uMax[. ,1],uMax[. ,2],uMax[. ,3],uMax[. ,4],uMax[. ,5],
            theta[1],theta[2]))
    ) );
endp;

sv = 0.5|1;
{theta,f,g,retcode} = optmum(&mlProc,sv);
thetaCopula = computeTheta(theta);

fn Copula1(u) = cdfCopulaBDNRR(u[1],u[2],u[3],u[4],u[5],thetaCopula[1],thetaCopula[2]);
fn Copula2(u) = prodc(u);
fn Copula3(u) = minc(u);

let StressScenario[3,5] = 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05
                        0.02 0.03 0.03 0.01 0.10
                        0.0696 0.0579 0.0753 0.0846 0.1113;
StressScenario[3,.] = stressMax[1,.]/100;

ReturnTime = zeros(3,3);
Copula = &Copula1 | &Copula2 | &Copula3;

```

```

i = 1;
do until i > rows(StressScenario);
  u = cdfGEV(StressScenario[i, .], thetaMax[1, .], thetaMax[2, .], thetaMax[3, .])';
  j = 1;
  do until j > rows(Copula);
    ReturnTime[i, j] = varphi ./ (250 * _SurvivorCopula(Copula[j], u));
    j = j + 1;
  endo;

  i = i + 1;
endo;

cls; format 8,4;

output file = chap9-4.out reset;

print thetaMax;
print stressMax;

print thetaMin;
print stressMin;

print thetaCopula;
print returnTime;

output off;

```

## Références

- [1] BOUYÉ, E., V. DURRLEMAN, A. NIKEGHBALI, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000], Copulas for finance — a reading guide and some applications, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [2] COSTINOT, A., T. RONCALLI et J. TEILETCHE [2000], Revisiting the dependence between financial markets with copulas, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [3] RONCALLI, T [2000], La Théorie des Extrêmes et la Gestion des Risques de Marché, *notes de cours ENSAI 3<sup>ème</sup> année*

# 10

## Modélisation des survies multidimensionnelles

Les éléments de ce chapitre sont empruntés au document de travail de GEORGES et al. [2001].

### 10.1 Copules de survie et fonction de survie multivariée

Soit  $\check{\mathbf{C}}$  une fonction copule. Nous pouvons définir une fonction de survie multivariée  $\mathbf{S}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{S}(t_1, \dots, t_n) = \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t_1), \dots, \mathbf{S}_n(t_n)) \quad (10.1)$$

où  $(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n)$  sont les fonctions de survie marginales. Comme pour les distributions, il existe un théorème de représentation canonique pour la fonction  $\mathbf{S}$ .

**Théorème 21** *Soit  $\mathbf{S}$  une fonction de survie dont les marges sont  $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_n$ . Alors  $\mathbf{S}$  admet une représentation copule :*

$$\mathbf{S}(t_1, \dots, t_n) = \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t_1), \dots, \mathbf{S}_n(t_n)) \quad (10.2)$$

La copule  $\check{\mathbf{C}}$  est unique si les marges sont continues.

Dans le cas  $n = 2$ , NELSEN [1999] prouve ce théorème en partant des distributons. Soit  $\mathbf{C}$  la copule de la distribution bivariée des temps de survie  $(T_1, T_2)$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t_1, t_2) &= \Pr\{T_1 > t_1, T_2 > t_2\} \\ &= 1 - \mathbf{F}_1(t_1) - \mathbf{F}_2(t_2) + \mathbf{F}(t_1, t_2) \\ &= \mathbf{S}_1(t_1) + \mathbf{S}_2(t_2) - 1 + \mathbf{C}(1 - \mathbf{S}_1(t_1), 1 - \mathbf{S}_2(t_2)) \\ &= \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t_1), \mathbf{S}_2(t_2)) \end{aligned} \quad (10.3)$$

avec

$$\check{\mathbf{C}}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_2) \quad (10.4)$$

**Exercice 6** *Montrer que  $\check{\mathbf{C}}$  est une fonction copule.*

Dans le cas général, GEORGES et al. [2001] montrent les deux théorèmes suivants :

**Théorème 22** *La relation entre les copules  $\mathbf{C}$  et  $\check{\mathbf{C}}$  est donnée par*

$$\check{\mathbf{C}}(u_1, \dots, u_n) = \bar{\mathbf{C}}(1 - u_1, \dots, 1 - u_n) \quad (10.5)$$

avec

$$\bar{\mathbf{C}}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^n \left[ (-1)^i \sum_{\mathbf{v}(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{Z}(n-i, n, 1)} \mathbf{C}(v_1, \dots, v_n) \right] \quad (10.6)$$

où  $\mathcal{Z}(m, n, \epsilon)$  est l'ensemble  $\{\mathbf{v} \in [0, 1]^n \mid v_i \in \{u_i, \epsilon\}, \sum_{i=1}^n \mathcal{X}_{\{\epsilon\}}(v_i) = m\}$ .

**Théorème 23** La relation entre les copules  $\check{\mathbf{C}}$  et  $\mathbf{C}$  est donnée par

$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=0}^n \left[ (-1)^i \sum_{\mathbf{v}(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{Z}(n-i, n, 0)} \check{\mathbf{C}}(1 - v_1, \dots, 1 - v_n) \right] \quad (10.7)$$

**Exercice 7** Montrer que pour  $n = 3$  et  $n = 4$ , nous avons

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{C}}(u_1, u_2, u_3) &= u_1 + u_2 + u_3 - 2 + \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_2) + \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_3) + \\ &\quad \mathbf{C}(1 - u_2, 1 - u_3) - \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_3) \end{aligned} \quad (10.8)$$

et

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{C}}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 3 + \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_2) + \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_3) + \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_4) + \\ &\quad \mathbf{C}(1 - u_2, 1 - u_3) + \mathbf{C}(1 - u_2, 1 - u_4) + \mathbf{C}(1 - u_3, 1 - u_4) - \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_3) \\ &\quad - \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_4) - \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_3, 1 - u_4) - \mathbf{C}(1 - u_2, 1 - u_3, 1 - u_4) \\ &\quad + \mathbf{C}(1 - u_1, 1 - u_2, 1 - u_3, 1 - u_4) \end{aligned} \quad (10.9)$$

**Code GAUSS 47 (Distribution de la copule de survie  $\check{\mathbf{C}}$ )**

```

/*
**> cdfSurvivalCopula
**
*/

proc cdfSurvivalCopula(cdfCopula,u);
  local C,m,j;
  if cols(u) == 1;
    C = _SurvivorCopula(cdfCopula,1-u);
  else;
    m = rows(u);
    C = zeros(m,1);
    j = 1;
    do until j > m;
      C[j] = _SurvivorCopula(cdfCopula,1-u[j,.]');
      j = j + 1;
    endo;
  endif;
  retp(C);
endp;

proc _SurvivorCopula(cdfCopula,u);
  local cdfCopula:proc;
  local n,C,i,j,cb,e,eij;
  n = rows(u);
  e = ones(n,1);
  C = 1;
  i = 1;
  do until i > n;
    cb = _combination(n,i);

```

```

j = 1;
do until j > rows(cb);
    eij = e;
    eij[cb[j,.]'] = submat(u,cb[j,.]',1);
    C = C + (-1)^i * cdfCopula(eij);
    j = j + 1;
endo;
i = i + 1;
endo;
retp(C);
endp;

proc _Combination(n,r);
    local nComb,xComb,tal,Level2,i2,j2,tal2,n2,r2,xComb2;
    nComb = round( exp( ln( prodc(seqa(n,-1,r)) ) - lnfact(r) ) );
    xComb = miss( zeros(nComb,r),0 );
    tal = {};
    {j2,xComb2} = _CombNextLevel(1,1,1,tal,n,r,xComb);
    retp(xComb2);
endp;

proc (2) = _CombNextLevel(Level,i,j,tal,n,r,xComb);
    local Level2,i2,tal2,n2,r2;
    if Level <= r;
        do until i > (n-r+Level);
            { j,xComb } = _CombNextLevel( Level+1,i+1,j,tal~i,n,r,xComb );
            i = i + 1;
        endo;
    else;
        xComb[j,.] = tal;
        j = j + 1;
        retp( j,xComb );
    endif;
    retp( j,xComb );
endp;

```

Nous donnons les principaux résultats qui sont énoncés dans GEORGES et al. [2001].

**Définition 17** Une copule est dite ‘radially symmetric’ ou RS si et seulement si  $\check{C} = C$ .

**Exercice 8** Montrer que  $C^-$ ,  $C^\perp$  et  $C^+$  sont des copules RS.

**Exercice 9** Montrer que les copules Frank, Normale et Student sont des copules RS.

**Exercice 10** Montrer que les copules Gumbel, Clayton et FGM ne sont pas des copules RS.

**Exercice 11** Pourquoi une copule EV absolument continue (à l’exception de  $C^\perp$ ) n’est pas (enfin presque toujours) une copule RS ?

**Théorème 24** Dans le cas bivarié, si  $C_1 \succ C_2$  alors  $\check{C}_1 \succ \check{C}_2$ .

**Exercice 12** Démontrer ce résultat.

**Remarque 37** Ce théorème ne se généralise pas au cas  $n > 2$  (voir le contre-exemple de GEORGES et al. [2001]).

**Théorème 25** Nous avons  $\lambda_U \langle \check{C} \rangle = \lambda_L \langle C \rangle$  et  $\lambda_L \langle \check{C} \rangle = \lambda_U \langle C \rangle$ .

## 10.2 Les copules Frailty

Les modèles frailty ont été popularisés par OAKES [1989]. L'idée principale est d'introduire la dépendance entre les temps de survie  $T_1, \dots, T_n$  en utilisant une variable aléatoire  $W$ . Etant donné la variable frailty  $W$  de distribution  $\mathbf{G}$ , les temps de survie sont supposés indépendants :

$$\Pr \{T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n \mid W = w\} = \prod_{i=1}^n \Pr \{T_i > t_i \mid W = w\} \quad (10.10)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t_1, \dots, t_n \mid w) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{S}_i(t_i \mid w) \\ &= \chi_1^w(t_1) \times \chi_2^w(t_2) \times \dots \times \chi_n^w(t_n) \end{aligned} \quad (10.11)$$

où  $\chi_i(t)$  est la fonction de survie de base dans un modèle à risque proportionnel :

$$\chi_i(t) = \exp(-\Lambda_i(t)) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(s) ds\right) \quad (10.12)$$

La fonction de survie non conditionnelle est alors

$$\mathbf{S}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}[\mathbf{S}(t_1, \dots, t_n \mid w)] \quad (10.13)$$

Nous avons donc

$$\mathbf{S}(t_1, \dots, t_n) = \int \prod_{i=1}^n [\chi_i(t_i)]^w d\mathbf{G}(w) \quad (10.14)$$

Afin d'obtenir une représentation plus intéressante des modèles frailty, nous avons besoin du théorème suivant de MARSHALL and OLKIN [1988].

**Théorème 26 (Marshall et Olkin [1988, Théorème 2.1, p. 835])** *Soient  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$   $n$  fonctions de distribution univariée, et  $\mathbf{G}$  une fonction de distribution de dimension  $n$  telle que  $\bar{\mathbf{G}}(0, \dots, 0) = 1$ . Notons les transformées de Laplace de  $\mathbf{G}$  et des marges  $\mathbf{G}_n$  respectivement par  $\psi$  et  $\psi_n$ . Soit  $\mathbf{C}$  une copule. Si  $\mathbf{H}_n(x) = \exp(-\psi_n^{-1}(\mathbf{F}_n(x)))$ , alors*

$$\mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) = \int \dots \int \mathbf{C}([\mathbf{H}_1(x_1)]^{w_1}, \dots, [\mathbf{H}_n(x_n)]^{w_n}) d\mathbf{G}(w_1, \dots, w_n) \quad (10.15)$$

est une fonction de distribution multidimensionnelle de marges  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_n$ .

Considérons le cas particulier où les marges  $\mathbf{G}_n$  sont les mêmes,  $\mathbf{G}$  est la borne haute de Fréchet et  $\mathbf{C}$  est la copule produit  $\mathbf{C}^\perp$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_1, \dots, x_n) &= \int \prod_{i=1}^n [\mathbf{H}_i(x_i)]^{w_1} d\mathbf{G}_1(w_1) \\ &= \int \exp\left(-w_1 \sum_{i=1}^n \psi_1^{-1}(\mathbf{F}_i(x_i))\right) d\mathbf{G}_1(w_1) \\ &= \psi_1(\psi_1^{-1}(\mathbf{F}_1(x_1)) + \dots + \psi_1^{-1}(\mathbf{F}_n(x_n))) \end{aligned} \quad (10.16)$$

La copule correspondante est donc

$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_n) = \psi_1(\psi_1^{-1}(u_1) + \dots + \psi_1^{-1}(u_n)) \quad (10.17)$$

C'est un cas particulier d'une copule Archimédienne où le générateur  $\varphi$  est l'inverse d'une transformée de Laplace. Nous pouvons donc définir les fonctions de survie frailty de la façon suivante :

**Définition 18** La représentation canonique d'une fonction de survie frailty est

$$\mathbf{S}(t_1, \dots, t_N) = \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t_1), \dots, \mathbf{S}_N(t_N)) \quad (10.18)$$

où  $\check{\mathbf{C}}$  est une copule Frailty, c'est-à-dire une copule Archimédienne dont le générateur est l'inverse de la transformée de Laplace de la distribution de la variable aléatoire frailty  $W$ . Plus généralement, le générateur est l'inverse d'une transformée de Laplace.

**Exercice 13** Montrer que la copule Clayton est une copule Frailty dont la transformée de Laplace est celle d'une variable aléatoire Gamma :  $\psi(x) = (1+x)^{-1/\theta}$ .

**Exercice 14** Montrer que la copule Gumbel est une copule Frailty dont la transformée de Laplace est celle d'une variable aléatoire positive stable :  $\psi(x) = \exp(-x^{1/\theta})$ .

### 10.3 Inférence statistique

Ce sont les mêmes techniques que celles du chapitre 7. Néanmoins, elles peuvent être un peu plus difficiles à mettre en place à cause des censures et des troncatures (voir GEORGES et al. [2001] pour un survey).

### 10.4 Les modèles de compétition de risques

Considérons  $n$  temps de défaillance latents  $T_1, \dots, T_n$ . Dans un modèle de compétition de risques, le temps de défaillance  $\tau$  est définie par

$$\tau = \min(T_1, \dots, T_n) \quad (10.19)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\tau(t) &= \Pr\{\min(T_1, \dots, T_n) \geq t\} \\ &= \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t), \dots, \mathbf{S}_n(t)) \end{aligned} \quad (10.20)$$

où  $\check{\mathbf{C}}$  est la copule de survie des temps de survie  $T_1, \dots, T_n$ . Concernant la distribution et la densité de  $\tau$ , nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\tau(t) &= 1 - \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t), \dots, \mathbf{S}_n(t)) \\ &= 1 - \check{\mathbf{C}}(1 - \mathbf{F}_1(t), \dots, 1 - \mathbf{F}_n(t)) \end{aligned} \quad (10.21)$$

et

$$f_\tau(t) = \sum_{i=1}^n \partial_i \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t), \dots, \mathbf{S}_n(t)) \times f_i(t) \quad (10.22)$$

Dans le cas où les temps de survie sont *i.i.d.*, nous retrouvons les résultats bien connus

$$\mathbf{F}_\tau(t) = 1 - [1 - \mathbf{F}_1(t)]^n \quad (10.23)$$

et

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &= \sum_{i=1}^n \left( \underbrace{[1 - \mathbf{F}_1(t)] \times \dots \times [1 - \mathbf{F}_1(t)]}_{n-1 \text{ fois}} \right) f_1(t) \\ &= n [1 - \mathbf{F}_1(t)]^{n-1} f_1(t) \end{aligned} \quad (10.24)$$

**Exemple 20** Nous considérons des temps de survie  $T_i \sim \text{Weibull}(\lambda_i^0, \gamma_i)$ . Nous avons

$$\mathbf{S}_i(t) = \exp(-\lambda_i^0 t^{\gamma_i}) \quad (10.25)$$

Le taux de risque  $\lambda_i(t)$  est donc  $\lambda_i^0 \gamma_i t^{\gamma_i-1}$  et l'expression de la densité est  $f_i(t) = \lambda_i^0 \gamma_i t^{\gamma_i-1} e^{-\lambda_i^0 t^{\gamma_i}}$ . Nous remarquons que le taux de risque est croissant lorsque  $\gamma > 1$  et décroissant lorsque  $0 < \gamma < 1$ . Si  $\gamma$  est égal à 1, le taux de risque est constant et les temps de survie sont des temps de survie exponentiels. Si nous supposons que la copule de survie est la copule *Gumbel-Hougaard* de paramètre  $\theta \geq 1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\tau(t) &= \exp\left(-\left((-\ln \mathbf{S}_1(t))^\theta + \dots + (-\ln \mathbf{S}_n(t))^\theta\right)^{1/\theta}\right) \\ &= \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i^0 t^{\gamma_i})^\theta\right)^{1/\theta}\right) \end{aligned} \quad (10.26)$$

et

$$f_\tau(t) = \left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i^0 t^{\gamma_i})^\theta\right)^{1/\theta-1} \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i t^{-1} (\lambda_i^0 t^{\gamma_i})^\theta\right) \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i^0 t^{\gamma_i})^\theta\right)^{1/\theta}\right) \quad (10.27)$$

Lorsque les temps de survie sont *i.i.d.*,  $\tau$  est un temps de survie de type *Weibull*

$$\tau \sim \text{Weibull}\left(n^{1/\theta} \lambda^0, \gamma\right) \quad (10.28)$$

GEORGES et al. [2001] ont étendu les résultats précédents pour toutes les statistiques d'ordre.

**Théorème 27** La fonction de survie de la statistique d'ordre  $T_{i:n}$  ( $i \leq n$ ) est donnée par la formule suivante

$$\mathbf{S}_{i:n}(t) = 1 - \mathbf{F}_{i:n}(t) \quad (10.29)$$

avec

$$\mathbf{F}_{i:n}(t) = \sum_{k=i}^n \left[ \sum_{l=i}^k (-1)^{k-l} \binom{k}{l} \sum_{\mathbf{v}(\mathbf{F}_1(t), \dots, \mathbf{F}_n(t)) \in \mathcal{Z}(n-k, n, 1)} \mathbf{C}(v_1, \dots, v_n) \right] \quad (10.30)$$

**Exercice 15** Montrer que

$$\mathbf{F}_{1:n}(t) = 1 - \check{\mathbf{C}}(\mathbf{S}_1(t), \dots, \mathbf{S}_n(t)) \quad (10.31)$$

et

$$\mathbf{F}_{n:n}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(t), \dots, \mathbf{F}_n(t)) \quad (10.32)$$

**Code GAUSS 48 (Distribution des statistiques d'ordre  $\mathbf{F}_{i:n}(t)$ )**

```
/*
**> cdfOrderStatistic
**
*/

proc (1) = cdfOrderStatistic(cdfCopula, cdfs, t, i);
    local cdfCopula:proc;
    local n, x, e, cdf, k, cb, alpha, j, u;

    n = rows(cdfs); x = zeros(rows(t), n);
    j = 1;
```

```

do until j > n;
  local cdfProc; cdfProc = cdfs[j]; local cdfProc:proc;
  x[.,j] = cdfProc(t);
  j = j + 1;
endo;

e = ones(rows(t),n);
cdf = 0;
k = i;
do until k > n;
  cb = _combination(n,k);
  alpha = _cdfOrderStatistic(k,i);
  j = 1;
  do until j > rows(cb);
    u = e;
    u[.,cb[j,.]] = submat(x,0,cb[j,.]);
    cdf = cdf + alpha .* cdfCopula(u);
    j = j + 1;
  endo;
  k = k + 1;
endo;

retp(cdf);
endp;

proc _cdfOrderStatistic(k,i);
  local alpha,l;
  alpha = 0;
  l = i;
  do until l > k;
    alpha = alpha + (-1)^(k-l) .* k! ./ (k-l)! ./ l! ;
    l = l + 1;
  endo;
  retp(alpha);
endp;

```

Pour illustrer cette procédure, nous reportons ci-dessous le programme **GAUSS** qui permet de reproduire le graphique 10 de GEORGES et al. [2001] représentant la fonction de densité de différentes statistiques d'ordre  $T_{i:n}$  lorsque la copule est Cook-Johnson (c'est-à-dire une copule Clayton multidimensionnelle) et les temps de survie sont  $\mathcal{LN}(0, 1)$ .

```

new;
library copula,pgraph,optmum;
CopulaSet;

declare matrix _order_i,_order_n,_order_theta;

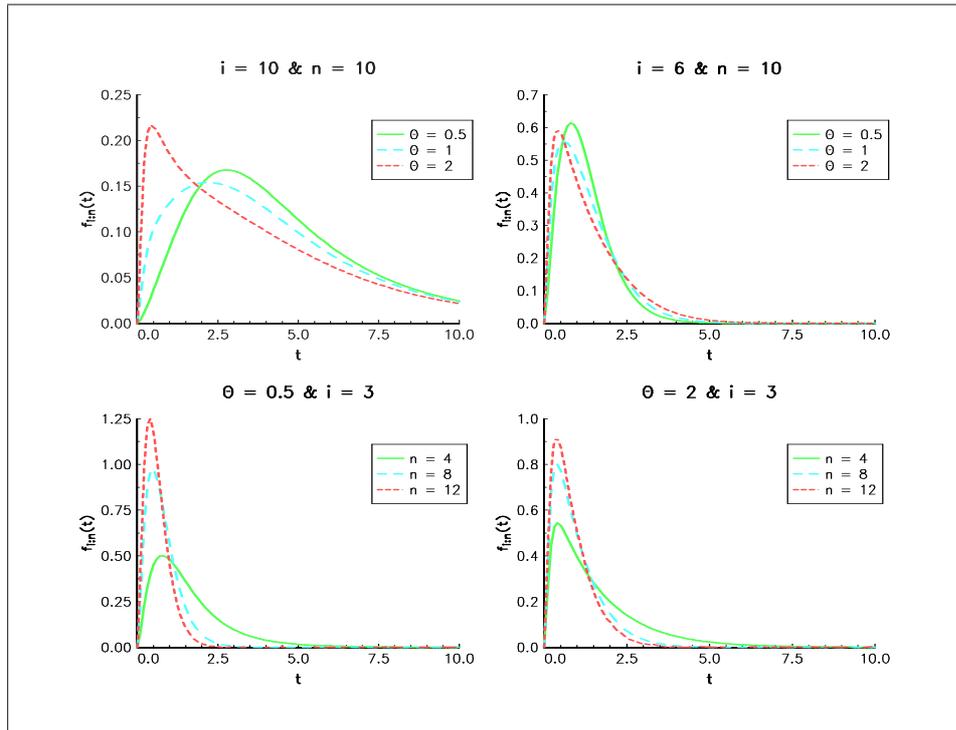
t = seqa(0.001,1/10,151);
fn F(x) = cdfLN(x,0,1);

proc cdfCopula(u);
  retp( (sumc(u'^(-_order_theta)) - cols(u) + 1)^(-1/_order_theta) );
endp;

proc pdfOrderStatistic(theta,t,i,n);
  local pdf,j;

  pdf = zeros(rows(t),rows(theta));

```



Graphique 10.1. Density function of order statistics  $T_{i:n}$  — Graphique 10 de GEORGES et al. [2001]

```

_order_i = i;
_order_n = n;

j = 1;
do until j > rows(theta);
    _order_theta = theta[j];
    pdf[.,j] = gradp2(&_pdfOrderStatistic,t);
    j = j + 1;
endo;

retp(pdf);
endp;

proc _pdfOrderStatistic(t);
    retp( cdfOrderStatistic(&cdfCopula,&F .* ones(_order_n,1),t,_order_i) );
endp;

theta = 0.5|1|2;
pdf1 = pdfOrderStatistic(theta,t,10,10);
pdf2 = pdfOrderStatistic(theta,t,6,10);
theta = 0.5;
pdf3 = pdfOrderStatistic(theta,t,3,4) ~pdfOrderStatistic(theta,t,3,8) ~
    pdfOrderStatistic(theta,t,3,12);
theta = 2;
pdf4 = pdfOrderStatistic(theta,t,3,4) ~pdfOrderStatistic(theta,t,3,8) ~
    pdfOrderStatistic(theta,t,3,12);

graphset;
begwind;
window(2,2,0);

```

```

_pdate = ''; _pnum = 2; _pframe = 0;
_pltype = 6|1|3; _plwidth = 5;
_paxht = 0.20; _pnumht = 0.20; _ptitlht = 0.25;

fonts('simplex simgrma');

xlabel('\214t');
ylabel('\214f]i:n(t)');
xtics(0,10,2.5,5);

setwind(1);
yticks(0,0.25,0.05,2);
title('\214i = 10 & n = 10');
_plegstr = '\202Q\201 = 0.5\000\202Q\201 = 1\000\202Q\201 = 2';
_plegctl = {2 5 6.5 4};
xy(t,pdf1);

setwind(2);
yticks(0,0.7,0.1,2);
title('\214i = 6 & n = 10');
_plegstr = '\202Q\201 = 0.5\000\202Q\201 = 1\000\202Q\201 = 2';
_plegctl = {2 5 6.5 4};
xy(t,pdf2);

setwind(3);
yticks(0,1.25,0.25,2);
title('\214\202Q\201 = 0.5 & i = 3');
_plegstr = 'n = 4\000n = 8\000n = 12';
_plegctl = {2 5 6.5 4};
xy(t,pdf3);

setwind(4);
yticks(0,0.9,0.2,2);
title('\214\202Q\201 = 2 & i = 3');
_plegstr = 'n = 4\000n = 8\000n = 12';
_plegctl = {2 5 6.5 4};
xy(t,pdf4);

graphprt('-c=1 -cf=chap10-2.ps');

endwind;

```

## Références

- [1] GEORGES, P., A-G. LAMY, E. NICOLAS, G. QUIBEL et T. RONCALLI [2001], Multivariate survival modelling : a unified approach with copulas, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [2] HOUGAARD, P. [1986], Survival models for heterogeneous populations derived from stable distributions, *Biometrika*, **73(2)**, 387-396
- [3] HOUGAARD, P. [1986], A class of multivariate failure time distributions, *Biometrika*, **73(3)**, 671-678
- [4] HUTCHINSON, T.P. and C.D. LAI [1990], Continuous Bivariate Distributions — Emphasising Applications, Rumsby Scientific Publishing, Adelaide
- [5] HUTCHINSON, T.P. and C.D. LAI [1991], The Engineering Statistician's Guide to Continuous Bivariate Distributions, Rumsby Scientific Publishing, Adelaide

- [6] MARSHALL, A.W. and I. OLKIN [1988], Families of multivariate distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 834-841
- [7] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, *Lectures Notes in Statistics*, **139**, Springer Verlag, New York
- [8] OAKES, D. [1989], Bivariate survival models induced by frailties, *Journal of the American Statistical Association*, **84**, 487-493
- [9] OAKES, D. [1994], Multivariate survival distributions, *Journal of Nonparametric Statistics*, **3**, 343-354

# 11

## Application au risque de crédit

Ce chapitre utilise les travaux du document de travail “Credit risk modelling with copulas” de COUTANT, MARTINEU, MESSINES, RIBOULET et RONCALLI [2001].

### 11.1 Le modèle **CreditMetrics**

Ce modèle est une approche de migration de crédit (*credit migration approach*) et la dépendance entre les défauts est introduite en spécifiant les probabilités de transition de rating entre les crédits.

#### 11.1.1 La distribution de probabilité de transition

Soit  $\pi = (\pi_{i,j})$  la matrice de transition de rating d’un état de la nature à un autre. Par exemple, la table 11.1 est la matrice de transition à un an S&P considéré par KAVVATHAS [1999]. Nous notons  $\mathcal{R}$  l’ensemble des huit états de la nature :

$$\mathcal{R} = \{\text{AAA}, \text{AA}, \text{A}, \text{BBB}, \text{BB}, \text{B}, \text{CCC}, \text{D}\} \quad (11.1)$$

Nous introduisons l’ensemble  $\mathcal{R}^* = \{1, \dots, 8\}$  avec la correspondance suivante :  $1 \rightarrow \text{D}$ ,  $2 \rightarrow \text{CCC}$ ,  $3 \rightarrow \text{B}$ , etc. ( $8 \rightarrow \text{AAA}$ ). Pour simplifier l’analyse, nous considérons une échelle de temps discrète  $t = 0, 1, 2, \dots$  et nous notons  $\pi(s, i; t, j)$  la probabilité de passer du rating  $i$  à la date  $s$  au rating  $j$  à la date  $t$ . Nous avons

$$\pi(s, i; t, j) = \mathbf{e}_i^\top \pi^{(t-s)} \mathbf{e}_j \quad (11.2)$$

La distribution de probabilité de la variable aléatoire  $R(s, i; t)$  — qui représente la valeur du rating à la date  $t$  sachant que le rating à la date  $s$  est  $i$  — est définie par le couple  $\{j, \Pi(s, i; t, j)\}$  avec  $\Pi(s, i; t, j) = \Pr\{R(s, i; t) \leq j\} = \sum_{k=1}^j \pi(s, i; t, k)$  et  $j \in \mathcal{R}^*$ . Lorsque  $t - s = 1$  (analyse mono-période), nous adoptons les notations simplifiées  $\pi(i; j)$ ,  $R(i)$  et  $\Pi(i; j)$ . Dans ce cas, nous avons  $\pi(i; j) = \pi_{i,j}$  et  $\Pi(i; j) = \sum_{k=1}^j \pi_{i,k}$ . Par exemple, avec la matrice de transition 11.1, nous obtenons la table 11.2 pour  $\Pi(i; j)$ .

Considérons maintenant le cas de deux crédits. Dans **CreditMetrics**, LI [2000] montre que la distribution jointe  $\Pi(i_1, i_2; j_1, j_2)$  est définie par

$$\Pi(i_1, i_2; j_1, j_2) = \mathbf{C}(\Pi(i_1; j_1), \Pi(i_2; j_2)) \quad (11.3)$$

où  $\mathbf{C}$  est une copule Normale de matrice de paramètres  $\rho$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} \Pi(i_1, i_2; j_1, j_2) &= \mathbf{C}(\Pi(i_1; j_1), \Pi(i_2; j_2)) - \mathbf{C}(\Pi(i_1; j_1), \Pi(i_2; j_2 - 1)) + \\ &\quad \mathbf{C}(\Pi(i_1; j_1 - 1), \Pi(i_2; j_2 - 1)) - \mathbf{C}(\Pi(i_1; j_1 - 1), \Pi(i_2; j_2)) \end{aligned} \quad (11.4)$$

Rating initial	Rating final							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	92.54	6.48	0.86	0.06	0.06	0.00	0.00	0.00
AA	0.63	91.87	6.64	0.65	0.06	0.11	0.04	0.00
A	0.08	2.26	91.66	5.11	0.61	0.23	0.01	0.04
BBB	0.05	0.27	5.84	87.74	4.74	0.98	0.16	0.22
BB	0.04	0.11	0.64	7.85	81.14	8.27	0.89	1.06
B	0.00	0.11	0.30	0.42	6.75	83.07	3.86	5.49
CCC	0.19	0.00	0.38	0.75	2.44	12.03	60.71	23.50
D	0	0	0	0	0	0	0	100

TABLE 11.1. Matrice de transition à un an S&P (en %)

Rating final	Rating initial						
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
D	0.00	0.00	0.04	0.22	1.06	5.49	23.50
CCC	0.00	0.04	0.05	0.38	1.95	9.35	84.21
B	0.00	0.15	0.28	1.36	10.22	92.42	96.24
BB	0.06	0.21	0.89	6.10	91.36	99.17	98.68
BBB	0.12	0.86	6.00	93.84	99.21	99.59	99.43
A	0.98	7.50	97.66	99.68	99.85	99.89	99.81
AA	7.46	99.37	99.92	99.95	99.96	100.00	99.81
AAA	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

TABLE 11.2. Distribution de probabilité  $\Pi(i; j)$  (en %)

Dans le cas multidimensionnel, nous avons

$$\Pi(i_1, \dots, i_N; j_1, \dots, j_N) = \mathbf{C}(\Pi(i_1; j_1), \dots, \Pi(i_N; j_N)) \quad (11.5)$$

La fonction de probabilité  $\pi(i_1, \dots, i_N; j_1, \dots, j_N)$  est donnée par la mesure de Radon-Nikodym de la copule<sup>1</sup> :

$$\pi(i_1, \dots, i_N; j_1, \dots, j_N) = \sum_{k_1=0}^1 \cdots \sum_{k_N=0}^1 (-1)^{k_1 + \dots + k_N} \mathbf{C}(\Pi(i_1; j_1 - k_1), \dots, \Pi(i_N; j_N - k_N)) \quad (11.6)$$

Puisqu'une copule est une fonction *grounded*, nous en déduisons que la probabilité de défaillance jointe  $\mathbf{D}(i_1, \dots, i_N)$  est

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(i_1, \dots, i_N) &= \pi(i_1, \dots, i_N; \mathbf{D}, \dots, \mathbf{D}) \\ &= \mathbf{C}(\Pi(i_1; 1), \dots, \Pi(i_N; 1)) \end{aligned} \quad (11.7)$$

Les bornes basse et haute de la probabilité de défaillance jointe sont alors données par les copules Fréchet :

$$\mathbf{C}^-(\Pi(i_1; 1), \dots, \Pi(i_N; 1)) \leq \mathbf{D}(i_1, \dots, i_N) \leq \mathbf{C}^+(\Pi(i_1; 1), \dots, \Pi(i_N; 1)) \quad (11.8)$$

ou de façon équivalente

$$\mathbf{C}^-(\pi(i_1; 1), \dots, \pi(i_N; 1)) \leq \mathbf{D}(i_1, \dots, i_N) \leq \mathbf{C}^+(\pi(i_1; 1), \dots, \pi(i_N; 1)) \quad (11.9)$$

**Remarque 38** Dans **CreditMetrics**, la matrice  $\rho$  est identifiée à la matrice de corrélation des actifs des différents crédits (*asset correlation matrix*).

**Remarque 39** L'analyse précédente s'étend très facilement au cas  $t - s > 1$ .

<sup>1</sup>Nous utilisons la convention  $(-1)^0 = 1$ .

Rating final de $C_1$	Rating final de $C_2$								$\pi(i_1; j)$
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	
AAA	0.00	0.00	0.01	0.01	0.03	0.03	0.00	0.00	0.08
AA	0.00	0.03	0.07	0.08	0.67	1.40	0.00	0.00	2.26
A	0.00	0.07	0.22	0.34	6.02	77.79	3.20	4.01	91.66
BBB	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	3.42	0.54	1.13	5.11
BB	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.32	0.08	0.21	0.61
B	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.03	0.10	0.23
CCC	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.02	0.04
$\pi(i_2; j)$	0.00	0.11	0.30	0.42	6.75	83.07	3.86	5.49	100.00

TABLE 11.3. Probabilités  $\pi(i_1, i_2; j_1, j_2)$  (en %) avec  $\mathcal{R}(C_1) = A$ ,  $\mathcal{R}(C_2) = B$  et  $\rho\langle C_1, C_2 \rangle = 0.50$

Rating final de $C_1$	Rating final de $C_2$								$\pi(i_1; j)$
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	
AAA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.01	0.04	0.08
AA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.29	0.27	0.70	2.26
A	0.00	0.05	0.17	0.27	5.24	77.64	3.56	4.74	91.66
BBB	0.00	0.04	0.09	0.11	1.20	3.64	0.02	0.01	5.11
BB	0.00	0.01	0.02	0.02	0.20	0.35	0.00	0.00	0.61
B	0.00	0.01	0.01	0.01	0.09	0.11	0.00	0.00	0.23
CCC	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00	0.04
$\pi(i_2; j)$	0.00	0.11	0.30	0.42	6.75	83.07	3.86	5.49	100.00

TABLE 11.4. Probabilités  $\pi(i_1, i_2; j_1, j_2)$  (en %) avec  $\mathcal{R}(C_1) = A$ ,  $\mathcal{R}(C_2) = B$  et  $\rho\langle C_1, C_2 \rangle = -0.50$

### 11.1.2 Etude du cas bivarié

Nous rappelons que la distribution bivariée  $\Pi$  est définie par

$$\Pi(i_1, i_2; j_1, j_2) = \mathbf{C}(\Pi(i_1; j_1), \Pi(i_2; j_2)) \quad (11.10)$$

Soient deux crédits  $C_1$  et  $C_2$ . Notons  $\Pi\langle C_1, C_2 \rangle$  la matrice dont les éléments sont  $\Pi(i_1, i_2; j_1, j_2)$  avec  $i_1 = \mathcal{R}(C_1)$  et  $i_2 = \mathcal{R}(C_2)$  les ratings initiaux de  $C_1$  et  $C_2$ . Considérons deux autres crédits  $C_3$  et  $C_4$ . La différence entre les deux matrices de probabilité  $\Pi\langle C_1, C_2 \rangle$  et  $\Pi\langle C_3, C_4 \rangle$  peut s'expliquer par deux raisons :

1. les marges sont différentes, c'est-à-dire que  $C_3$  et  $C_4$  ont des ratings initiaux qui ne sont pas ceux de  $C_1$  et  $C_2$  ;
2. la copule  $\mathbf{C}\langle C_3, C_4 \rangle$  est différente de la copule  $\mathbf{C}\langle C_1, C_2 \rangle$ .

Bien sûr, si les ratings initiaux sont les mêmes, la différence provient uniquement de la fonction copule. Illustrons ceci avec la copule Normale de **CreditMetrics**. Les tables 11.3 et 11.4 donnent les probabilités  $\pi(A, B; j_1, j_2)$  pour une corrélation  $\rho\langle C_1, C_2 \rangle$  égale respectivement à 0.5 et  $-0.5$ . Nous remarquons qu'elles sont très différentes. Dans la table 11.5, les ratings initiaux de  $C_1$  et  $C_2$  sont B et CCC. A titre de comparaison, pour la table 11.6, nous utilisons une copule Clayton de paramètre  $\theta = 1$  (c'est-à-dire une copule qui a un tau de Kendall égal à celui de la copule Normale de paramètre  $\rho = 0.50$ ).

Nous étudions maintenant la probabilité de défaillance jointe  $\mathbf{D}(i_1, i_2)$ . En utilisant l'équation (11.9), nous notons que les bornes basse et haute sont

$$\mathbf{D}^-(i_1, i_2) = \max(0, \pi_{i_1,1} + \pi_{i_2,1} - 1) \quad (11.11)$$

et

$$\mathbf{D}^+(i_1, i_2) = \min(\pi_{i_1,1}, \pi_{i_2,1}) \quad (11.12)$$

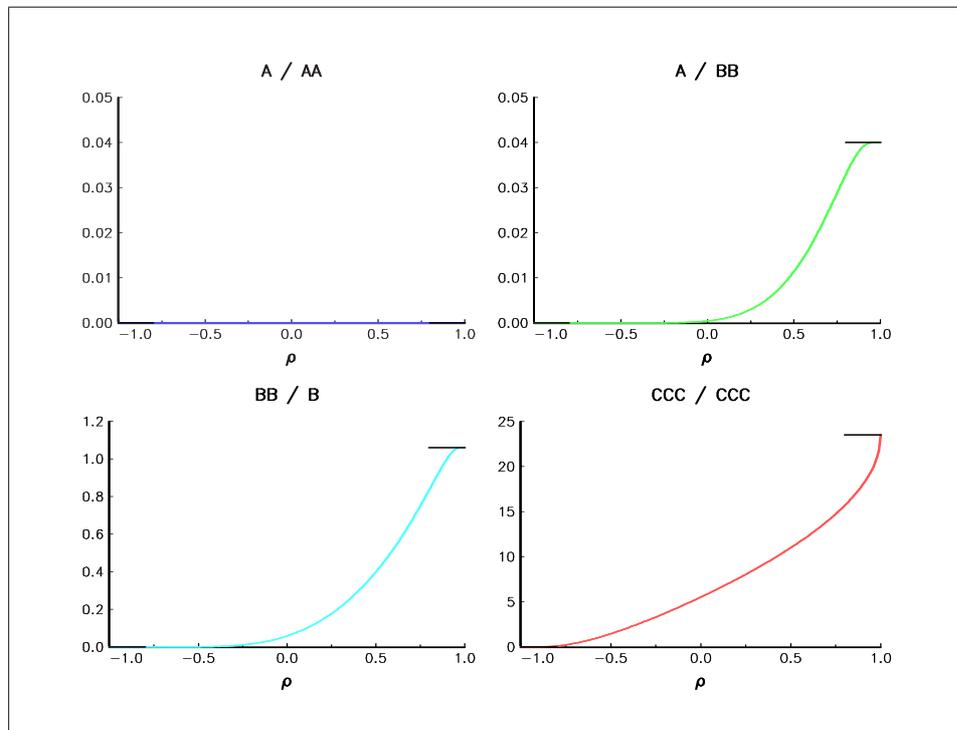
Ceci explique que nous obtenons des probabilités faibles pour les défauts joints à un an. Par exemple, nous avons  $\mathbf{D}^+(\text{CCC}, \text{CCC}) = 23.50\%$ ,  $\mathbf{D}^+(\text{B}, \text{CCC}) = 5.49\%$ ,  $\mathbf{D}^+(\text{BB}, \text{CCC}) = 1.06\%$ , etc. Sur les graphiques 11.1 et 11.2, nous représentons  $\mathbf{D}(i_1, i_2)$  dans le cas de la copule Normale.

Rating final de $C_1$	Rating final de $C_2$								$\pi(i_1; j)$
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	
AAA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.01	0.00	0.01	0.01	0.02	0.04	0.02	0.00	0.11
A	0.01	0.00	0.02	0.02	0.05	0.10	0.09	0.00	0.30
BBB	0.01	0.00	0.02	0.03	0.06	0.14	0.16	0.00	0.42
BB	0.07	0.00	0.13	0.23	0.61	1.98	3.50	0.22	6.75
B	0.08	0.00	0.21	0.46	1.69	9.63	53.11	17.89	83.07
CCC	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.08	1.84	1.93	3.86
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	1.98	3.44	5.49
$\pi(i_2; j)$	0.19	0.00	0.38	0.75	2.44	12.03	60.71	23.50	100.00

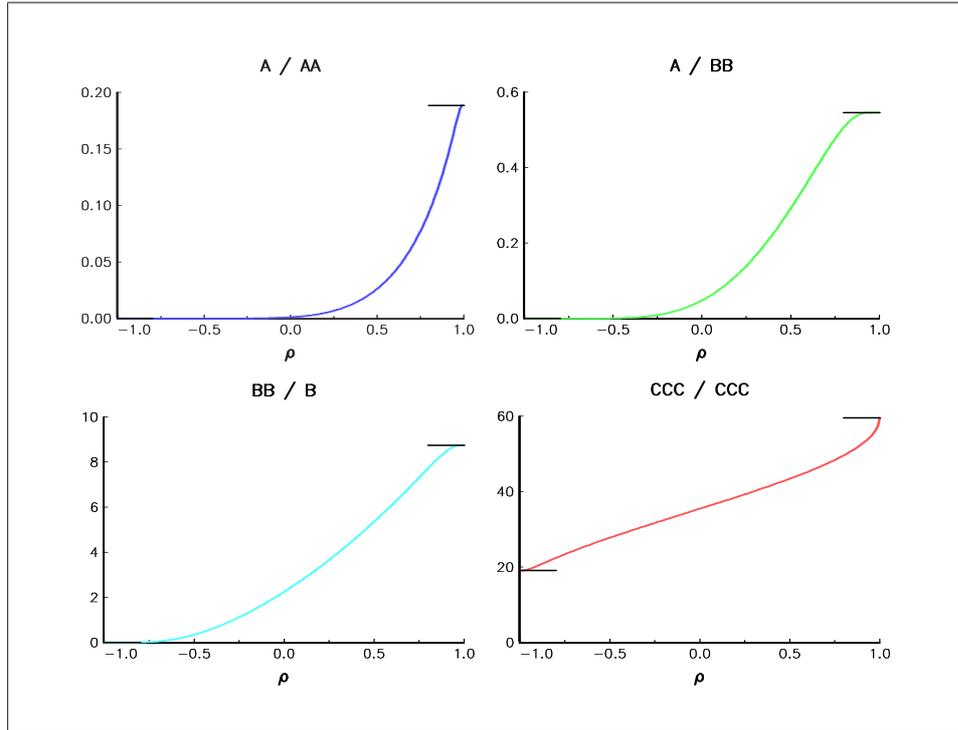
TABLE 11.5. Probabilités  $\pi(i_1, i_2; j_1, j_2)$  (en %) avec  $\mathcal{R}(C_1) = \text{B}$ ,  $\mathcal{R}(C_2) = \text{CCC}$  et  $\rho\langle C_1, C_2 \rangle = 0.50$

Rating final de $C_1$	Rating final de $C_2$								$\pi(i_1; j)$
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	
AAA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
AA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.07	0.01	0.11
A	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.20	0.02	0.30
BBB	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.09	0.27	0.02	0.42
BB	0.02	0.00	0.05	0.10	0.31	1.42	4.45	0.40	6.75
B	0.16	0.00	0.32	0.63	2.07	10.30	53.69	15.89	83.07
CCC	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.08	1.24	2.51	3.86
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.04	0.78	4.66	5.49
$\pi(i_2; j)$	0.19	0.00	0.38	0.75	2.44	12.03	60.71	23.50	100.00

TABLE 11.6. Probabilités  $\pi(i_1, i_2; j_1, j_2)$  (en %) avec  $\mathcal{R}(C_1) = \text{B}$ ,  $\mathcal{R}(C_2) = \text{CCC}$  et une copule Clayton de paramètre  $\theta = 1$



Graphique 11.1. Probabilités de défaillance jointe à un an (en %)



Graphique 11.2. Probabilités de défaillance jointe à cinq ans (en %)

LI [2000] définit la corrélation discrète de défaillance (*discrete default correlation*) de la façon suivante

$$\rho_D \langle C_1, C_2 \rangle = \frac{\mathbf{D}(i_1, i_2) - \pi_{i_1,1}\pi_{i_2,1}}{\sqrt{\pi_{i_1,1}(1 - \pi_{i_1,1})\pi_{i_2,1}(1 - \pi_{i_2,1})}} \quad (11.13)$$

C'est la corrélation linéaire de Pearson de deux variables aléatoires Bernoulli  $B_1$  et  $B_2$ . Nous remarquons que

$$\rho_D^- \langle C_1, C_2 \rangle \leq \rho_D \langle C_1, C_2 \rangle \leq \rho_D^+ \langle C_1, C_2 \rangle \quad (11.14)$$

avec  $\rho_D^+ \langle C_1, C_2 \rangle < 1$  si  $\pi_{i_1,1} \neq \pi_{i_2,1}$  et  $\rho_D^- \langle C_1, C_2 \rangle > -1$ . Nous représentons  $\rho_D \langle C_1, C_2 \rangle$  sur le graphique 11.3 pour les exemples précédents. Il est clair que **le paramètre  $\rho$  de la copule Normale, qui est la corrélation 'asset return' dans CreditMetrics, ne peut pas être interprétée comme un proxy de la corrélation discrète de défaillance.** Remarquons néanmoins que si  $\rho' \langle C_1, C_2 \rangle > \rho \langle C_1, C_2 \rangle$ , alors  $\rho_D' \langle C_1, C_2 \rangle > \rho_D \langle C_1, C_2 \rangle$  à cause de l'ordre de concordance de la copule Normale. En général, les statisticiens utilisent une mesure plus pertinente pour caractériser le degré de dépendance des tables de contingence :

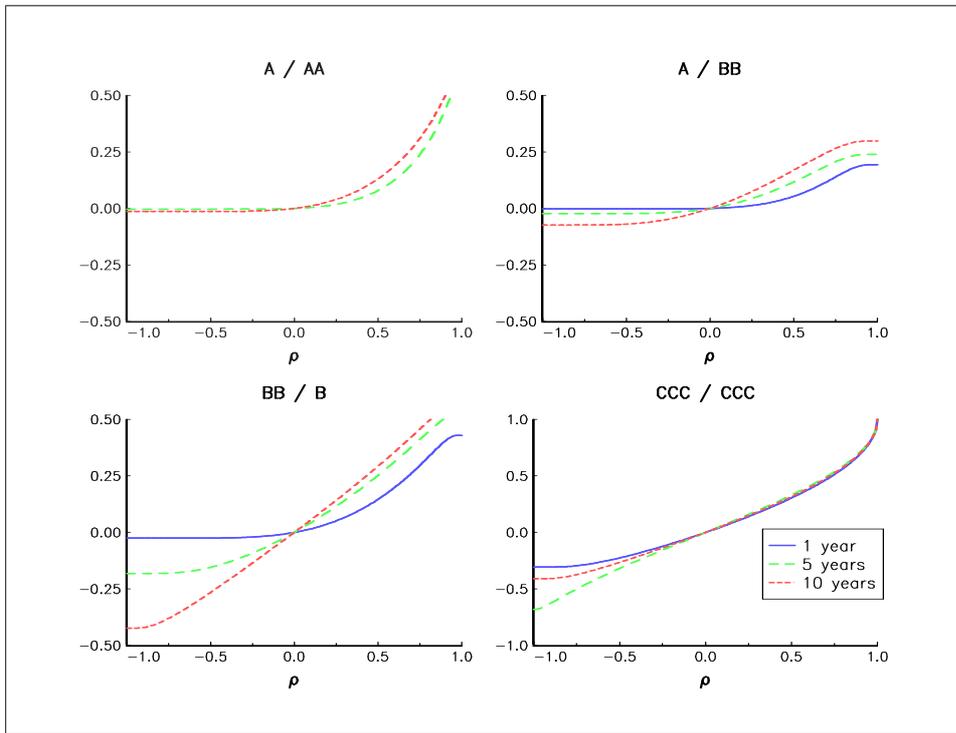
		$B_1$		
		0	1	
$B_2$	0	$1 - \pi_{i_1,1} - \pi_{i_2,1} + \mathbf{D}(i_1, i_2)$	$\pi_{i_1,1} - \mathbf{D}(i_1, i_2)$	$1 - \pi_{i_2,1}$
	1	$\pi_{i_2,1} - \mathbf{D}(i_1, i_2)$	$\mathbf{D}(i_1, i_2)$	$\pi_{i_2,1}$
		$1 - \pi_{i_1,1}$	$\pi_{i_1,1}$	1

Cette mesure est connue sous le nom de 'odds ratio' :

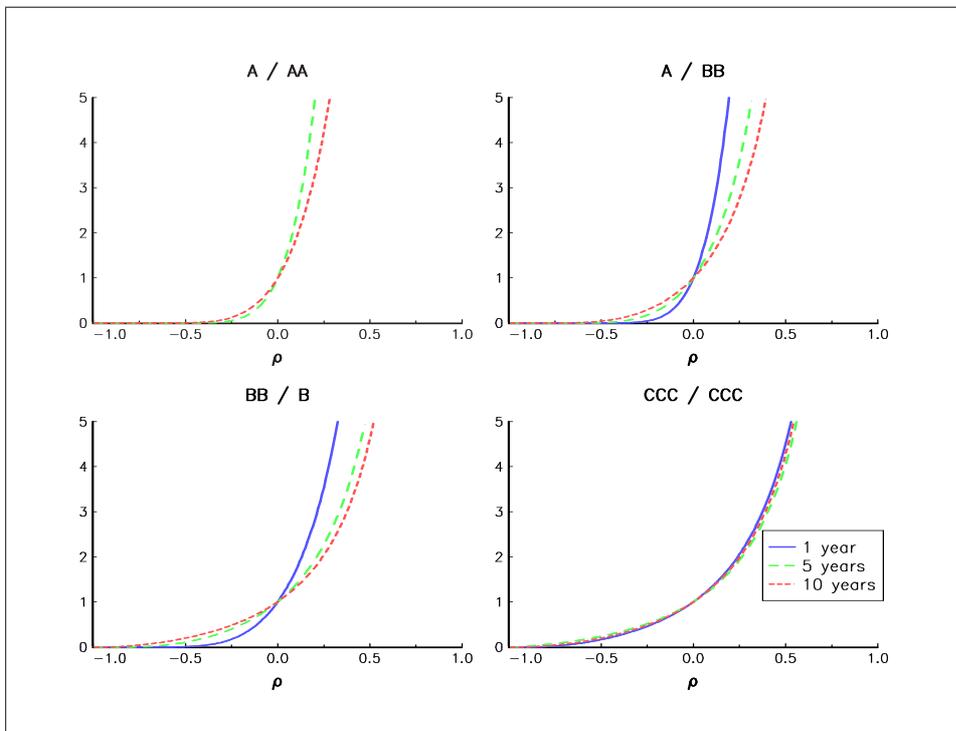
$$\theta_D \langle C_1, C_2 \rangle = \mathbf{D}(i_1, i_2) \frac{1 - \pi_{i_1,1} - \pi_{i_2,1} + \mathbf{D}(i_1, i_2)}{(\pi_{i_1,1} - \mathbf{D}(i_1, i_2))(\pi_{i_2,1} - \mathbf{D}(i_1, i_2))} \quad (11.15)$$

$\theta_D \langle C_1, C_2 \rangle$  correspond à l'indépendance et  $\theta_D \langle C_1, C_2 \rangle$  est respectivement égal à 0 et  $+\infty$  lorsque  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^+$ . Sur le graphique 11.4, nous reportons les valeurs prises par  $\theta_D \langle C_1, C_2 \rangle$ . Pour une valeur fixée du paramètre  $\rho$  de la copule Normale, les valeurs de  $\theta_D \langle C_1, C_2 \rangle$  sont 'comparables'.

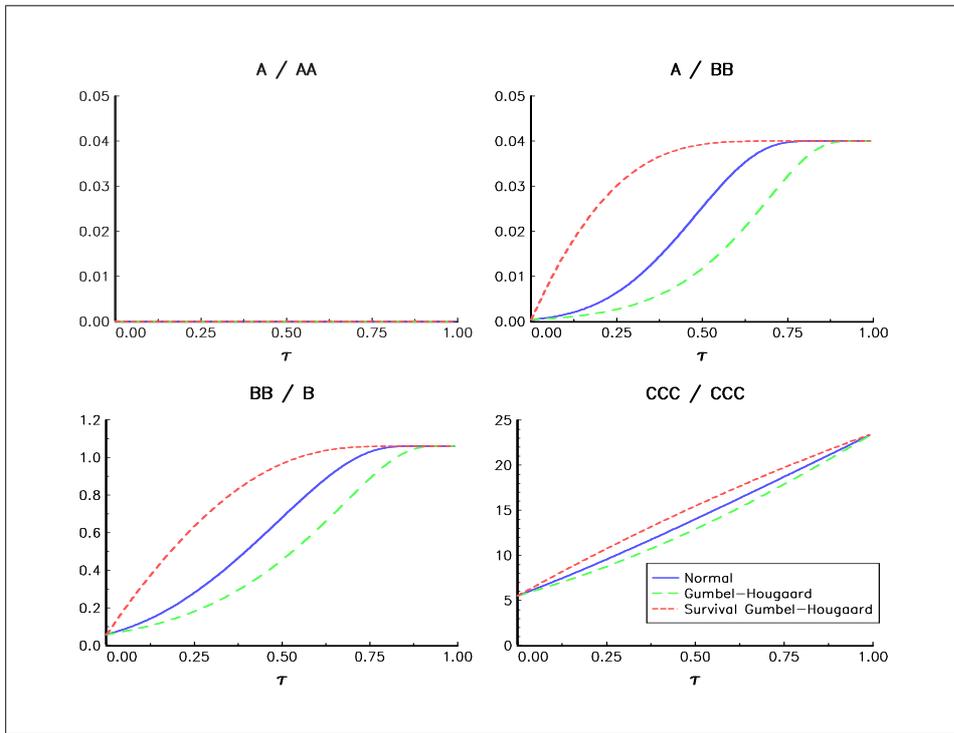
**Remarque 40 CreditMetrics** utilise une copule Normale. Si nous prenons d'autres copules, la probabilité de défaillance jointe peut être très différente (les copules des graphiques 11.5 et 11.6 ont été calibrées pour donner le même tau de Kendall).



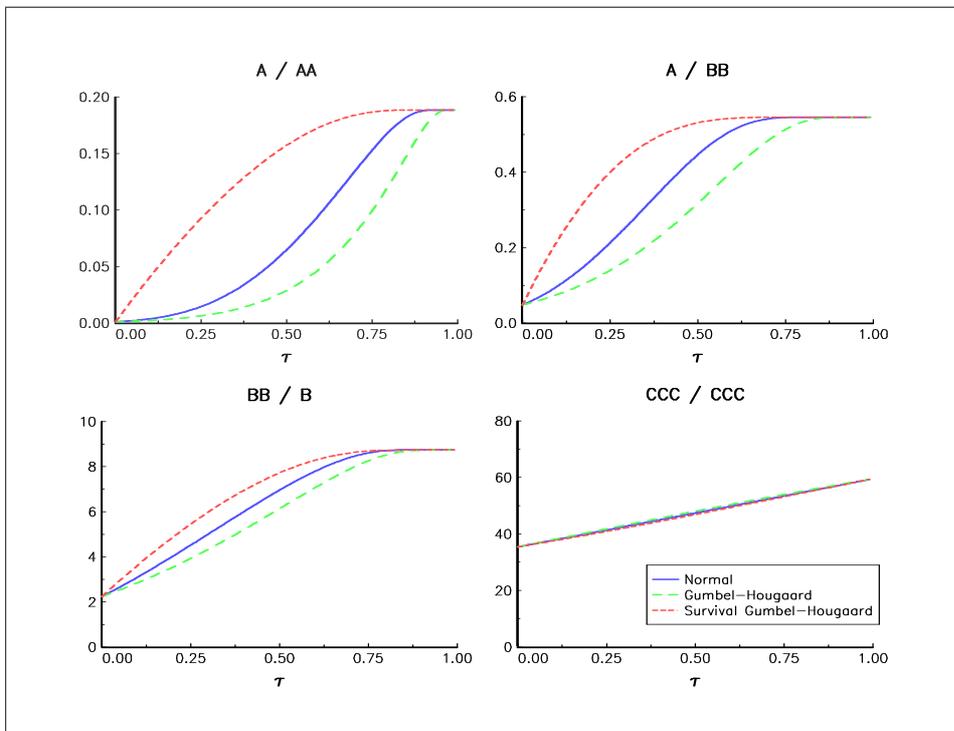
Graphique 11.3. Corrélation discrète de défaillance  $\rho_D \langle C_1, C_2 \rangle$



Graphique 11.4. Odds ratio  $\theta_D \langle C_1, C_2 \rangle$



Graphique 11.5. Probabilités de défaillance jointe à un an (en %)



Graphique 11.6. Probabilités de défaillance jointe à cinq ans (en %)

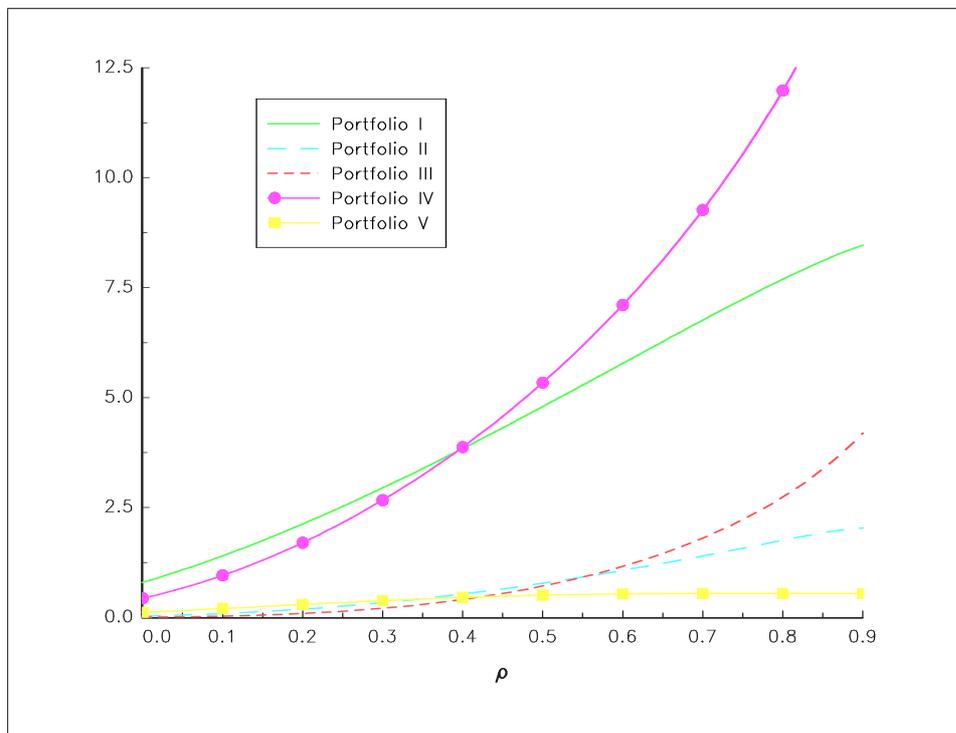
### 11.1.3 Simulation de changements de rating

Le cas multivarié est plus complexe que le cas bivarié, puisque le nombre d'états de la nature est  $8^N$  avec  $N$  le nombre de crédits. C'est pourquoi le modèle analytique est peu maniable pour des grandes valeurs de  $N$ . Nous donnons juste un exemple de calcul de la probabilité de défaillance jointe à 5 ans pour différents portefeuilles :

	I	II	III	IV	V
$C_1$	BB	BB	BB	B	CCC
$C_2$	CCC	BBB	BB	B	A
$C_3$	B	B	BB	B	CCC
$C_4$	CCC	CCC	BB	B	CCC

Le graphique 11.7 représente la probabilité  $\mathbf{D}(i_1, i_2, i_3, i_4)$  pour  $t - s = 5$  lorsque la matrice des paramètres de la copule Normale est de la forme :

$$\rho \langle C_1, C_2, C_3, C_4 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ & 1 & \rho & \rho \\ & & 1 & \rho \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (11.16)$$



Graphique 11.7. Probabilités de défaillance jointe à cinq ans (en %) pour des portefeuilles de 4 crédits

Pour des grandes dimensions, nous utilisons la méthode de Monte carlo. Pour simuler le vecteur des variables aléatoires  $(R(i_1), \dots, R(i_N))$ , nous utilisons l'algorithme à deux étapes :

1. nous simulons un vecteur de nombres aléatoires  $(u_1, \dots, u_N)$  à partir de la copule  $\mathbf{C}$  ;
2. les simulations de rating  $(r_1, \dots, r_N)$  sont obtenues par la méthode de l'inversion de la fonction de distribution :

$$r_n = \inf \{j : \Pi(i_n; j) \geq u_n\} \quad (11.17)$$

Rating initial	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
1	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
2	AA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
3	AAA	AA	BBB	BBB	BB	D
4	AAA	AA	BBB	A	BB	CCC
5	AAA	AA	A	BBB	BB	CCC
6	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
7	AAA	A	BBB	BBB	BB	D
8	AAA	AA	BBB	BBB	BB	BB
9	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
10	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC

TABLE 11.7. Dix simulations de changements de rating à un an (copule Normale et matrice des paramètres  $\rho_1$ )

Rating initial	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
1	AAA	AA	BBB	BBB	B	B
2	AA	AA	A	A	BB	CCC
3	AAA	AA	BBB	BBB	BB	D
4	AAA	AA	BBB	A	B	CCC
5	AAA	AA	BBB	BBB	B	CCC
6	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
7	AAA	AA	BBB	BBB	BB	D
8	AAA	AA	BB	BBB	BB	B
9	AAA	AA	BBB	BB	BB	D
10	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC

TABLE 11.8. Dix simulations de changements de rating à un an (copule Normale et matrice des paramètres  $\rho_2$ )

Pour illustrer cet algorithme, nous considérons un portefeuille de 6 crédits. Les ratings initiaux sont respectivement AAA, AA, BBB, BBB, BB et CCC. Nous utilisons une copule Normale avec la matrice suivante des paramètres :

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.75 & 0.5 & 0.25 & 0.2 \\ & 1 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.1 \\ & & 1 & 0.75 & 0.25 & 0.2 \\ & & & 1 & 0.25 & 0.5 \\ & & & & 1 & 0.5 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Afin de procéder à une comparaison, nous considérons une seconde matrice de paramètres :

$$\rho_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & -0.75 & -0.5 & -0.25 & -0.2 \\ & 1 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.1 \\ & & 1 & 0.75 & 0.25 & 0.2 \\ & & & 1 & -0.25 & 0.5 \\ & & & & 1 & -0.5 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Dans les tables 11.7 et 11.8, nous reportons 10 simulations avec la même initialisation du générateur aléatoire. Nous voyons l'influence de la matrice de corrélation sur la simulation des changements de rating. Par exemple, si nous considérons la cinquième simulation, le rating final de  $C_5$  et  $C_6$  est respectivement BB et CCC dans le premier cas alors que nous obtenons B et CCC dans le second cas. Si nous prenons une copule Student  $t_3$ , nous obtenons les tables 11.11 et 11.12.

Rating initial	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
1	AA	A	BBB	BBB	D	D
2	B	A	D	BBB	A	D
3	A	A	BB	BB	BB	D
4	AAA	A	A	AAA	B	B
5	AAA	AA	AA	A	D	D
6	AA	AA	A	BBB	A	D
7	A	B	BB	D	D	D
8	AA	A	B	BBB	BB	A
9	AAA	AA	A	BBB	A	D
10	AA	B	CCC	A	A	D

TABLE 11.9. Dix simulations de changements de rating à cinq ans (copule Normale et matrice des paramètres  $\rho_1$ )

Rating initial	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
1	AA	A	B	BBB	D	BB
2	B	AA	AA	AA	BBB	D
3	A	A	A	BBB	BBB	D
4	AAA	BBB	BBB	AA	D	B
5	AAA	A	B	BB	D	D
6	AA	AA	A	BBB	A	D
7	A	B	BBB	B	BBB	D
8	AA	A	D	B	D	A
9	AAA	AA	D	D	A	D
10	AA	BB	B	A	D	D

TABLE 11.10. Dix simulations de changements de rating à cinq ans (copule Normale de matrice des paramètres  $\rho_1$ )

Rating initial	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
1	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
2	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
3	AAA	AA	BBB	BBB	BB	D
4	AAA	AA	BBB	A	BB	CCC
5	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
6	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
7	AAA	A	BBB	BBB	BB	D
8	AAA	AA	BBB	BBB	BB	B
9	AAA	AA	A	BBB	BB	CCC
10	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC

TABLE 11.11. Dix simulations de changements de rating à un an (copule Student  $t_3$  et matrice des paramètres  $\rho_1$ )

Rating initial	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
1	AAA	AA	BBB	BBB	B	B
2	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
3	AAA	AA	BBB	BBB	BB	D
4	AAA	AA	BBB	A	B	CCC
5	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
6	AAA	AA	BBB	BBB	BBB	D
7	AAA	AA	BBB	BBB	BB	D
8	AAA	AA	BBB	BBB	BB	B
9	AAA	AA	BB	BB	BB	D
10	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC

TABLE 11.12. Dix simulations de changements de rating à un an (copule Student  $t_3$  et matrice des paramètres  $\rho_2$ )

Rating initial	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
1	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
2	AA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
3	AA	AA	BBB	BBB	BB	D
4	AA	AA	BBB	A	BB	D
5	AA	AA	A	A	BB	D
6	AA	AA	A	A	BB	D
7	AA	A	A	A	BB	D
8	AA	A	A	A	BB	D
9	AA	A	A	A	BB	D
10	AA	A	A	A	BB	D

TABLE 11.13. Simulation d'une trajectoire 10 ans (copule Normale et matrice des paramètres  $\rho_1$ )

#### 11.1.4 Simulation de trajectoires dynamiques de rating

Dans le paragraphe précédent, nous considérons le problème de simulation du vecteur aléatoire  $\mathbf{R}(s, \mathbf{i}; t)$  avec

$$\mathbf{R}(s, \mathbf{i}; t) = \begin{pmatrix} R(s, i_1; t) \\ \vdots \\ R(s, i_N; t) \end{pmatrix} \quad (11.18)$$

Dans ce paragraphe, nous considérons le problème de simulation des trajectoires dynamiques. Dans ce cas, nous exploitons la relation

$$R(s, i_1; s+2) = R(s+1, R(s, i_1; s+1); s+2) \quad (11.19)$$

et nous pouvons facilement simuler la matrice  $\mathbf{R}_{s \rightarrow t}(s, \mathbf{i}; t)$  des trajectoires en utilisant l'algorithme précédent de façon récursive. La matrice  $\mathbf{R}_{s \rightarrow t}(s, \mathbf{i}; t)$  est de dimension  $(t-s) \times N$  et nous avons :

$$\mathbf{R}_{s \rightarrow t}(s, \mathbf{i}; t) = \begin{bmatrix} R(s, i_1; s+1) & \cdots & R(s, i_N; s+1) \\ R(s+1, R(s, i_1; s+1); s+2) & \cdots & R(s+1, R(s, i_N; s+1); s+2) \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (11.20)$$

Reprenons l'exemple précédent. Dans les tables 11.13 et 11.14, Nous considérons la simulation d'une trajectoire 10 ans. Remarquez que l'état de la nature D est bien un état absorbant de la chaîne de Markov. Chaque graphique 11.8 à 11.12 correspond à cinq simulations de trajectoire d'un portefeuille de 4 crédits. Les ratings initiaux sont respectivement AAA, BBB, B et CCC. Nous utilisons une copule Normale avec les matrices suivante des paramètres :

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.75 & 0.5 \\ & 1 & 0.5 & 0.25 \\ & & 1 & 0.75 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\rho_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & -0.75 & -0.5 \\ & 1 & 0.5 & 0.25 \\ & & 1 & 0.75 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

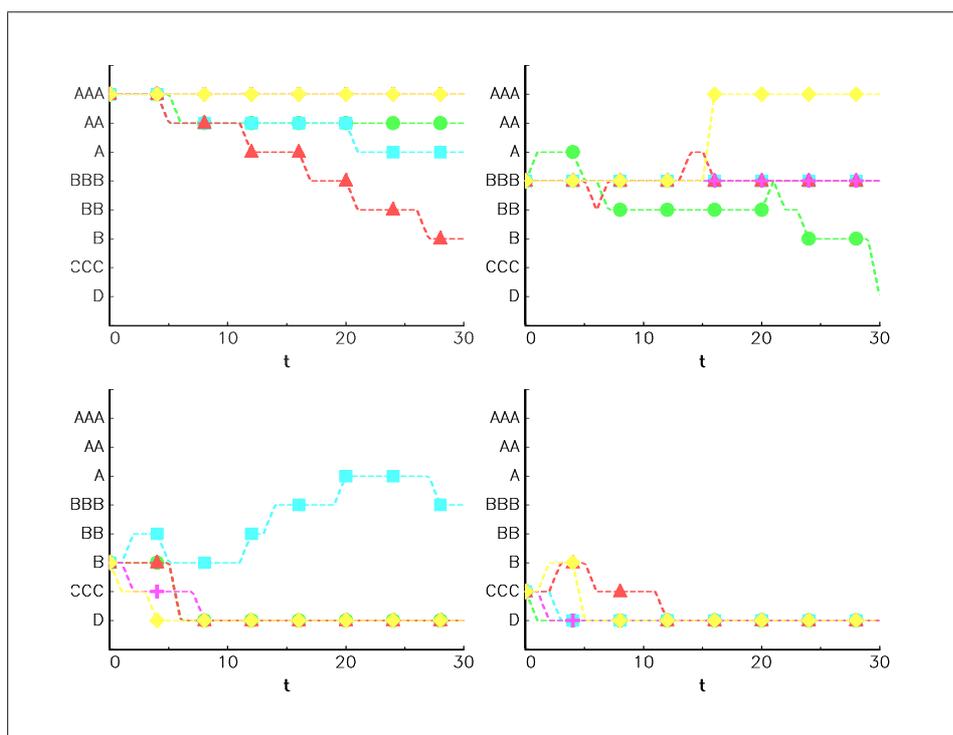
#### 11.1.5 Calcul de la valeur en risque

#### 11.1.6 Procédures GAUSS

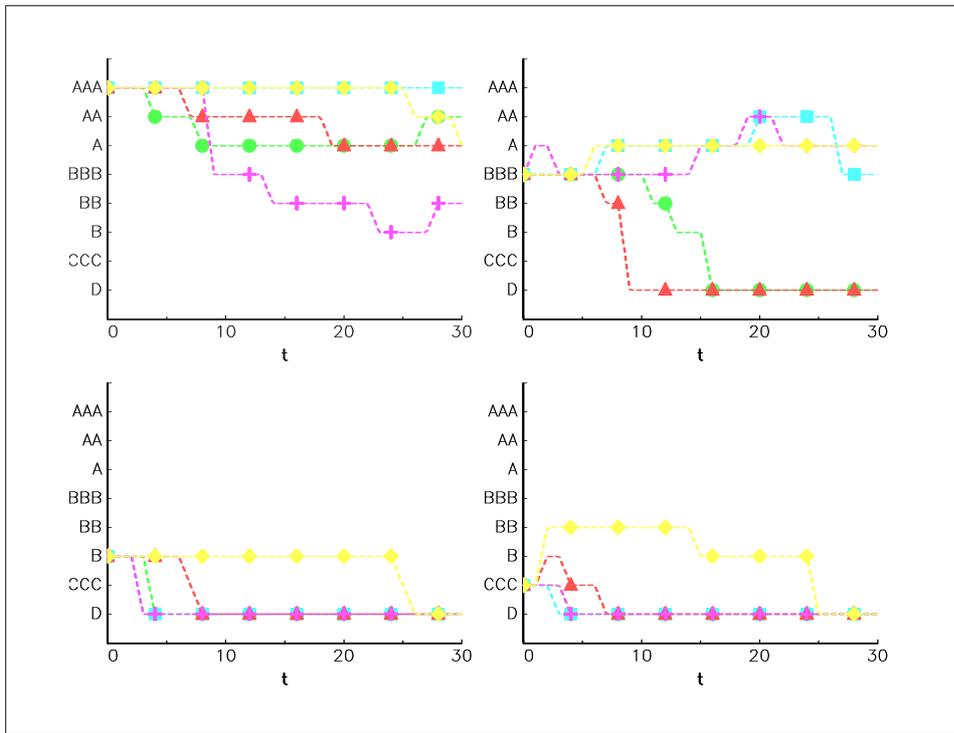
Code GAUSS 49 (Procédures de gestion des matrices de transition)

Rating initial	AAA	AA	BBB	BBB	BB	CCC
1	AAA	AA	BBB	BBB	B	B
2	AA	AA	A	A	B	B
3	AA	AA	A	A	B	CCC
4	AA	AA	A	A	D	CCC
5	AA	AA	A	A	D	CCC
6	AA	AA	A	A	D	CCC
7	AA	AA	A	A	D	D
8	AA	AA	BBB	A	D	D
9	AA	AA	BBB	BBB	D	D
10	AA	AA	BBB	BBB	D	D

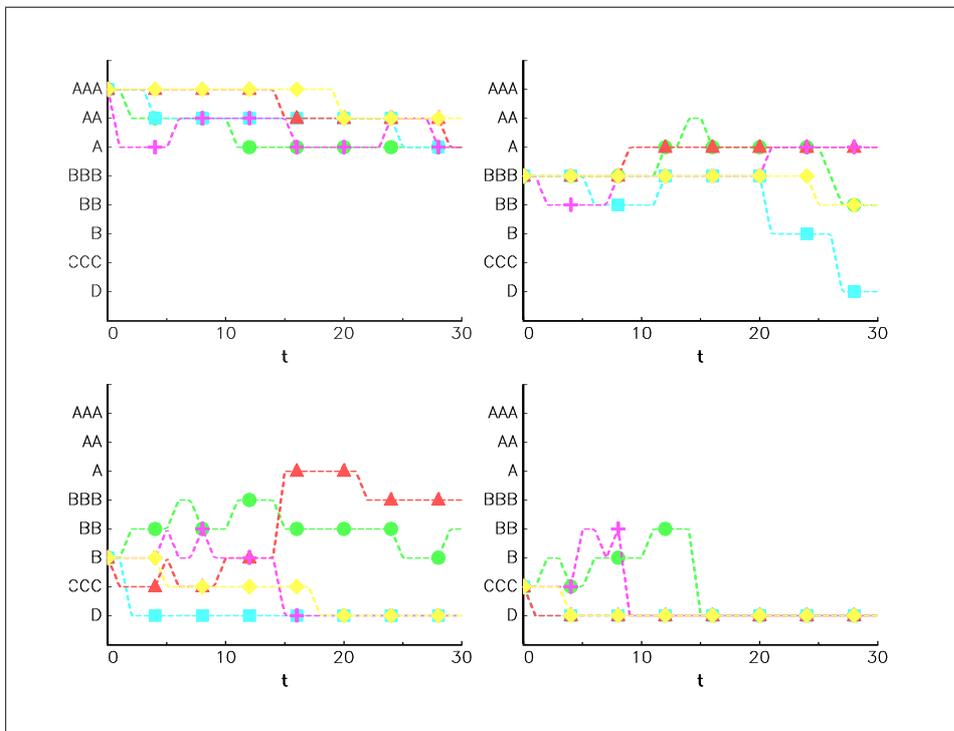
TABLE 11.14. Simulation d'une trajectoire 10 ans (copule Normale et matrice des paramètres  $\rho_2$ )



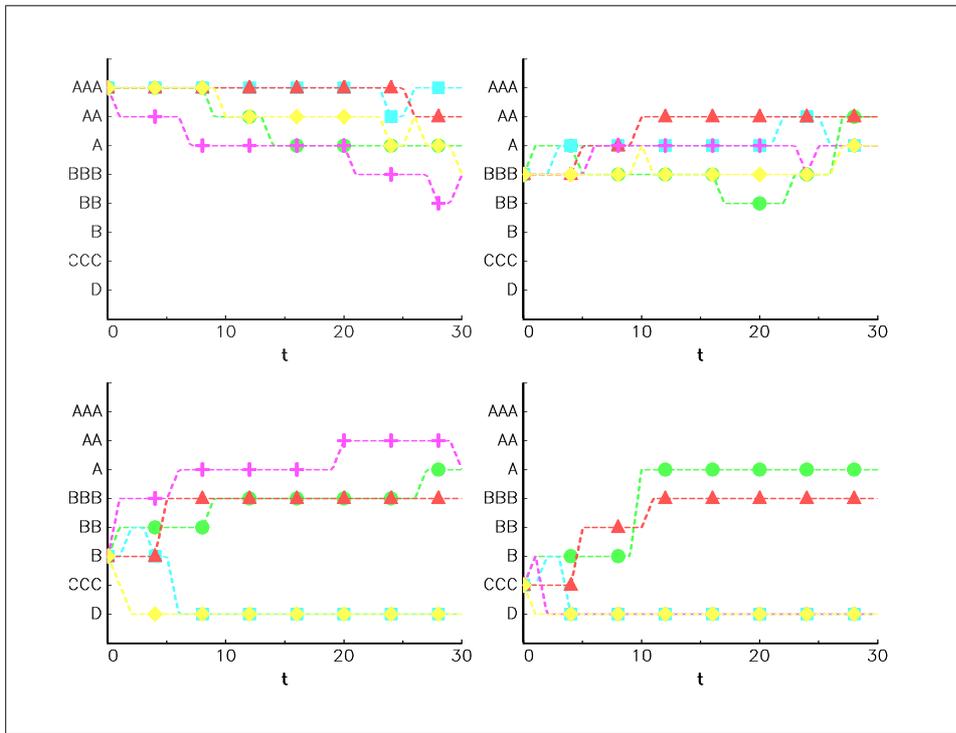
Graphique 11.8. Simulation de cinq trajectoires 30 ans (matrice de paramètres  $\rho_1$ )



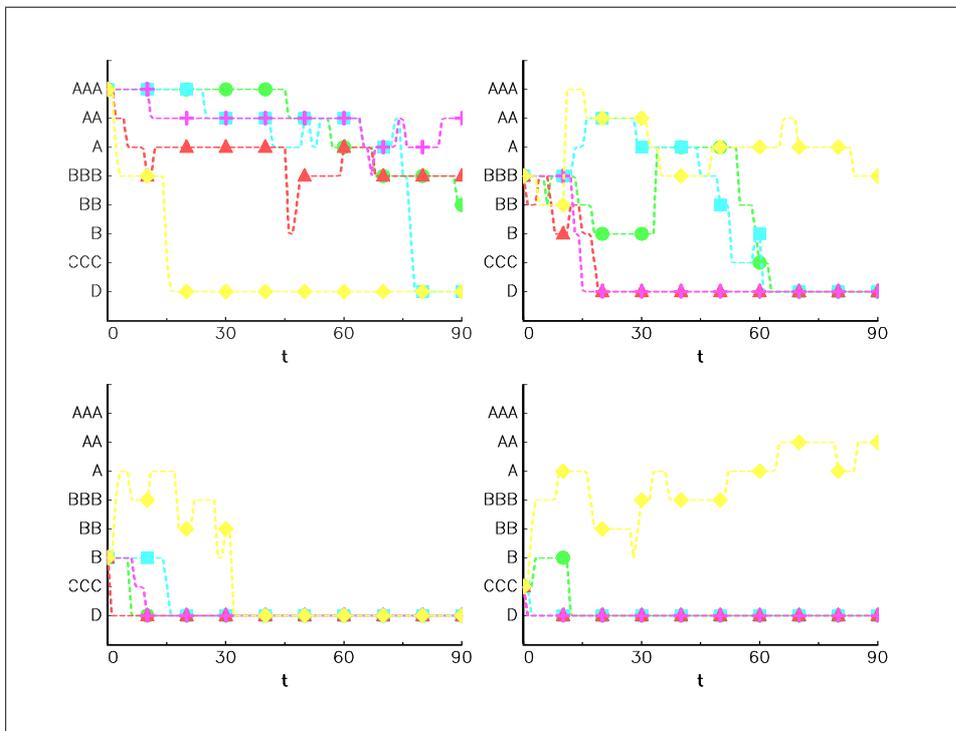
Graphique 11.9. Simulation de cinq trajectoires 30 ans (matrice de paramètres  $\rho_1$ )



Graphique 11.10. Simulation de cinq trajectoires 30 ans (matrice de paramètres  $\rho_2$ )



Graphique 11.11. Simulation de cinq trajectoires 30 ans (matrice de paramètres  $\rho_2$ )



Graphique 11.12. Simulation de cinq trajectoires 90 ans (matrice de paramètres  $\rho_2$ )

```

/*
**> SetTransitionMatrix
**
*/

proc (0) = SetTransitionMatrix(TM);
  local m;
  if rows(TM) == 1 and cols(TM) == 1;
    if TM == 0; /* Transition Matrix --- Standard & Poor's CreditWeek, April 15 1996 */
      let m[7,8] = 90.81 8.33 0.68 0.06 0.12 0.00 0.00 0.00
                  0.70 90.65 7.79 0.64 0.06 0.14 0.02 0.00
                  0.09 2.27 91.05 5.52 0.74 0.26 0.01 0.06
                  0.02 0.33 5.95 86.93 5.30 1.17 1.12 0.18
                  0.03 0.14 0.67 7.73 80.53 8.84 1.00 1.06
                  0.00 0.11 0.24 0.43 6.48 83.46 4.07 5.20
                  0.22 0.00 0.22 1.30 2.38 11.24 64.86 19.79;
    else; /* Standard & Poor's Transition Matrix --- Kavvathas [2000] */
      let m[7,8] = 92.83 6.50 0.86 0.06 0.06 0.00 0.00 0.00
                  0.63 91.87 6.64 0.65 0.06 0.11 0.04 0.00
                  0.08 2.26 91.65 5.11 0.61 0.23 0.01 0.04
                  0.05 0.27 5.84 87.76 4.74 0.98 0.16 0.22
                  0.04 0.11 0.64 7.85 81.13 8.27 0.89 1.06
                  0.00 0.11 0.30 0.42 6.75 83.08 3.86 5.49
                  0.19 0.00 0.38 0.75 2.44 12.03 60.71 23.50;

      endif;
    else;
      m = TM[1:7,.];
    endif;
    _cm_PI = m ./ sumc(m');
    _cm_PI = _cm_PI | (zeros(1,7)~1);
    retp;
  endp;

/*
**> PrintTransitionMatrix
**
*/

proc (0) = PrintTransitionMatrix(x);
  call _PrintTransitionMatrix(x,_cm_rating,_cm_rating);
  retp;
endp;

proc (0) = _PrintTransitionMatrix(x,RowRatings,ColumnRatings);
  local r,c;
  RowRatings = _cm_convert(RowRatings);
  ColumnRatings = _cm_convert(ColumnRatings);
  if cols(ColumnRatings) /= 1;
    ColumnRatings = ColumnRatings';
  endif;
  if RowRatings == 0;
    RowRatings = _cm_rating;
  endif;
  if ColumnRatings == 0;
    ColumnRatings = _cm_rating;
  endif;
  RowRatings = RatingMapping(RowRatings,1);

```

```

ColumnRatings = RatingMapping(ColumnRatings,1);
x = miss(0,0)~ColumnRatings' | RowRatings~_cm_scale*x;
r = rows(x); c = cols(x);
call printfm(x, zeros(1,c) | zeros(r-1,1)~ones(r-1,c-1), '%lf'~_cm_width~_cm_dgt); print;
retp;
endp;

proc (0) = _PrintRatings(Ratings);
Ratings = _cm_convert(Ratings);
Ratings = RatingMapping(Ratings,1);
call printfm(ratings, 0, '%lf'~_cm_width~3); print;
retp;
endp;

```

Code GAUSS 50 (Procédure de mapping  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^*$  et  $\mathcal{R}^* \rightarrow \mathcal{R}$ )

```

/*
**> RatingMapping
**
*/

proc (1) = RatingMapping(r,cn);
local n,m,_cm_r,_cm_rstar,rstar,k,indx;

let _cm_r[8,1] = 'AAA' 'AA' 'A' 'BBB' 'BB' 'B' 'CCC' 'D';
let _cm_rstar[8,1] = 8 7 6 5 4 3 2 1;

r = _cm_convert(r);
n = rows(r); m = cols(r);
r = vecr(r); rstar = zeros(n*m,1);

if r[1] < 1;
k = 1;
do until k > 8;
indx = indexcat(r,_cm_r[k]);
if indx == error(0);
k = k + 1;
continue;
else;
rstar[indx] = _cm_rstar[k] * ones(rows(indx),1);
endif;
k = k + 1;
endo;
else;
k = 1;
do until k > 8;
indx = indexcat(r,_cm_rstar[k]);
if indx == error(0);
k = k + 1;
continue;
else;
rstar[indx] = _cm_r[k] * ones(rows(indx),1);
endif;
k = k + 1;
endo;
endif;
rstar = reshape(rstar,n,m);
r = reshape(r,n,m);

```

```

if r[1,1] < 1 and cn == 1;
    retp(r);
elseif r[1,1] >= 1 and cn == 1;
    retp(rstar);
elseif r[1,1] < 1 and cn == 0;
    retp(rstar);
else;
    retp(r);
endif;
endp;

```

```

proc (1) = _cm_convert(r);
    local typ;
    if type(r) /= 6;
        r = 0 $+ r;
    endif;
    retp(r);
endp;

```

Code GAUSS 51 (Calcul de la fonction de probabilités  $\pi(s, i; t, j)$ )

```

/*
**> ComputePdfMigration
**
*/

proc (1) = ComputePdfMigration(s,i,t,j);
    local TM,k,l,x,pi_s_i_t_j,e_i,e_j,r,c;

    i = _cm_convert(i); j = _cm_convert(j);
    if i/= 0;
        i = RatingMapping(i,0);
    endif;
    if j /= 0;
        j = RatingMapping(j,0);
    endif;

    TM = _cm_PI;
    x = 1;
    k = 1;
    do until k > (t-s);
        x = x * TM;
        k = k + 1;
    endo;
    x = x ./ sumc(x');
    if i == 0 and j == 0;
        pi_s_i_t_j = x;
    elseif i == 0;
        e_j = _cm_e(j);
        pi_s_i_t_j = x * e_j;
    elseif j == 0;
        e_i = _cm_e(i);
        pi_s_i_t_j = e_i' * x;
    else;
        r = maxc(rows(i)|rows(j));
        c = maxc(cols(i)|cols(j));
        pi_s_i_t_j = zeros(r,c);
        i = ones(r,c) .* i;
    endif;
endp;

```

```

    j = ones(r,c) .* j;
    k = 1;
    do until k > r;
        l = 1;
        do until l > c;
            pi_s_i_t_j[k,l] = _cm_e(i[k,l])' * x * _cm_e(j[k,l]);
            l = l + 1;
        endo;
        k = k + 1;
    endo;
endif;

    retp(pi_s_i_t_j);
endp;

proc (1) = _cm_e(i);
    local n,e,k;
    if cols(i) /= 1;
        i = i';
    endif;
    n = rows(i);
    e = zeros(8,n);
    k = 1;
    do until k > n;
        e[9-i[k],k] = 1;
        k = k + 1;
    endo;
    retp(e);
endp;

```

Code GAUSS 52 (Calcul de la distribution de probabilités  $\Pi(s, i; t, j)$ )

```

/*
**> ComputeCdfMigration
**
*/

proc (1) = ComputeCdfMigration(s,i,t,j);
    local TM,k,l,x,pi_s_i_t_j,e_i,e_j,r,c;

    i = _cm_convert(i); j = _cm_convert(j);
    if i/= 0;
        i = RatingMapping(i,0);
    endif;
    if j /= 0;
        j = RatingMapping(j,0);
    endif;

    TM = _cm_PI;
    x = 1;
    k = 1;
    do until k > (t-s);
        x = x * TM;
        k = k + 1;
    endo;
    x = x ./ sumc(x');
    x = rev(cumsumc(rev(x')))' ;
    if i == 0 and j == 0;

```

```

    pi_s_i_t_j = x;
elseif i == 0;
    e_j = _cm_e(j);
    pi_s_i_t_j = x * e_j;
elseif j == 0;
    e_i = _cm_e(i);
    pi_s_i_t_j = e_i' * x;
else;
    r = maxc(rows(i)|rows(j));
    c = maxc(cols(i)|cols(j));
    pi_s_i_t_j = zeros(r,c);
    i = ones(r,c) .* i;
    j = ones(r,c) .* j;
    k = 1;
    do until k > r;
        l = 1;
        do until l > c;
            pi_s_i_t_j[k,l] = _cm_e(i[k,l])' * x * _cm_e(j[k,l]);
            l = l + 1;
        endo;
        k = k + 1;
    endo;
endif;

    retp(pi_s_i_t_j);
endp;

```

Code GAUSS 53 (Calcul de la matrice des probabilités  $\pi(i_1, i_2; j_1, j_2)$ )

```

/*
**> ComputePdfMigration2
**
*/

proc (1) = ComputePdfMigration2(s,i1,i2,t,j1,j2,theta);
    local r,c,e,pi_,k,l;

    i1 = _cm_convert(i1); j1 = _cm_convert(j1);
    i2 = _cm_convert(i2); j2 = _cm_convert(j2);
    if j1 == 0 and j2 == 0;
        j1 = seqa(8,-1,8);
        j2 = seqa(8,-1,8)';
    endif;
    if i1 == 0 and i2 == 0;
        i1 = seqa(8,-1,8);
        i2 = seqa(8,-1,8)';
    endif;
    if i1 /= 0; i1 = RatingMapping(i1,0); else; i1 = seqa(8,-1,8); endif;
    if i2 /= 0; i2 = RatingMapping(i2,0); else; i2 = seqa(8,-1,8); endif;
    if j1 /= 0; j1 = RatingMapping(j1,0); else; j1 = seqa(8,-1,8); endif;
    if j2 /= 0; j2 = RatingMapping(j2,0); else; j2 = seqa(8,-1,8); endif;

    r = maxc(rows(i1)|rows(i2)|rows(j1)|rows(j2));
    c = maxc(cols(i1)|cols(i2)|cols(j1)|cols(j2));
    e = ones(r,c);
    i1 = i1 .* e; i2 = i2 .* e; j1 = j1 .* e; j2 = j2 .* e;
    pi_ = zeros(r,c);
    k = 1;

```

```

do until k > r;
  l = 1;
  do until l > c;
    pi_[k,l] = _ComputePdfMigration2(s,i1[k,l],i2[k,l],t,j1[k,l],j2[k,l],theta);
    l = l + 1;
  endo;
  k = k + 1;
endo;
retp(pi_);
endp;

```

```

proc (1) = _ComputePdfMigration2(s,i1,i2,t,j1,j2,theta);
  local u1,u2,v1,v2,cdfCopula;

  j1 = RatingMapping(j1,0);
  j2 = RatingMapping(j2,0);
  u1 = rev(ComputeCdfMigration(s,i1,t,0)');
  u2 = rev(ComputeCdfMigration(s,i2,t,0)');
  u1 = substute(u1,u1 .>= 1, 1-__macheps);
  u2 = substute(u2,u2 .>= 1, 1-__macheps);
  u1 = substute(u1,u1 .<= 0, __macheps);
  u2 = substute(u2,u2 .<= 0, __macheps);
  v1 = __macheps|trimr(u1,0,1);
  v2 = __macheps|trimr(u2,0,1);

  u1 = u1[j1];
  u2 = u2[j2];
  v1 = v1[j1];
  v2 = v2[j2];

  if _cm_cdfCopula == 0;
    cdfCopula = &cdfCopulaNormal2;
  else;
    cdfCopula = _cm_cdfCopula;
  endif;
  local cdfCopula:proc;

  retp( cdfCopula(u1,u2,theta) - cdfCopula(u1,v2,theta) -
        cdfCopula(v1,u2,theta) + cdfCopula(v1,v2,theta) );
endp;

```

**Code GAUSS 54 (Calcul des mesures de dépendance  $\rho_D \langle C_1, C_2 \rangle$  et  $\theta_D \langle C_1, C_2 \rangle$ )**

```

/*
**> DiscreteDefaultCorrelation
**
*/

proc (1) = DiscreteDefaultCorrelation(p12,p1,p2);
  retp( (p12 - p1 .* p2) ./ sqrt(p1 .* (1-p1) .* p2 .* (1-p2)) );
endp;

/*
**> OddsRatio
**
*/

```

```
proc OddsRatio(p12,p1,p2);
  retp( p12 .* (1 - p1 - p2 + p12) ./ (p1 - p12) ./ (p2 - p12) );
endp;
```

#### Code GAUSS 55 (Simulation de changements de rating)

```
/*
**> rndRatingTransition
**
*/

proc (1) = SimulateRatingTransition(ratings,rho,Ns);
  local rndCopula,N,u,PI_,R,i;

  if cols(ratings) == 1;
    ratings = _cm_PI[9-RatingMapping(ratings,0),.];
  endif;

  N = cols(ratings); /* Number of assets in the portfolio */

  if _cm_rndCopula == 0;
    rndCopula = &rndCopulaNormal;
    if rows(rho) == 1 and cols(rho) == 1;
      rho = diagrv(rho*ones(N,N),ones(N,1));
    endif;
  else;
    rndCopula = _cm_rndCopula;
  endif;
  local rndCopula:proc;

  u = rndCopula(rho,Ns);
  PI_ = cumsumc(rev(ratings));
  R = zeros(Ns,N);

  i = 1;
  do until i > N;
    R[.,i] = _MatchRating(u[.,i],PI_[.,i]);
    i = i + 1;
  endo;

  i = 1;
  do until i > 8;
    R = substute(R,R .== i, _cm_rating[9-i] );
    i = i + 1;
  endo;

  retp(R);
endp;

proc _MatchRating(u,PI_);
  retp( 1 + sumc(u' .>= PI_ ) );
endp;
```

#### Code GAUSS 56 (Simulation de trajectoires de rating)

```
/*
**> rndRatingProcess
**
```

```

*/
proc (1) = SimulateRatingProcess(ratings,rho,Ns);
  local N,R,i;

  N = rows(ratings);
  R = zeros(Ns,N);
  ratings = ratings';

  i = 1;
  do until i > Ns;
    ratings = SimulateRatingTransition(ratings',rho,1);
    R[i,.] = ratings;
    i = i + 1;
  endo;

  retp(R);
endp;

```

## 11.2 La copule implicite du modèle **CreditRisk+**

Les défauts à l'instant  $T$  sont donnés par un ensemble de variables aléatoires Bernoulli  $B_n$  :

$$B_n = \begin{cases} 1 & \text{si la firme } n \text{ a fait défaut à l'instant } T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les paramètres  $p_n$  des variables  $B_n$  sont stochastiques et sont décrits par un ensemble de  $K$  facteurs indépendants  $X_k$ . Nous avons

$$p_n = P_n \sum_{k=1}^K \theta_{n,k} X_k \quad (11.21)$$

avec la contrainte

$$\mathbb{E}[p_n] = P_n \quad (11.22)$$

$\theta_{n,k}$  est le paramètre de sensibilité de la probabilité  $p_n$  au facteur  $X_k$ . Dans le modèle **CreditRisk+**, on suppose de plus que si les facteurs sont donnés, les défauts sont conditionnellement indépendants. La dépendance entre les défauts est entièrement introduite dans l'équation (11.21). Donc, même si la fonction de dépendance entre les variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_K)$  est la copule produit  $\mathbf{C}^\perp$ , les variables aléatoires  $B_1, \dots, B_N$  ne sont pas indépendantes. Notons  $\mathbf{F}_n$  la distribution de  $B_n$  et  $\mathbf{F}$  la distribution jointe de  $(B_1, \dots, B_N)$ . La copule dans **CreditRisk+** est alors donnée par l'expression suivante :

$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_N) = \mathbf{F}\left(\mathbf{F}_1^{(-1)}(u_1), \dots, \mathbf{F}_N^{(-1)}(u_N)\right) \quad (11.23)$$

### 11.2.1 Fonction de dépendance avec un facteur commun de risque

Dans ce paragraphe, nous supposons un seul facteur de risque  $X$  de moyenne  $\mu$ . Nous en déduisons que les paramètres  $p_n$  sont

$$p_n = P_n \frac{X}{\mu} \quad (11.24)$$

Soit  $\mathbf{F}_n(b_n | X = x)$  la distribution marginale conditionnelle. Nous avons

$$\mathbf{F}_n(b_n | X = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_n < 0 \\ 1 - p_n & \text{si } 0 \leq b_n < 1 \\ 1 & \text{si } b_n \geq 1 \end{cases} \quad (11.25)$$

Pour simplifier l'analyse, nous introduisons une variable aléatoire de mapping  $G_n$  avec  $G_n = g(B_n)$  définie sur la droite réelle. Il existe alors une valeur  $g_n^*$  telle que

$$\Pr \{G_n \leq g_n^*\} = \Pr \{B_n \leq 0\} \quad (11.26)$$

Nous pouvons ainsi écrire les distributions par rapport aux variables aléatoires  $G_n$ . Nous avons

$$\mathbf{F}_n(g_n | X = x) = \begin{cases} 1 - (x/\mu) P_n & \text{si } g_n \leq g_n^* \\ 1 & \text{si } g_n > g_n^* \end{cases} \quad (11.27)$$

et

$$\mathbf{F}_n(g_n) = \begin{cases} 1 - P_n & \text{si } g_n \leq g_n^* \\ 1 & \text{si } g_n > g_n^* \end{cases} \quad (11.28)$$

Puisque les événements de défaut sont indépendants, nous avons<sup>2</sup>

$$\mathbf{F}(g_1, \dots, g_N) = \int_0^\infty \prod_{n=1}^N \mathbf{F}_n(g_n | X = x) h(x) dx \quad (11.29)$$

où  $h(x)$  est la densité du facteur de risque  $X$ .

Nous considérons le cas bivarié. Nous obtenons la table de contingence suivante :

		$B_1$		
		0	1	
$B_2$	0	$1 - (P_1 + P_2) + \mu^{-2} P_1 P_2 (\sigma^2 + \mu^2)$	$P_1 - \mu^{-2} P_1 P_2 (\sigma^2 + \mu^2)$	$1 - P_2$
	1	$P_2 - \mu^{-2} P_1 P_2 (\sigma^2 + \mu^2)$	$\mu^{-2} P_1 P_2 (\sigma^2 + \mu^2)$	$P_2$
		$1 - P_1$	$P_1$	$1$

La probabilité de défaillance jointe est alors  $\mu^{-2} P_1 P_2 (\sigma^2 + \mu^2)$ . Nous remarquons qu'au point de continuité  $(1 - P_1, 1 - P_2)$ , l'expression de la sous-copule entre les deux temps de défaut est

$$\mathbf{C}'(u_1, u_2) = \left( \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu^2} \right) u_1 u_2 - \frac{\sigma^2}{\mu^2} (u_1 + u_2 - 1) \quad (11.30)$$

Nous avons le cas limite  $\mathbf{C}' = \mathbf{C}^\perp$  au point de continuité lorsque  $\sigma^2 \rightarrow 0$ . De plus, nous pouvons montrer facilement que

$$\mathbf{C}' \succ \mathbf{C}^\perp \quad (11.31)$$

**Remarque 41** La fonction de dépendance entre les temps de défaut dans **CreditRisk+** est donc positive.

Si  $X$  est une variable aléatoire  $\Gamma(\alpha, \beta)$ , nous avons

$$\mathbf{C}'(u_1, u_2) = \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) u_1 u_2 - \frac{1}{\alpha} (u_1 + u_2 - 1) \quad (11.32)$$

La fonction de dépendance dépend seulement du paramètre  $\alpha$  (*the shape parameter*). Le paramètre  $\beta$  (*the scale parameter*)  $\beta$  n'a pas d'influence<sup>3</sup>.

<sup>2</sup>  $X$  est une variable aléatoire positive.

<sup>3</sup> Ce résultat se généralise au cas multivarié, puisqu'au point de continuité  $(1 - P_1, \dots, 1 - P_N)$ , nous avons

$$\mathbf{C}(u_1, \dots, u_N) = \sum_{n=0}^N \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\alpha^{n-1}} \sum_{m=0}^n (-1)^{n+m} C_{N-m}^{n-m} \left( \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_m} \prod_{j=1}^m u_{i_j} \right) \quad (11.33)$$

Le cadre original de **CreditRisk+** utilise une approximation Bernoulli-Poisson :

$$1 - p_n \simeq \exp\left(-P_n \frac{X}{\mu}\right) \quad (11.34)$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(g_1, \dots, g_N) &= \int_0^\infty \prod_{n=1}^N \mathbf{F}_n(g_n | X = x) h(x) dx \\ &= \int_0^\infty \prod_{n=1}^N [\mathbf{F}'_n(g_n)]^x h(x) dx \end{aligned} \quad (11.35)$$

où

$$\mathbf{F}'_n(g_n) = \begin{cases} \exp(-P_n/\mu) & \text{si } g_n \leq g_n^* \\ 1 & \text{si } g_n > g_n^* \end{cases} \quad (11.36)$$

D'après MARSHALL et OLKIN [1988], nous pouvons écrire la distribution précédente de la façon suivante :

$$\mathbf{F}(g_1, \dots, g_N) = \psi\left(\sum_{n=1}^N -\ln \mathbf{F}'_n(g_n)\right) \quad (11.37)$$

où  $\psi$  est la transformée de Laplace de la distribution de  $X$ . Si la relation suivante est vérifiée

$$-\ln \mathbf{F}'_n(g_n) = \psi^{-1}(\mathbf{F}_n(g_n)) \quad (11.38)$$

la fonction de dépendance est une sous-copule Frailty :

$$\mathbf{C}'(u_1, \dots, u_N) = \psi\left(\sum_{n=1}^N \psi^{-1}(u_n)\right) \quad (11.39)$$

Lorsque  $X$  est Gamma, nous avons

$$\psi(s) = (1 + \beta s)^{-\alpha} \quad (11.40)$$

La fonction de dépendance est en fait une sous-copule Cook-Johnson ou Clayton :

$$\mathbf{C}'(u_1, \dots, u_N) = \left(u_1^{-1/\alpha} + \dots + u_N^{-1/\alpha} - N + 1\right)^{-\alpha} \quad (11.41)$$

### 11.2.2 Fonction de dépendance avec différents facteurs de risque

En utilisant la même approximation que ci-dessus, nous pouvons montrer que la distribution jointe des variables aléatoires  $G_n$  est

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(g_1, \dots, g_N) &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \prod_{n=1}^N [\mathbf{F}_n(g_n)]^{\theta_n} \prod_{k=1}^K h_k(x_k) dx_k \\ &= \prod_{k=1}^K \int_0^\infty \prod_{n=1}^N [\mathbf{F}_n(g_n)]^{\theta_{n,k} x_k} h_k(x_k) dx_k \end{aligned} \quad (11.42)$$

avec

$$\theta_n = \sum_{k=1}^K \theta_{n,k} x_k \quad (11.43)$$

Au point de continuité  $(\exp(-P_1), \dots, \exp(-P_N))$ , l'expression de la sous-copule est

$$\mathbf{C}'(u_1, \dots, u_N) = \prod_{k=1}^K \psi_k\left(\sum_{n=1}^N \psi_k^{-1}\left(u_n^{\frac{\theta_{n,k}}{\mu_k}}\right)\right) \quad (11.44)$$

avec  $\mu_k = \mathbb{E}[X_k]$ .

Nous pouvons considérer différents cas. Si les défauts sont expliqués par un seul facteur, nous retrouvons le résultat précédent (11.39). Dans le cas une firme / un facteur, nous notons  $N_k$  le nombre de firmes<sup>4</sup> influencées par le facteur de risque  $X_k$ . Nous supposons de plus que les indices sont triés de la façon suivante :

$$\underbrace{u_1, \dots, u_{N_1}}_{X_1} \quad \cdots \quad \underbrace{u_{N_1+\dots+N_{k-1}+1}, \dots, u_{N_1+\dots+N_k}}_{X_k} \quad \cdots \quad \underbrace{u_{N-N_K+1}, \dots, u_N}_{X_K}$$

Il vient que la sous-copule peut être décomposée comme suit :

$$\mathbf{C}'(u_1, \dots, u_N) = \mathbf{C}^\perp(\mathbf{C}'_1(\mathbf{u}_1), \dots, \mathbf{C}'_k(\mathbf{u}_k), \dots, \mathbf{C}'_K(\mathbf{u}_K)) \quad (11.45)$$

avec

$$\mathbf{u}_k = \begin{bmatrix} u_{N_1+\dots+N_{k-1}+1} \\ \vdots \\ u_{N_1+\dots+N_k} \end{bmatrix} \quad (11.46)$$

### 11.3 L'approche par processus d'intensité

Notons par  $(\mathcal{F}_t)$  la filtration, c'est-à-dire l'information générée par les variables d'état. Considérons un processus continu et non-négatif  $\lambda_t$  et  $\theta$  une variable aléatoire exponentielle standard indépendante de  $\mathcal{F}_\infty$ . Dans un modèle à intensité, le temps de défaut  $\tau$  est défini par

$$\tau := \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \lambda_s ds \geq \theta \right\} \quad (11.47)$$

**Exercice 16** *Simuler des temps de défaut lorsque  $\lambda_t = \sigma W_t^2$ . Estimer la fonction de survie par une méthode non paramétrique et comparer celle-ci avec la fonction de survie théorique :*

$$\Pr \{ \tau > t \} = \frac{1}{\sqrt{\cosh(\sigma t \sqrt{2})}} \quad (11.48)$$

Une première idée pour corrélérer les temps de défaut est de généraliser l'approche présente en supposant que les processus d'intensité  $(\lambda_s^1, \dots, \lambda_s^N)$  sont corrélés. Néanmoins, cette méthode ne permet pas d'introduire une dépendance assez forte sur les temps de défaut  $(\tau_1, \dots, \tau_N)$  comme le montrent JOUANIN et al. [2001] sur un exemple.

**Exercice 17** *Considérer deux firmes avec  $\lambda_t^1 = \sigma_1 W_{1,t}^2$  et  $\lambda_t^2 = \sigma_2 W_{2,t}^2$ . Nous supposons que les mouvements browniens sont corrélés avec*

$$\mathbb{E}[W_{1,t} W_{2,t}] = \rho t$$

*Calculer par Monte-Carlo les bornes de la corrélation linéaire  $\rho \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ , du tau de Kendall  $\tau \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$  et du rho de Spearman  $\varrho \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ . Pourquoi la borne inférieure est égale à zéro ?*

Une seconde idée a été proposée récemment par GIESECKE [2001] et SCHÖNBUCHER et SCHUBERT [2001]. Celle-ci consiste à introduire la dépendance sur les variables exponentielles  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_I)$  avec une copule  $\mathbf{C}(\theta_1, \dots, \theta_I)$ .

<sup>4</sup>Bien sûr, nous avons  $N_1 + \dots + N_K = N$ .

**Exercice 18** Considérer deux firmes avec  $\lambda_t^1 = W_{1,t}^2$  et  $\lambda_t^2 = W_{2,t}^2$ . Nous supposons que les mouvements browniens sont indépendants. Simuler des vecteurs de temps de défaut  $(\tau_1, \tau_2)$  lorsque  $\mathbf{C}(\theta_1, \theta_2)$  est une copule Normale de paramètre  $\rho$ . Montrer que

$$\mathbf{C}_- \prec \mathbf{C}(\tau_1, \tau_2) \prec \mathbf{C}_+ \quad (11.49)$$

avec  $\mathbf{C}_- \neq \mathbf{C}^-$  et  $\mathbf{C}_+ \neq \mathbf{C}^+$ .

Une troisième idée a été proposée par LI [2000]. Celle-ci consiste à introduire la dépendance directement sur les temps de défaut en utilisant une copule de survie  $\check{\mathbf{C}}(\tau_1, \tau_2)$ .

**Exercice 19** Reprendre l'exercice précédent. Estimer la fonction de survie de  $(\tau_1, \tau_2)$  lorsque la copule de survie  $\check{\mathbf{C}}(\tau_1, \tau_2)$  est une copule Normale de paramètre  $\rho$ . Pour une valeur donnée de  $\rho$ , comparer cette fonction de survie avec celle obtenue par la seconde méthode.

**Exercice 20** Reprendre l'exercice précédent avec une copule Student à un degré de liberté et de paramètre  $\rho$ .

Lorsque les processus d'intensité sont déterministes, les deux dernières approches coïncident et nous avons  $\tau_n \sim \mathcal{E}(\lambda^n)$ .

**Exercice 21** A partir de la matrice de transition (11.1), calculer les probabilités de défaillance à un an, deux ans, etc. (jusqu'à 30 ans) pour les différents ratings. Calibrer pour chaque rating le taux de risque  $\lambda$ . Simuler des temps de défaut du portefeuille (AAA, BB, B, A, CCC, BBB, CCC) lorsque la copule de survie est une copule Cook-Johnson de paramètre  $\theta$ . Nous supposons que les crédits du portefeuille sont des coupons zéros<sup>5</sup> (risqués). En prenant un taux sans risque égal à 5%, calculer la valeur en risque 1 an, 2 ans, 5 ans et 20 ans du portefeuille lorsque le paramètre  $\theta$  de la copule est égal à 2. Calibrer ensuite la matrice de corrélation constante de la copule Normale afin que la VaR **CreditMetrics** soit égale à celle obtenue par l'approche intensité. Comparer les deux copules obtenues (copule Cook-Johnson de l'approche intensité et copule Normale de **CreditMetrics**). Refaire le même exercice en prenant une copule Cook-Johnson pour modéliser la dépendance de **CreditMetrics**. Conclure.

Pour vous guider, le programme suivant permet de simuler les deux temps de défaut  $\tau_1$  et  $\tau_2$  selon les trois méthodes, et la corrélation  $\rho(\tau_1, \tau_2)$  associée.

```
new;
library copula,pgraph;
CopulaSet;

proc SimulateDefaults(dt,sigma1,sigma2,rho,e);
  local sqrt_dt,t,Ns,lambda0,B1,B2,lambda1,Lambda,cnd0,cnd1,cnd2,tau,u;

  sqrt_dt = sqrt(dt);
  t = 0;
  Ns = rows(e);
  lambda0 = zeros(Ns,2);
  B1 = 0; B2 = 0;
  Lambda = zeros(Ns,2);
  tau = zeros(Ns,2);
  cnd0 = zeros(Ns,2);

  do while 1;
    t = t + dt;
    u = sqrt_dt * rndn(Ns,2);
    B1 = B1 + sigma1 * u[.,1];
    B2 = B2 + sigma2 * (rho*u[.,1] + sqrt(1-rho^2)*u[.,2]);
```

<sup>5</sup>Nous rappelons que

$$B(t, T) = \mathbf{1}\{\tau > t\} \cdot \mathbb{E} \left[ \exp - \int_t^T (r_s + \lambda_s) ds \mid \mathcal{F}_t \right] \quad (11.50)$$

```

lambda1 = (B1.*B1)^(B2.*B2);           /* lambda(t) */
Lambda = Lambda + 0.5*(lambda0+lambda1)*dt; /* int_lambda(t) */
lambda0 = lambda1;

cnd1 = Lambda .>= e;
cnd2 = cnd1 .and (cnd0 .== 0);
if sumc(sumc(cnd2));
    tau = substute(tau,cnd2,t);
endif;

cnd0 = cnd0 .or cnd1;
if sumc(sumc(cnd0)) == (2*Ns);
    break;
endif;

endo;

retp(tau);
endp;

proc rndexp(r,c);
    retp( -ln(rndu(r,c)) );
endp;

rndseed 123;

ns = 1000;      /* Number of simulations of default times */
sigma1 = 1;
sigma2 = 1;
dt = 1/365;

rho_w = 0.75;   /* Correlation parameter between the two brownian motions */

e = rndexp(ns,2); /* Simulation of two independent exponential variates */

tau1 = SimulateDefaults(dt,sigma1,sigma2,rho_w,e); /* Simulated default times
::
:: case 1
:: correlated BM / uncorrelated EV
::
*/

rho_SurvivalCopula = 0.75; /* Parameter of the survival copula between
the two random default times */
{u1,u2} = rndCopulaNormal2(rho_SurvivalCopula,ns); /* Simulation of the survival Normal copula */

tau2 = rndCopulaEmpiricalQuantile(u1~u2,tau1); /* Simulated default times
::
:: case 2
:: Survival Normal Copula
:: Note that rho_w has no impact on tau 2
*/

rho_Copula = 0.75; /* Parameter of the copula between
the two exponential variates */
{u1,u2} = rndCopulaNormal2(rho_Copula,ns); /* Simulation of the Normal copula */
e = -ln(u1~u2); /* Simulation of the two 'correlated' exp. variates */

tau3 = SimulateDefaults(dt,sigma1,sigma2,rho_w,e); /* Simulated default times
::

```

```

:: case 3
:: correlated BM / correlated EV
::
*/

print ftos(submat(corr(x(1),1,2),'Correlation between the two survival times -- Case I : %1f',5,4);
print ftos(submat(corr(x(2),1,2),'Correlation between the two survival times -- Case II : %1f',5,4);
print ftos(submat(corr(x(3),1,2),'Correlation between the two survival times -- Case III : %1f',5,4);

```

**Remarque 42** Pour approfondir cette section, vous pouvez consulter les travaux de HAMILTON, JAMES et WEBBER [2001], JOUANIN et al. RONCALLI [2001], MASHAL et NALDI [2002], SCHMIDT et WARD [2002], ainsi que les références déjà citées.

## Références

- [1] COUTANT, S., P. MARTINEU, J. MESSINES, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2001], Credit risk modelling with copulas, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [2] Credit Suisse [1997], **CreditRisk+** : A Credit Risk Management Framework, Credit Suisse Financial Products
- [3] DUFFIE, D. et K. SINGLETON [1998], Simulating correlated defaults, Graduate School of Business, Stanford University, *Working Paper*
- [4] GIESECKE, K. [2001], Structural modeling of correlated defaults with incomplete information, Humboldt-Universität zu Berlin, *Working Paper*
- [5] GUPTON, G.M., C.C. FINGER et M. BHATIA [1997], **CreditMetrics** — Technical Document, Morgan Guaranty Trust Co.
- [6] HAMILTON, D., J. JAMES et N. WEBBER [2001], Copula methods and the analysis of credit risk, University of Warwick, *Working Paper*
- [7] JOUANIN, J-F., G. RAPUCH, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2001], Modelling dependence for credit derivatives with copulas, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [8] JOUANIN, J-F., G. RIBOULET et T. RONCALLI [2001], Beyond conditionally independent defaults, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [9] KAVVATHAS, D. [1999], Estimating credit transition probabilities for corporate bonds, University of Chicago, *Working Paper*
- [10] LI, D.X. [2000], On default correlation : a copula function approach, *Journal of Fixed Income*, **9(4)**, 43-54
- [11] LI, D.X. [2000], The valuation of basket credit derivatives : a copula function approach, *Workshop on Options in Financial Products : Approaches to Valuation*, 8 December, Toronto
- [12] MASHAL, R. et M. NALDI [2002], Pricing multivariate credit derivatives : heavy tailed hybrid approach, Graduate School of Business, Columbia University, *Working Paper*
- [13] SCHMIDT, W. et I. WARD [2002], Pricing default baskets, *Risk*, 111-114, January
- [14] SCHÖNBUCHER, P.J. et D. SCHUBERT [2001], Copula-dependent default risk in intensity models, Department of Statistics, Bonn University, *Working Paper*

12

Risque de modèle et risque de paramètre



# Annexes



# Annexe A

## Hoeffding revisited



Graphique A.1. Wassily Hoeffding

We have seen previously that the minimal and maximal distributions of the Fréchet class  $\mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$  are  $\mathbf{C}^-(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2))$  and  $\mathbf{C}^+(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2))$ . There is a controversy about the paternity of these bounds. In 1991, Schweizer writes

*[...] the bounds are commonly known as the “Fréchet bounds” and the standard reference is Fréchet’s groundbreaking 1951 paper. Again, they may be found (in essence) in Hoeffding’s paper. However, the attribution to Fréchet is entirely appropriate : for, as A.W. Marshall reminded me at the Symposium, they already appear (for the  $n$ -dimensional case, as bounds on the probability of the joint occurrence of  $n$  events) in a paper which Fréchet wrote in 1935.*

However, in the editor’s preface of the proceedings of the second conference, Rüschendorf, Schweizer and Taylor seem to adopt another position :

*Fréchet’s work is very well known. However it seems to us that Hoeffding’s contribution have not been sufficiently recognized and that he has not been given the credit he so justly deserves. This is perhaps due to the fact that his basic paper on scale-invariant correlation theory was published just at the beginning of the Second World War in a German journal of limited circulation. We would therefore like to suggest that henceforth we speak of Fréchet-Hoeffding classes, Fréchet-Hoeffding bounds (briefly, FH-classes, FH-bounds), etc. rather than Fréchet classes, Fréchet bounds, etc.*

These terminologies have been adopted by Nelsen for his book.

In 1940, Wassily Hoeffding published “Masstabinvariante Korrelationstheorie” in the journal *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*. This article has been forgotten during a long time, but we can now find an English translation in [1]. The subject of the paper is to study the properties of multivariate distributions that are not affected by the change of scale of the random variables. Let  $X_1$  and  $X_2$  be two random variables with distributions  $\mathbf{F}_1$  and  $\mathbf{F}_2$ . Hoeffding

introduces a *standardization* such that the transformed variables  $U_1 = g_1(X_1)$  and  $U_2 = g_2(X_2)$  have given distributions  $\mathbf{S}_1$  and  $\mathbf{S}_2$ . In his first paper [2], he deals with continuous distributions<sup>1</sup>. Moreover, he assumes that the transformations are continuous, differentiable and increasing. He then shows that the joint density of  $g_1(X_1)$  and  $g_2(X_2)$  is then

$$s(g_1(x_1), g_2(x_2)) = \frac{f(x_1, x_2)}{g_1'(x_1) g_2'(x_2)} \quad (\text{A.1})$$

In order to keep mathematical treatment easily, Hoeffding chooses to use a standardization based on the uniform distribution  $\mathbf{U}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ . The associated transformation is also

$$u_i = g_i(x_i) = \mathbf{F}_i(x_i) - \frac{1}{2} \quad (\text{A.2})$$

It comes that the standardized joint distribution  $\mathbf{S}$  and the original distribution  $\mathbf{F}$  are linked by the following relationships

$$\mathbf{S}(u_1, u_2) = \mathbf{F}\left(\mathbf{F}_1^{-1}\left(\frac{1}{2} + u_1\right), \mathbf{F}_2^{-1}\left(\frac{1}{2} + u_2\right)\right) \quad (\text{A.3})$$

and

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \mathbf{S}\left(\mathbf{F}_1(x_1) - \frac{1}{2}, \mathbf{F}_2(x_2) - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.4})$$

Hoeffding ends the second paragraph of [2] by remarking that the random variables  $X_1$  and  $X_2$  are independent if and only if the standardized distribution  $\mathbf{S}$  is  $\mathbf{S}^\perp(u_1, u_2) = \left(\frac{1}{2} + u_1\right)\left(\frac{1}{2} + u_2\right)$ . The third paragraph contains the most important results of the paper. First, Hoeffding shows that the minimal and the maximal distributions of  $\mathbf{S}$  are  $\mathbf{S}^-(u_1, u_2) = \max(0, u_1 + u_2)$  and  $\mathbf{S}^+(u_1, u_2) = \min\left(\frac{1}{2} + u_1, \frac{1}{2} + u_2\right)$ . He gives also a graphical representation of the three distributions  $\mathbf{S}^\perp$ ,  $\mathbf{S}^-$  and  $\mathbf{S}^+$ . Moreover, he remarks that  $0 \leq \partial_1 \mathbf{S}(u_1, u_2) \leq 1$  and  $0 \leq \partial_2 \mathbf{S}(u_1, u_2) \leq 1$ . The next three paragraphs treat about scale-invariant measures of dependence. First, he calculates the standardized correlation coefficient, which has the following expression

$$\varrho = 12 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(\mathbf{S}(u_1, u_2) - \left(\frac{1}{2} + u_1\right)\left(\frac{1}{2} + u_2\right)\right) du_1 du_2 \quad (\text{A.5})$$

Hoeffding does the following remarks :

[...] the standardized correlation coefficient  $\varrho$  possesses two essential properties which the ordinary correlation of  $\rho$  does not :

1.  $\varrho$  is scale invariant,
2.  $\varrho$  attains the bounds  $\pm 1$  not only for linear, but for any one-to-one and continuous functional dependence.

Thus the standardized correlation coefficient  $\varrho$  must always be preferred to the ordinary correlation coefficient  $\rho$ , if the regression is not linear or the form of the regression curve is unknown, provided it is assumed that these are monotonic.

For continuous distribution,  $\varrho$  is the parameter corresponding to the rank correlation coefficient introduced by Spearman.

Hoeffding shows also that the mean square contingency  $\varphi^2$  measure of Pearson take the following form<sup>2</sup>

$$\varphi^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} (s(u_1, u_2) - 1)^2 du_1 du_2 \quad (\text{A.6})$$

<sup>1</sup>The case of discontinuous distributions is treated in [3].

<sup>2</sup>As noted by Hoeffding, the use of the weights in the original definition of Pearson becomes *natural* :

$$\varphi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(f(x_1, x_2) - f(x_1)f(x_2))^2}{f(x_1)f(x_2)} dx_1 dx_2$$

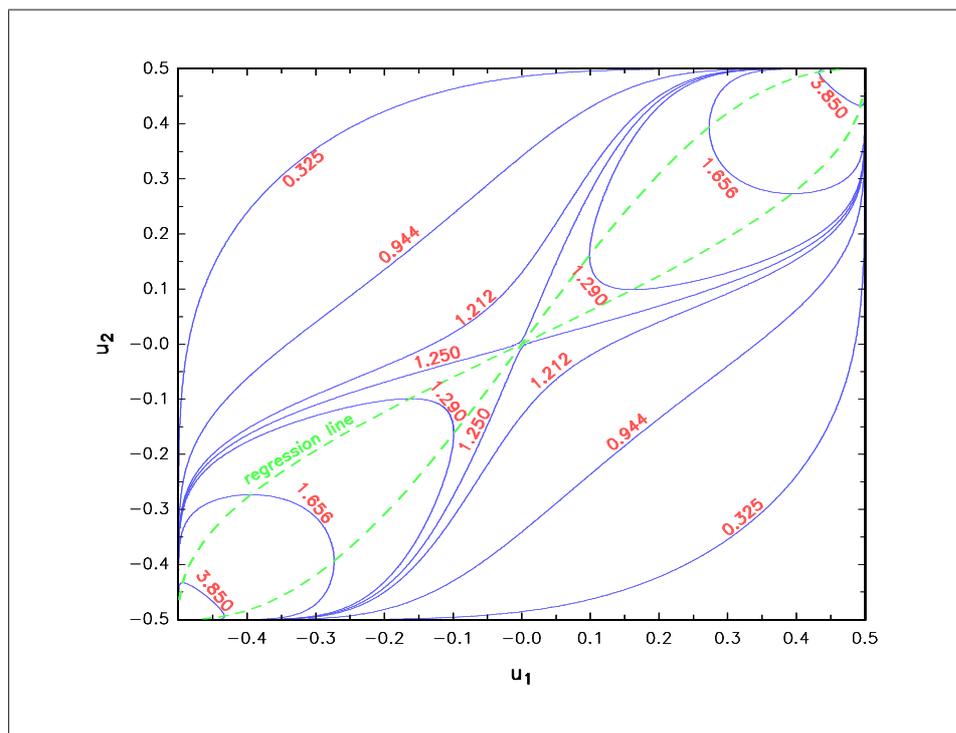
The case of stochastic independence corresponds to  $\varphi^2 = 0$ . Instead of the density  $s(u_1, u_2)$ , Hoeffding uses the distribution  $\mathbf{S}(u_1, u_2)$  to define another measure of dependence :

$$\Phi^2 = 90 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left( \mathbf{S}(u_1, u_2) - \left( \frac{1}{2} + u_1 \right) \left( \frac{1}{2} + u_2 \right) \right)^2 du_1 du_2 \quad (\text{A.7})$$

Hoeffding gives different arguments in order to prefer this measure than the  $\varphi^2$  measure to characterize the dependence between random variables. Note that  $\Phi^2$  “takes the value 1 for both monotonically increasing and monotonically decreasing continuous functional dependence and is less than 1 otherwise”. The third part of the article is very technical and concerns the expansion of standardized density and distribution functions by orthogonal polynomials. This part is less interesting for us, which is not the case of the last part which concerns the standardization of the bivariate normal distribution. To our knowledge, **this is the first time that the Normal copula appears**. Hoeffding shows for example that the density  $s(u_1, u_2)$  is

$$s(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left( -\frac{\rho}{2(1-\rho^2)} \left( \rho [\Phi^{-1}(u_1)]^2 - 2\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) + \rho [\Phi^{-1}(u_2)]^2 \right) \right) \quad (\text{A.8})$$

To convince of the modernity of the Hoeffding’s paper, we do not resist to reproduce his last figure which shows the countour lines of the Normal copula density !



Graphique A.2. The contour lines of the Normal standardized density (HOEFFDING [1940])

It is obvious that the standardized distribution  $\mathbf{S}$  of Hoeffding is a copula function. The difference with the Sklar’s copula is the choice of the normalization. In place of the uniform distribution  $\mathbf{U}_{[0,1]}$ , Hoeffding has chosen another uniform distribution  $\mathbf{U}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ . But we have the following relationships :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u_1, u_2) &= \mathbf{C} \left( u_1 + \frac{1}{2}, u_2 + \frac{1}{2} \right) \\ s(u_1, u_2) &= c \left( u_1 + \frac{1}{2}, u_2 + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^\perp(u_1, u_2) &= \mathbf{S}^\perp\left(u_1 - \frac{1}{2}, u_2 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + u_1 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + u_2 - \frac{1}{2}\right) = u_1 u_2 \\
\mathbf{C}^-(u_1, u_2) &= \mathbf{S}^-\left(u_1 - \frac{1}{2}, u_2 - \frac{1}{2}\right) = \max\left(0, u_1 - \frac{1}{2} + u_2 - \frac{1}{2}\right) = \max(0, u_1 + u_2 - 1) \\
\mathbf{C}^+(u_1, u_2) &= \mathbf{S}^+\left(u_1 - \frac{1}{2}, u_2 - \frac{1}{2}\right) = \min\left(\frac{1}{2} + u_1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + u_2 - \frac{1}{2}\right) = \min(u_1, u_2)
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Moreover, the works of Hoeffding point **clearly** to the results of SCHWEIZER and WOLFF [1981]. Nevertheless, the choice of the transformation is not important for Hoeffding :

*As stated previously, instead of the uniform distribution, we could have taken any other univariate distribution whatever for  $S_1$  and  $S_2$ ; [...] Thus, for example, the choice of the univariate Gaussian distribution for  $S_1$  and  $S_2$  suggests itself. But one must bear in mind that if it is not taken to be the uniform distribution then the mathematical treatment becomes more difficult and the relationships less clear.*

## Références

- [1] FISHER, N.I. and P.K. SEN (Eds.) [1994], The Collected Works of Wassily Hoeffding, *Springer Series in Statistics*, Springer-Verlag, New York
- [2] Hoeffding, W. [1940], Masstabinvariante Korrelationstheorie, *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, **5**, 181-233
- [3] Hoeffding, W. [1941], Masstabinvariante Korrelationstheorie für diskontinuierliche verteilungen, *Arkiv für Mathematiska Wirtschafs- und Sozialforschung*, **7**, 49-70
- [4] SCHWEIZER, B. and E. WOLFF [1981], On nonparametric measures of dependence for random variables, *Annals of Statistics*, **9**, 879-885

# Annexe B

## The uniform representation of Kimeldorf and Sampson

The works of KIMELDORF and SAMPSON begin with the publication of the article [4] in 1975. In this article, they “*discuss the problem of generating one-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals  $\mathbf{F}_1$  and  $\mathbf{F}_2$* ”. They then propose to use the **method of translation**. This method have been introduced by Edgeworth in 1898 for the multivariate normal distribution. The general case is considered in NATAF [1962] and MARDIA [1970]. Following [14], if  $\mathbf{F}$  is a continous multivariate distribution with margins  $\mathbf{F}_n$  and  $\mathbf{G}_n$  are  $n$  univariate distributions, then there exists a one-to-one correspondance between  $\mathbf{F}_n(x_n)$  and  $\mathbf{G}_n(y_n)$  which does not change the probability  $u$  :

$$y_n = \mathbf{G}_n^{-1}(u) = \mathbf{G}_n^{-1}(\mathbf{F}_n(x_n)) \quad (\text{B.1})$$

and

$$x_n = \mathbf{F}_n^{-1}(u) = \mathbf{F}_n^{-1}(\mathbf{G}_n(y_n)) \quad (\text{B.2})$$

Nataf remarks also that

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(y_1, \dots, y_N) &= \mathbf{F}(x_1, \dots, x_N) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{G}_1(y_1)), \dots, \mathbf{F}_N^{-1}(\mathbf{G}_N(y_N))) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$\mathbf{G}$  is a multivariate distribution with margins  $\mathbf{G}_n$ . If  $\mathbf{F}$  denotes a family of multivariate distributions with (possibly multidimensional) parameter  $\theta$ ,  $\mathbf{G}$  is known as a translation family (see [11]) :

$$\mathbf{F} \in \mathcal{F}(\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N) \Rightarrow \mathbf{G} \in \mathcal{F}(\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_N) \quad (\text{B.4})$$

As noted by Mardia [10], the translation method is one of most simple technique to generate families of distribution with given marginals. As we saw previously, important research have been done to construct families of bivariate distributions with contains the Fréchet bounds  $\mathbf{F}^-$  and  $\mathbf{F}^+$  and the product distribution  $\mathbf{F}^\perp$ . In this case, the family is called *comprehensive* (DEVROYE [1986], page 581). KIMELDORF and SAMPSON [1975] stated that only two families were known to verify these properties. The first one was due to PLACKETT [1965]. It

satisfies the following equation<sup>1</sup>

$$\theta = \frac{\mathbf{F}(x_1, x_2; \theta) [1 - \mathbf{F}_1(x_1) - \mathbf{F}_2(x_2) + \mathbf{F}(x_1, x_2; \theta)]}{[\mathbf{F}_1(x_1) - \mathbf{F}(x_1, x_2; \theta)] [\mathbf{F}_2(x_2) - \mathbf{F}(x_1, x_2; \theta)]} \quad (\text{B.7})$$

The second one<sup>2</sup> was due to MARDIA [1970] :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_1, x_2; \theta) &= \frac{1}{2} \theta^2 (1 - \theta) \mathbf{F}^-(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) + \\ &\quad \mathbf{F}^\perp(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) + \\ &\quad \frac{1}{2} \theta^2 (1 + \theta) \mathbf{F}^+(\mathbf{F}_1(x_1), \mathbf{F}_2(x_2)) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

However, Kimeldorf and Sampson remark that this second family is “a convex combinations involving  $\mathbf{F}^-$ ,  $\mathbf{F}^\perp$  and  $\mathbf{F}^+$  and so is not an absolutely continuous distribution”. They also propose to construct families  $\mathbf{F}(x_1, x_2; \theta)$  which satisfy the following conditions<sup>3</sup> :

1.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^-$  when  $\theta = -1$  ;
2.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^\perp$  when  $\theta = 0$  ;
3.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^+$  when  $\theta = 1$  ;
4. For fixed  $x_1$  and  $x_2$ ,  $\mathbf{F}(x_1, x_2; \theta)$  is continuous in  $\theta$  ;
5. For fixed  $\theta$ ,  $\mathbf{F}(x_1, x_2; \theta)$  is an absolutely continuous cdf.

Kimeldorf and Sampson prove then the main theorem of [4] :

**Theorem 1 (Kimeldorf and Sampson [1975a, theorem 1, p. 297])** *Let  $\mathbf{F}(x_1, x_2; \theta)$  be a family of cdf's having fixed absolutely continuous marginals  $\mathbf{F}_1$  and  $\mathbf{F}_2$  and satisfying any subset of (1)-(5). Let  $\mathbf{G}_1$  and  $\mathbf{G}_2$  be absolutely continuous cdf's. Then  $\mathbf{G}(x_1, x_2; \theta) = \mathbf{F}(\mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{G}_1(x_1)), \mathbf{F}_2^{-1}(\mathbf{G}_2(x_2)); \theta)$  is a family of cdf's with fixed marginals  $\mathbf{G}_1$  and  $\mathbf{G}_2$  which satisfies the same subset of (1)-(5) as does  $\mathbf{F}$ .*

In order to illustrate this theorem, Kimeldorf and Sampson construct a **bivariate distribution with uniform marginals**. Without knowing it, they construct a **2-copula**. It is certainly this example that gives them the idea to define their **uniform representation**.

The second paper of Kimeldorf and Sampson begins where the first one finishes : it “explores the representation of bivariate distributions in terms of their bivariate uniform translates”. In [5], they define the uniform representation  $\mathbf{U}$  of  $\mathbf{F}$  by

$$\mathbf{U}(u_1, u_2) = \mathbf{F}\left(\mathbf{F}_1^{(-1)}(u_1), \mathbf{F}_2^{(-1)}(u_2)\right) \quad (\text{B.9})$$

In Sklar's terminology,  $\mathbf{U}$  is indeed a copula function. More important is the notion of **representation invariance** introduced by Kimeldorf and Sampson in the section 4 :

**Definition 1 (Kimeldorf and Sampson [1975b, p. 623])** *Let  $\sim$  denotes the following equivalence relation :  $\mathbf{F} \sim \mathbf{G}$  if and only if they have the same uniform representation. A property (P) is said to be representation invariant if  $\mathbf{F} \sim \mathbf{G}$  and  $\mathbf{F}$  has the property (P), then  $\mathbf{G}$  has also the property (P).*

It is obvious that the property (P) is a scale-invariant property in the terminology of Hoeffding. Curiously, Kimeldorf and Sampson cite the article [2] of Hoeffding in the first paper, but not in the “uniform representation” paper. It seems also that they do not show the link between their uniform representation  $\mathbf{U}$  and the

<sup>1</sup>Plackett's family of copulas is then

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \theta) = \frac{1}{2} (\theta - 1)^{-1} \left[ \varpi - \sqrt{\varpi^2 - 4\theta(\theta - 1)u_1u_2} \right] \quad (\text{B.5})$$

where

$$\varpi = 1 + (\theta - 1)(u_1 + u_2) \quad (\text{B.6})$$

(see MARDIA [1970] paragraphs 8.1 and 8.3 or NELSEN [1999] paragraph 3.3.1). Moreover, Mardia shows that  $\mathbf{C}^-$ ,  $\mathbf{C}^\perp$  and  $\mathbf{C}^+$  correspond respectively to  $\theta = 0$ ,  $\theta = 1$  and  $\theta \rightarrow \infty$ .

<sup>2</sup>This family is in fact a restriction of the Fréchet's family (see NELSEN [1991] page 58).

<sup>3</sup>For convenience, they set  $\theta \in [-1, 1]$ .

standardization distribution  $\mathbf{S}$  of Hoeffding. Moreover, they know the works of Nataf, who cites the paper of Sklar. Unfortunately, they did not refer to this paper, and did not see that their uniform representation  $\mathbf{U}$  is exactly the copula  $\mathbf{C}$  of Sklar. Nevertheless, because a distribution has a representation invariant property if the uniform representation has this property, they saw that  $\mathbf{U}$  can be used to study some concepts of dependence. In particular, they gave some examples for association, total positivity, maximal correlation and positively quadrant dependence. We can also remark that they first give the copula representation of the Marshall-Olkin family (see their equation 2.1 page 620). However, even if they have remarked that some dependence concepts are related to the uniform representation, they did not see **explicitly** that it is the dependence function.

Their third article is very important in the history of copulas, because it is the main inspiration of the *Shuffles of Min* of MIKUSIŃSKI, SHERWOOD and TAYLOR [1992] and the starting point of the studies of the uniform convergence problem. KIMELDORF and SAMPSON [1978] show that one can pass from stochastic dependence to complete dependence in the natural sense of weak convergence. To illustrate this point, they consider the following example :

*Partition the unit square into  $n^2$  congruent squares and denote by  $(i, j)$  the square whose upper right corner is the point with coordinates  $x = i/n, y = j/n$ . Similarly, partition each of these  $n^2$  squares into  $n^2$  subsquares and let  $(i, j, p, q)$  denote subsquare  $(p, q)$  of square  $(i, j)$ . Now let the bivariate rv  $(U_n, V_n)$  distribute mass  $n^{-2}$  uniformly on either one of the diagonals of each of the  $n^2$  subsquares of the form  $(i, j, j, i)$  for  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ .*

We reproduce the example of Kimeldorf and Sampson [6] in figure B.1. The authors show that the copula  $\mathbf{C}_n$  of the random variables  $(U_n, V_n)$  converges in law to the product copula  $\mathbf{C}^\perp$ . The proof of this result is very intuitive<sup>4</sup> if we remark that the mass is distributed uniformly in the unit square  $[0, 1]^2$ . This example leads Kimeldorf and Sampson to propose a new definition of the complete dependence. In 1963, Lancaster [9] has defined the complete dependence as follows :

**Definition 2 (Lancaster [1963, p. 1315])** *A random variable  $Y$  is said to be **completely dependent** on a random variable  $X$  if there exists a function  $f$  such that*

$$\Pr \{Y = f(X)\} = 1 \tag{B.10}$$

*If also  $X$  is completely dependent on  $Y$ , the two variables are said to be **mutually completely dependent**.*

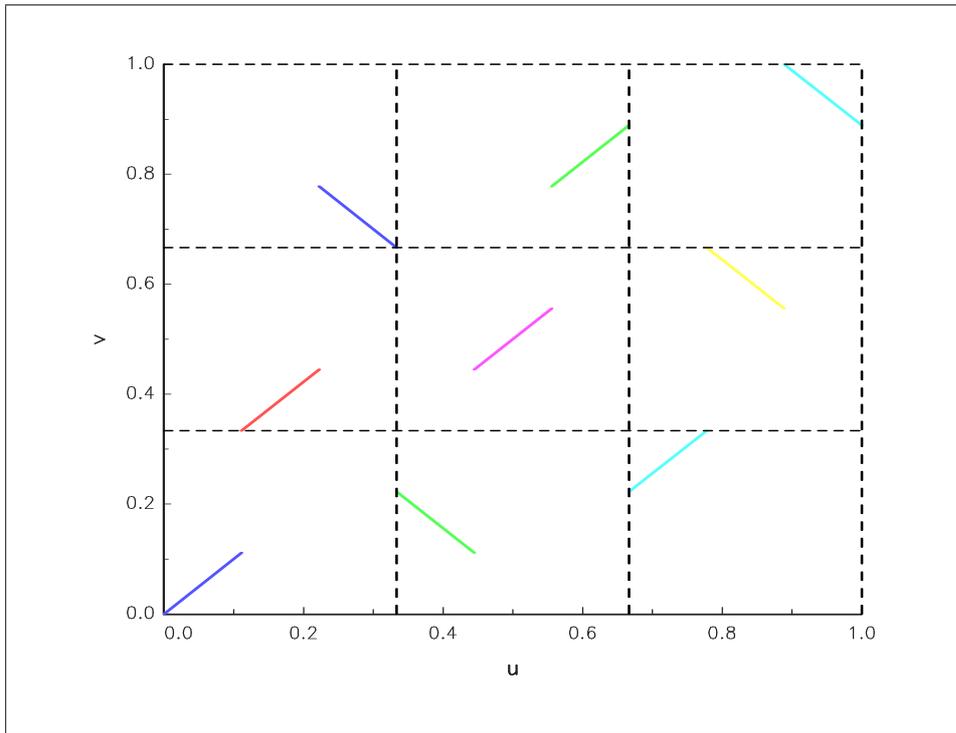
**Definition 3 (Kimeldorf and Sampson [1978, definition 1, p. 897])**  *$Y$  is said to be **monotone dependent** on  $X$  if the function  $f$  in equation (B.10) is monotone.*

In the previous example,  $(U_n, V_n)$  are mutually completely dependent whereas they are independent in the limit case  $n \rightarrow \infty$ . This problem is avoided in the case of the monotone dependence, because if  $(U_n, V_n)$  are monotone dependent, the random variables are also monotone dependent in the limit case.

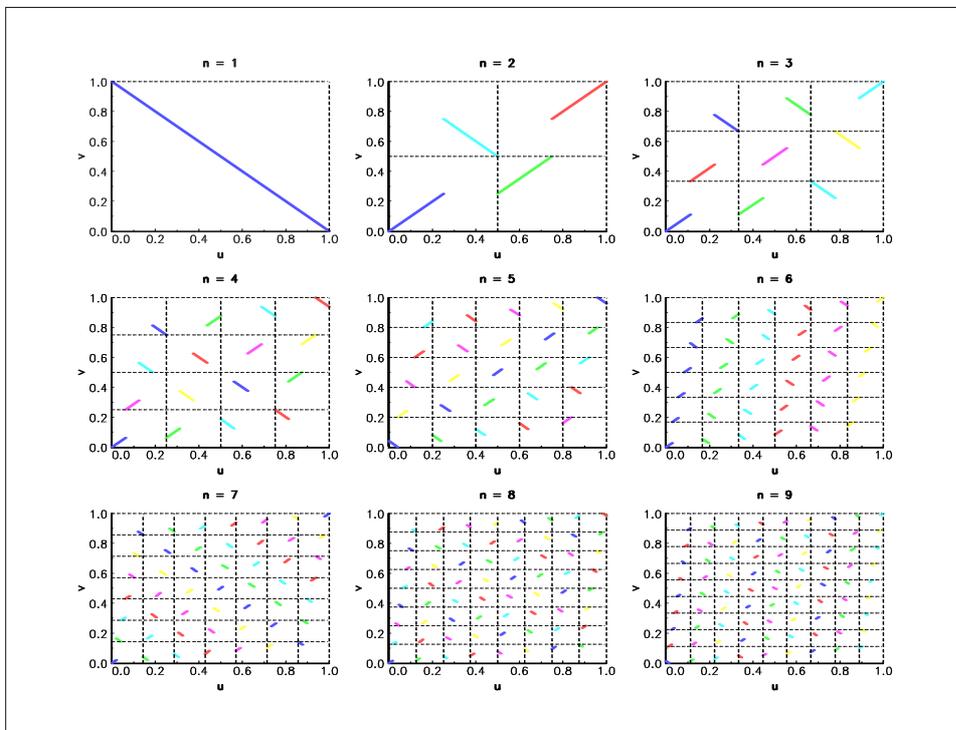
## Références

- [1] DEVROYE, L. [1986], Non-Uniform Random Variate Generation, Springer-Verlag, New York
- [2] Hoeffding, W. [1940], Masstabinvariante Korrelationstheorie, *Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, **5**, 181-233
- [3] Hoeffding, W. [1941], Masstabinvariante Korrelationstheorie für diskontinuierliche verteilungen, *Arkiv für Mathematiska Wirtschafs- und Sozialforschung*, **7**, 49-70
- [4] KIMELDORF, G. and A. SAMPSON [1975a], One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals, *Communications in Statistics*, **4(3)**, 293-301
- [5] KIMELDORF, G. and A. SAMPSON [1975b], Uniform representations of bivariate distributions, *Communications in Statistics*, **4(7)**, 617-627
- [6] KIMELDORF, G. and A. SAMPSON [1978], Monotone dependence, *Annals of Statistics*, **6(4)**, 895-903
- [7] KIMELDORF, G. and A. SAMPSON [1987], Positive dependence orderings, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **39**, 113-128

<sup>4</sup>A more rigorous proof can be found in MIKUSIŃSKI, SHERWOOD and TAYLOR [1992] (see also NELSEN [1999] page 61).



Graphique B.1. Support of the distribution of  $(U_3, V_3)$  (KIMELDORF and SAMPSON [1978])



Graphique B.2. Illustration of the convergence to the product copula  $\mathbf{C}^\perp$

- [8] KIMELDORF, G. and A. SAMPSON [1989], A framework for positive dependence, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **41**, 31-45
- [9] LANCASTER, H.O. [1963], Correlation and complete dependence of random variables, *Annals of Mathematical Statistics*, **34**, 1315-1321
- [10] MARDIA, K.V. [1970a], Families of Bivariate Distributions, *Griffin's Statistical Monographs & Courses*, **27**, Charles Griffin & Company Ltd, London
- [11] MARDIA, K.V. [1970b], A translation family of bivariate distributions and Fréchet Bounds, *Sankyā : The Indian Journal of Statistics A*, **32**, 119-122
- [12] METRY, M.H. and A.R. SAMPSON [1991], A family of partial orderings for positive dependence among fixed marginal bivariate distributions, in G. Dall'Aglio, S. Kotz and G. Salinetti (Eds.), *Advances in Probability Distributions with Given Marginals (Beyond the Copulas)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [13] MIKUSIŃSKI, P., H. SHERWOOD and M.D. TAYLOR [1992], Shuffles of min, *Stochastica*, **13**, 61-74
- [14] NATAF, A. [1962a], Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **255**, 42-43
- [15] NATAF, A. [1962b], Etude graphique de détermination de distributions de probabilités planes dont les marges sont données, Publ. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **11**, 247-260
- [16] NELSEN, R.B. [1999], An Introduction to Copulas, *Lectures Notes in Statistics*, **139**, Springer Verlag, New York
- [17] PLACKETT, R.L. [1965], A class of bivariate distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **60**, 516-522



# Annexe C

The dependence function of Paul Deheuvels



# Annexe D

## Markov Operators and Copulas

In what follows, copulas are always of dimension two and  $\mathcal{C}$  denotes the set of 2-copulas. The link between Markov operators and 2-copulas have been done in the second conference “*Distributions with Fixed Marginals, Doubly Stochastic Measures, and Markov Operators*” in Seattle in 1993. The connection has been exhibited by OLSEN, DARSOW and NGUYEN [1996], only after discovering the relationship between Markov processes and copulas (see their seminal article [7]). However, to clarify our purpose, we have preferred to present in a first time Markov operators.

### D.1 The characterizations of Brown and Ryff

Markov operators have been introduced by Brown [4] in 1966. The original definition is based on Markov processes. Let  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  be a probabilistic space. We denote  $P_{s,t}(x, \mathcal{A})$  a stochastic transition function and  $m$  an *invariance measure*<sup>1</sup> for  $P_{s,t}(x, \mathcal{A})$ . Brown remarks that we can define a bounded linear operator  $\mathbf{T}$  in the following way

$$\mathbf{T}[f](x) = \int_{\Omega} f(y) P_{s,t}(x, dy) \quad (\text{D.2})$$

for every  $f \in L^{\infty}(\Omega)$  and shows that  $\mathbf{T}$  has the following properties

**Property 1**  $\mathbf{T}$  is positive i.e.  $\mathbf{T}[f] \geq 0$  whenever  $f \geq 0$ ;

**Property 2** 1 is a fixed point of  $\mathbf{T}$ .

**Property 3**  $\mathbb{E}[\mathbf{T}[f]] = \mathbb{E}[f]$  for every  $f \in L^{\infty}(\Omega)$ .

By collecting these properties, Brown defines then Markov operators without referring to Markov processes :

**Definition 4 (Brown [1966, p. 15])** Let  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  be a probabilistic space. A linear operator  $\mathbf{T} : L^{\infty}(\Omega) \rightarrow L^{\infty}(\Omega)$  is a Markov operator if

- (a)  $\mathbf{T}$  is positive i.e.  $\mathbf{T}[f] \geq 0$  whenever  $f \geq 0$ ;
- (b) 1 is a fixed point of  $\mathbf{T}$ .
- (c)  $\mathbb{E}[\mathbf{T}[f]] = \mathbb{E}[f]$  for every  $f \in L^{\infty}(\Omega)$ .

---

<sup>1</sup> $m$  verifies that

$$\int_{\Omega} P_{s,t}(x, \mathcal{A}) m(dx) = m(\mathcal{A}) \quad (\text{D.1})$$

**Example 21** Because of normalisation,  $\Omega$  is generally taken to  $[0, 1]$ . We consider below some examples of Markov operators when  $f \in L^\infty([0, 1])$ .

- We define  $\mathbf{T}[f]$  in the following way

$$\mathbf{T}[f](x) = \int_{[0,1]} f(y) \, dy \quad (\text{D.3})$$

If  $f \geq 0$ , it comes that  $\mathbf{T}[f](x) \geq 0$ . We verify that  $\mathbf{T}[1](x) = \int_{[0,1]} dy = 1$ . Moreover, we have  $\mathbb{E}[\mathbf{T}[f]] = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(y) \, dy \, dx = \int_{[0,1]} f(y) \, dy = \mathbb{E}[f]$ . We conclude that  $\mathbf{T}$  defined by the expression (D.3) is a Markov operator.

- Let us now consider a more complicated example

$$\mathbf{T}[f](x) = \int_{[0,1]} \frac{2x(1-x+xy)}{(x+y-xy)^3} f(y) \, dy \quad (\text{D.4})$$

We can verify that  $\frac{2x(1-x+xy)}{(x+y-xy)^3} \geq 0$  for every  $(x, y)$  in  $[0, 1]^2$ , and so we conclude that  $\mathbf{T}[f](x) \geq 0$ . We remark that

$$\begin{aligned} \mathbf{T}[1](x) &= \int_{[0,1]} \frac{2x(1-x+xy)}{(x+y-xy)^3} \, dy \\ &= \left[ \frac{y^2}{(x+y-xy)^2} \right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{T}[f]] &= \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \frac{2x(1-x+xy)}{(x+y-xy)^3} f(y) \, dy \, dx \\ &= \int_{[0,1]} \left[ \frac{x^2}{(x+y-xy)^2} \right]_0^1 f(y) \, dy \\ &= \int_{[0,1]} f(y) \, dy \\ &= \mathbb{E}[f] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$\mathbf{T}$  defined by (D.4) is a Markov operator too.

- We take now

$$\mathbf{T}[f](x) = \int_{[0,1]} xy^2 f(y) \, dy \quad (\text{D.7})$$

We can check easily the positivity of  $\mathbf{T}$ . However,  $\mathbf{T}$  is not a Markov operator because we have  $\mathbf{T}[1](x) = \frac{1}{3}x \neq 1$ . If we take now

$$\mathbf{T}[f](x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{3}y^2 f(y) \, dy \quad (\text{D.8})$$

the two first properties are verified. However, the third property fails because  $\mathbb{E}[\mathbf{T}[f]] = \int_{[0,1]} \frac{1}{3}y^2 f(y) \, dy \neq \mathbb{E}[f]$ .

We have to note that if this definition is due to BROWN [1966], some authors have before studied such linear operators. For example, RYFF [1963] gives a representation of doubly stochastic operators based on doubly stochastic measures. In 1937, Kantorovitch and Vulich showed that the general form of operators which transforms  $L^1([0, 1])$  into  $L^\infty([0, 1])$  is given by<sup>2</sup>

$$\mathbf{T}[f](x) = \frac{d}{dx} \int_0^1 \mathbf{K}(x, y) f(y) \, dy \quad (\text{D.9})$$

<sup>2</sup>Theorem 12, p. 139.

where  $\mathbf{K}$  is  $L^1([0, 1]^2)$  measurable and satisfies :

- (d)  $\mathbf{K}(0, y) = 0$ ;
- (e)  $\text{ess sup}_y V[\mathbf{K}(x, y)] = C < +\infty - V[\mathbf{K}(x, y)]$  is the total variation of  $\mathbf{K}$ ;
- (f)  $x \mapsto \int_0^1 \mathbf{K}(x, y) f(y) dy$  is absolutely continuous for every  $f \in L^1([0, 1])$ .

John Ryff [25] shows that the operator  $\mathbf{T}$  is doubly stochastic if  $\mathbf{K}$  verifies the following properties :

- (g)  $\int_0^1 \mathbf{K}(x, y) dy = x$ ;
- (h)  $x_1 < x_2$  implies  $\mathbf{K}(x_1, y) \leq \mathbf{K}(x_2, y)$ ;
- (i)  $\mathbf{K}(1, y) = 1$ .

By collecting these properties, Ryff establishes the following representation theorem :

**Theorem 2 (Ryff's representation theorem [1963, p. 1383])** *A linear transformation  $\mathbf{T} : L^1([0, 1]) \rightarrow L^1([0, 1])$  is doubly stochastic if and only if  $\mathbf{T}$  admits a representation (D.9) where the kernel  $\mathbf{K}$  is measurable and satisfies (d)-(i).*

**Remark 1** *As we will see later, the definitions of Brown and Ryff coincide. This is not a surprise, because if we note  $\mathcal{T}$  the set of all Markov operators “ $\mathcal{T}$  may be identified with the set of all doubly stochastic measures” (Brown, [1966], p. 13).*

If we compare formulas (D.2) and (D.9), we have the following relationship

$$\partial_x \mathbf{K}(x, y) dy = P_{s,t}(x, dy) \tag{D.10}$$

Let us define  $k(x, y) = \partial_x \mathbf{K}(x, y)$ . We can then interpret  $\mathbf{K}$  as a distribution function and  $k$  is its density.

## D.2 The isomorphism of Olsen, Darsow and Nguyen

The relationship between Markov operator  $\mathbf{T}$  and 2-copula functions  $\mathbf{C}$  is given by the following two lemmas :

**Lemma 1 (Olsen, Darsow and Nguyen [1996, lemma 2.1, p. 249])** *For a copula  $\mathbf{C}$ , the operator defined by*

$$\mathbf{T}[f](x) = \frac{d}{dx} \int_0^1 \partial_2 \mathbf{C}(x, y) f(y) dy \tag{D.11}$$

*is a Markov operator on  $L^\infty([0, 1])$ .*

**Lemma 2 (Olsen, Darsow and Nguyen [1996, lemma 2.2, p. 251])** *Let  $\mathbf{T}$  be a Markov operator on  $L^\infty([0, 1])$ . The two place function defined by*

$$\mathbf{C}(x, y) = \int_0^x \mathbf{T}[\mathbf{1}_{[0,y]}](s) ds \tag{D.12}$$

*is a 2-copula.*

**Example 1** *We take the previous Markov operators of Example 21 and define the corresponding copulas.*

– *We have*

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(x, y) &= \int_0^x \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,y]} dt ds \\ &= xy \\ &= \mathbf{C}^\perp(x, y) \end{aligned} \tag{D.13}$$

– For the second Markov operator, it comes that

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(x, y) &= \int_0^x \int_0^1 \frac{2s(1-s+st)}{(s+t-st)^3} \mathbf{1}_{[0,y]} dt ds \\
&= \int_0^x \int_0^y \frac{2s(1-s+st)}{(s+t-st)^3} dt ds \\
&= \int_0^x \frac{y^2}{(y+t-yt)^2} dt \\
&= \frac{xy}{(x+y-xy)} \tag{D.14}
\end{aligned}$$

This is the Gumbel Logistic copula.

– If  $\mathbf{T}[f]$  is defined by the equation (D.7) —  $\mathbf{T}$  is not a Markov operator — we obtain  $\mathbf{C}(x, y) = \int_0^x \int_0^y st^2 dt ds = \frac{1}{6}x^2y^3$  which is not a copula<sup>3</sup>. In the case of the operator (D.8), we have  $\mathbf{C}(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{1}{3}t^2 dt ds = xy^3$  which is not a copula too<sup>4</sup>.

The two previous lemmas can be easily understood if we think **Markov operators as doubly stochastic operators and 2-copulas as doubly stochastic measures**. And the relationship between 2-copulas and Markov operators can be strengthened by the isomorphism of OLSEN, DARSOW and NGUYEN [1996]. But before presenting the main theorem of [23], we need some definitions. The multiplication product of copulas have been defined by DARSOW, NGUYEN and OLSEN [1992] in the following manner

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^2 &\rightarrow \mathbf{I} \\
(x, y) &\mapsto (\mathbf{C}_1 * \mathbf{C}_2)(x, y) = \int_0^1 \partial_2 \mathbf{C}_1(x, s) \partial_1 \mathbf{C}_2(s, y) ds \tag{D.15}
\end{aligned}$$

The transposition of copula corresponds to the mapping function  $\mathbf{C}^\top(x, y) = \mathbf{C}(y, x)$ . The adjoint  $\mathbf{T}^\dagger$  of the Markov operator  $\mathbf{T}$  is the operator such that we verify that (BROWN [1966])

$$\int_{[0,1]} f_1(x) \mathbf{T}[f_2](x) m(dx) = \int_{[0,1]} f_2(x) \mathbf{T}^\dagger[f_1](x) m(dx) \tag{D.16}$$

In terms of copulas, we have

$$\mathbf{T}^\dagger[f](x) = \frac{d}{dy} \int_0^1 \partial_1 \mathbf{C}(x, y) f(y) dy \tag{D.17}$$

Let us introduce the notation  $\mathbf{T}\langle \mathbf{C} \rangle$  which gives the Markov operator from the given copula  $\mathbf{C}$ . We may now present the isomorphism of Olsen, Darsow and Nguyen [23] :

**Theorem 3 (Olsen, Darsow and Nguyen [1996, theorem 2.1, p. 253])** *The correspondence  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{T}\langle \mathbf{C} \rangle$  is an isomorphism of the set  $\mathcal{T}$  of Markov operators on  $L^\infty([0, 1])$ , under composition, and the set  $\mathcal{C}$  of copulas, under the  $*$  product. That is  $\mathbf{T}\langle \mathbf{C} \rangle$  is one-to-one and onto and*

1.  $\mathbf{T}\langle \mathbf{C}_1 * \mathbf{C}_2 \rangle = \mathbf{T}\langle \mathbf{C}_1 \rangle \circ \mathbf{T}\langle \mathbf{C}_2 \rangle$  ;
2.  $\mathbf{T}\langle \lambda \mathbf{C}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{C}_2 \rangle = \lambda \mathbf{T}\langle \mathbf{C}_1 \rangle + (1 - \lambda) \mathbf{T}\langle \mathbf{C}_2 \rangle$  ;
3.  $\mathbf{T}\langle \mathbf{C}^\top \rangle = \mathbf{T}^\dagger \langle \mathbf{C} \rangle$ .

Before discussing of applications of this isomorphism theorem in the next paragraphs, we do two remarks about the characterization of Ryff.

**Remark 2** *Note that Olsen, Darsow and Nguyen use implicitly the characterization of Brown. In the case of the Ryff's characterization, we have*

$$\mathbf{C}(x, y) = \int_0^y \mathbf{K}(x, s) ds \tag{D.18}$$

<sup>3</sup>We have  $\mathbf{C}(1, 1) = \frac{1}{6} \neq 1$ .

<sup>4</sup>We have  $\mathbf{C}(1, y) = y^3 \neq y$ .

and of course

$$\mathbf{K}(x, y) = \partial_2 \mathbf{C}(x, y) \quad (\text{D.19})$$

OLSEN, DARSOW and NGUYEN [1996] note that “Ryff did not obtain (but easily could have obtained) the law of composition of Markov operators implied by this characterization”. However, we can find this law of composition already in FOGUEL [1969]. Let  $\mathbf{T}(\mathbf{K})$  be the Markov operator with kernel  $\mathbf{K}$ . He showed that  $\mathbf{T}(\mathbf{K}_1) \circ \mathbf{T}(\mathbf{K}_2)$  is a Markov operator with kernel  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 * \mathbf{K}_2$  defined by

$$\mathbf{K}(x, y) := (\mathbf{K}_1 * \mathbf{K}_2)(x, y) = \int_{[0,1]} \mathbf{K}_1(x, s) \mathbf{K}_2(s, y) \, ds \quad (\text{D.20})$$

Like the  $*$  product of copulas, “the  $*$  product of stochastic kernels is just a generalization of matrix multiplication” (LASOTA and MACKEY [1994]). The isomorphism between the set  $\mathcal{T}$  of Markov operators and the set  $\mathcal{K}$  of stochastic kernels is then straightforward.

**Remark 3** We assume now that  $\mathbf{C}$  and  $\mathbf{K}$  are absolutely continuous with respect to Lebesgue’s measure. In this case, we have

$$\mathbf{T}[f](x) = \int_0^1 c(x, y) f(y) \, dy \quad (\text{D.21})$$

and

$$\mathbf{T}[f](x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) \, dy \quad (\text{D.22})$$

We deduce that  $k(x, y) = c(x, y)$ .  $k$  is also the density of a bivariate uniform distribution and  $\mathbf{K}$  is a conditional probability distribution function in  $[0, 1]$ . Note that properties (d)-(f) of Kantorovitch and Vulich and properties (g)-(i) of Ryff can then be easily deduced from properties of 2-copulas.

### D.3 The Markov algebra $(\mathcal{C}, *)$ and its extreme points

Most results of this paragraph are taken from the seminal article of DARSOW, NGUYEN and OLSEN [1992]. We begin by giving two definitions :

**Definition 5 (Darsow, Nguyen and Olsen [1992, definition 5.1, p. 622])** A Markov algebra is a compact convex subset of a real Banach space on which a product  $(x, y) \mapsto x * y$  is defined which is associative, which distributes over convex combinations, which is continuous in each place (but not necessarily jointly continuous), and which possesses unit and null elements.

**Definition 6 (Darsow, Nguyen and Olsen [1992, definition 5.2, p. 622])** A Markov algebra is symmetric if it possesses a continuous operation  $x \mapsto x^\top$  satisfying  $(x^\top)^\top = x$ ,  $(\alpha x + (1 - \alpha) y)^\top = \alpha x^\top + (1 - \alpha) y^\top$  and  $(x * y)^\top = y^\top * x^\top$ .

We collect here the main properties of the  $*$  product of copulas found in [7] :

1. the  $*$  product is right and left distributive over convex combinations ;
2. the  $*$  product is continuous in each place ;
3. the  $*$  product is associative ;
4.  $\mathbf{C}^\perp$  is the null element

$$\mathbf{C}^\perp * \mathbf{C} = \mathbf{C} * \mathbf{C}^\perp = \mathbf{C}^\perp \quad (\text{D.23})$$

5.  $\mathbf{C}^+$  is the identity element

$$\mathbf{C}^+ * \mathbf{C} = \mathbf{C} * \mathbf{C}^+ = \mathbf{C} \quad (\text{D.24})$$

6. the  $*$  product is not commutative ;

7. the  $*$  product is not jointly continuous on  $\mathcal{C}$ .

We can then prove the following theorem :

**Theorem 4 (Darsow, Nguyen and Olsen [1992, theorem 5.1, p. 622])** *The set  $\mathcal{C}$  is a symmetric Markov algebra under  $*$  and  $\top$  as previously defined. The unit and null elements are  $\mathbf{C}^\perp$  and  $\mathbf{C}^+$ .*

The study of the Markov algebra  $(\mathcal{C}, *)$  can be useful to understand the topology of  $\mathcal{C}$ . We will say that  $\mathbf{C}^{(-1)}$  (respectively  $\mathbf{C}^{[-1]}$ ) is a *left (right) inverse* of  $\mathbf{C}$  if  $\mathbf{C}^{(-1)} * \mathbf{C} = \mathbf{C}^+$  ( $\mathbf{C} * \mathbf{C}^{[-1]} = \mathbf{C}^+$ ). If the left and right inverses exist for a given copula  $\mathbf{C}$ , we have  $\mathbf{C}^{(-1)} = \mathbf{C}^{[-1]} = \mathbf{C}^{-1}$  and  $\mathbf{C}^{-1}$  is called the inverse of  $\mathbf{C}$ . Invertible elements of  $\mathcal{C}$  play an important role because of the following theorem :

**Theorem 5 (Darsow, Nguyen and Olsen [1992, theorem 7.2, p. 627])** *Any element of  $\mathcal{C}$  that possesses a left or right inverse is extreme.*

**Example 2** *It is easy to show that inverse of  $\mathbf{C}^+$  is  $\mathbf{C}^+$ .  $\mathbf{C}^+$  is then an extreme copula. We recall that  $\mathbf{C}^-(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$ . It comes that  $\partial_1 \mathbf{C}^-(x, y) = \partial_2 \mathbf{C}^-(x, y) = \mathbf{1}_{[x+y-1 \geq 0]}$ . We have*

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^- * \mathbf{C}^-)(x, y) &= \int_0^1 \mathbf{1}_{[x+s-1 \geq 0]} \mathbf{1}_{[s+y-1 \geq 0]} ds \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}_{[s \geq 1-x]} \mathbf{1}_{[s \geq 1-y]} ds \\ &= 1 - \min(1-x, 1-y) \\ &= \min(x, y) \\ &= \mathbf{C}^+(x, y) \end{aligned} \tag{D.25}$$

The lower Fréchet copula is extreme too. Nevertheless, we can remark that the product copula  $\mathbf{C}^\perp$  is not extreme because there does not exist a copula  $\mathbf{C}$  in  $\mathcal{C}$  such that  $\mathbf{C} * \mathbf{C}^\perp = \mathbf{C}^+$ . The proof is straightforward :

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} * \mathbf{C}^\perp)(x, y) &= \int_0^1 \partial_2 \mathbf{C}(x, s) y ds \\ &= y \int_0^1 \partial_2 \mathbf{C}(x, s) ds \\ &\neq \min(x, y) \end{aligned} \tag{D.26}$$

We end this paragraph by some remarks :

**Remark 4** OLSEN, DARSOW and NGUYEN [1996] have also remarked that every copula is the product of a right invertible copula and a left invertible copula. To show this property, they used measure-preserving functions. Let  $\mathcal{B}$  denote the Borel  $\sigma$ -algebra for  $[0, 1]$ . We say that a measure function  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  is **measure-preserving** if  $m(\tau^{-1}(B)) = m(B)$  for every  $B$  in  $\mathcal{B}$  (see [4], [23] or [31]). We note  $F$  the set of all measure-preserving functions. We have then the following representation theorem<sup>5</sup> :

**Theorem 6 (Olsen, Darsow and Nguyen [1996, theorem 3.3, p. 257])** *The two place function defined by*

$$\mathbf{C}_{\langle \tau_1, \tau_2 \rangle}(u_1, u_2) = m(\tau_1^{-1}([0, u_1]) \cap \tau_2^{-1}([0, u_2])) \tag{D.27}$$

*is a copula. Furthermore, for any 2-copula  $\mathbf{C}$ , there exist functions  $(\tau_1, \tau_2) \in F \times F$  such that  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\langle \tau_1, \tau_2 \rangle}$ .*

*Let us denote  $\mathbf{e}$  the identity measure-preserving function. We have  $\mathbf{C}_{\langle \tau_1, \tau_2 \rangle} = \mathbf{C}_{\langle \tau_1, \mathbf{e} \rangle} * \mathbf{C}_{\langle \mathbf{e}, \tau_2 \rangle}$  and  $\mathbf{C}_{\langle \tau, \tau \rangle} = \mathbf{C}^+$ . It comes that  $\mathbf{C}_{\langle \tau_1, \mathbf{e} \rangle}$  and  $\mathbf{C}_{\langle \mathbf{e}, \tau_2 \rangle}$  are respectively right and left invertible. It then follows that every copula is the product of a right invertible copula and a left invertible copula.*

**Remark 5** *There are indeed a lot of extreme copulas other than  $\mathbf{C}^+$  and  $\mathbf{C}^-$ . However, it seems very difficult to find extreme copulas other than constructed by geometric methods based on line segments<sup>6</sup>.*

<sup>5</sup>see also VITALE [1996, theorem 1, p. 359].

<sup>6</sup>see however the counter-example of the section two of LOSERT [1992].

**Remark 6** *The framework of DARSOW, NGUYEN and OLSEN [1992] is not the only way to study extreme points of  $\mathcal{C}$ . For a review, you can read the survey of BENEŠ and ŠTĚPÁN [1991]. There are principally three methods to ‘solve’ the problem<sup>7</sup>, which are closely related :*

1. *The most used method is based on measure-preserving functions. VITALE [1996] has shown that the Lindenstrauss condition<sup>8</sup> for extreme points of  $\mathcal{C}$  is given by the following theorem :*

**Theorem 7 (Vitale [1996, theorem 3, p. 360])** *The doubly stochastic measure realized by  $(\tau_1, \tau_2) \in F \times F$  is extreme if and only if given any Borel-measurable function  $f$  such that  $\mathbb{E}[|f(\tau_1(U), \tau_2(U))|] < +\infty$  and  $\epsilon > 0$ , there are functions  $f_1$  and  $f_2$  such that*

$$\mathbb{E}[|f(\tau_1(U), \tau_2(U)) - f_1(\tau_1(U)) - f_2(\tau_2(U))|] < \epsilon \quad (\text{D.28})$$

2. *The second method is based on graphs theory. This approach has been used for example by [5], [9] or [22]. It is based on ideas of linear programming theory and the characterization of loops in a tree.*
3. *The last method consists in characterizing the extreme Markov operators. If  $\tau$  is a measure-preserving function, BROWN [1996] has shown that  $\mathbf{T}[f](x) = f(\tau(x))$  defines a Markov operator. Moreover,  $\mathbf{T}$  is an extreme point in  $\mathcal{T}$  (see also Shifflet [28]).*

## D.4 Uniform convergence versus strong convergence

We have seen in Appendix B an example for which one can pass from stochastic dependence to complete dependence in the natural sense of weak convergence. The general case has been studied by Vitale [29] and [30]. In particular, Vitale shows the following theorem :

**Theorem 8 (Vitale [1991, theorem 1, p. 461])** *Let  $U$  and  $V$  be two uniform variables. There is a sequence of cyclic permutations  $T_1, T_2, \dots, T_n$  such that  $(U, T_n U)$  converges in distribution to  $(U, V)$  as  $n \rightarrow \infty$ .*

The Vitale’s theorem lead us to two problems :

1. The first one concerns obviously the problem of multivariate uniform random generation. The theorem says us that it can be performed using an appropriate complete dependence framework. To illustrate that, we have generated 1000 random numbers from the distribution  $\mathbf{C}^\perp$  with the cyclic permutation  $T_{200}$ . In figure D.1,  $U$  is generated with linear congruential generators whereas we use a deterministic sequence in figure D.2. The first approach can be viewed as a Quasi-Monte Carlo method and we obtain a low discrepancy sequence.
2. The second one concerns the mode of convergence, and so the question of approximations :  
[...] *with respect to uniform convergence, it is essentially impossible to distinguish between situations in which one random variable completely determines another and a situation in which a pair of random variables is independent (LI, MIKUSIŃSKI and TAYLOR [2000]).*

The starting point of solving the second problem is the article of Li, Mikusiński, Sherwood and Taylor [15] presented at the third conference “*Distributions with Given Marginals and Moments Problems*” in Prague in 1996. They consider the problem of approximation of copulas. For that, they first define partition of unity :

**Definition 7**  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \in L^1([0, 1])$  *is called a partition of unity if it satisfies the following statements :*

1.  $\phi_i(x) \geq 0$  ;
2.  $\int_0^1 \phi_i(x) dx = \frac{1}{n}$  ;
3.  $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$  for every  $x$  in  $[0, 1]$ .

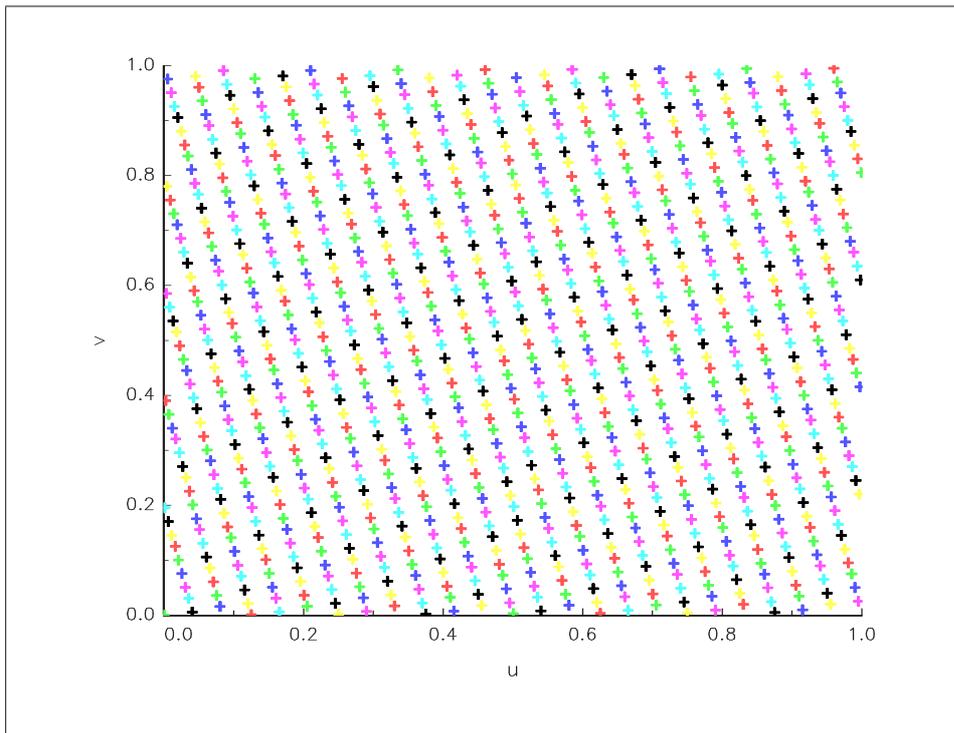
Then, they show that partitions of unity can be used to approximate a copula :

**Theorem 9 (Li, Mikusiński, Sherwood and Taylor [1997, p. 113-115])** *Let  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \in L^1([0, 1])$  be a partition of unity,  $\mathbf{C}$  a copula function and  $\mathfrak{P}_n(\mathbf{C})$  the two place function defined by*

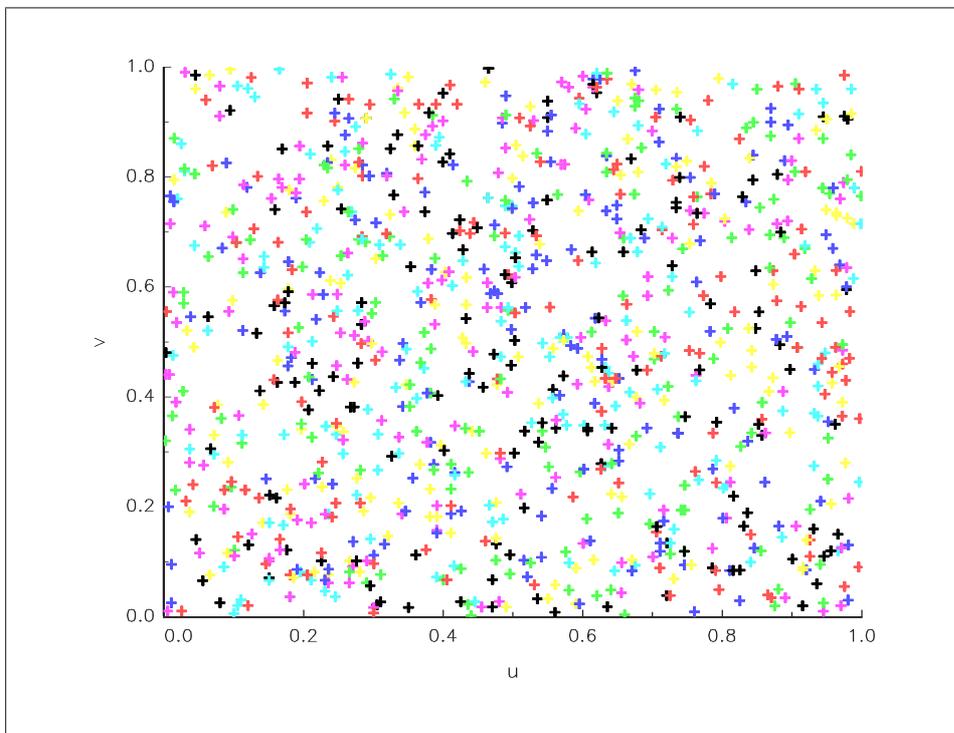
$$\mathfrak{P}_n(\mathbf{C})(u, v) = n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{i,j}(\mathbf{C}) \int_0^u \phi_i(x) dx \int_0^v \phi_j(y) dy \quad (\text{D.29})$$

<sup>7</sup>As said by SCHWEIZER [1991], “extreme points of  $\mathcal{C}$  is a still wide open problem”.

<sup>8</sup>see theorem 1 of [19].



Graphique D.1. Quasi-random bivariate uniform numbers generated by  $T_{200}$



Graphique D.2. Pseudo-random bivariate uniform numbers generated by  $T_{200}$

where  $\Delta_{i,j}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \mathbf{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) - \mathbf{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) + \mathbf{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right)$ . Then  $\mathfrak{P}_n(\mathbf{C})$  is a copula and we have

$$\mathfrak{P}_n(\mathbf{C}) \xrightarrow{s} \mathbf{C} \quad (\text{D.30})$$

However, the mode of convergence used here is not the uniform convergence. It is the **strong convergence**, which is defined as the strong convergence of corresponding Markov operators. As mentioned by Li, Mikusiński, Sherwood and Taylor [15], this convergence is stronger than the uniform convergence, because it does not lead to the previous paradox. The original definition of the strong convergence of copulas is the following :

**Definition 8 (Li, Mikusiński and Taylor [1998])** Let  $\{\mathbf{C}_n\}$  and  $\mathbf{C}$  be copulas. Then we say  $\mathbf{C}_n$  converges to  $\mathbf{C}$  strongly if the corresponding Markov operator  $\mathbf{T}\langle\mathbf{C}_n\rangle$  in the strong operator topology in  $L^1$ , that is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |\mathbf{T}\langle\mathbf{C}_n\rangle[f](x) - \mathbf{T}\langle\mathbf{C}\rangle[f](x)| dx = 0 \quad (\text{D.31})$$

for every  $f$  in  $L^1([0, 1])$ .

Note finally that Li, Mikusiński, Sherwood and Taylor [15] and Kulpa [13] provide different approximation schemes which are tractable for applications :

1. The Bernstein approximation is defined by

$$\mathfrak{B}_n(\mathbf{C})(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{i,n}(u) B_{j,n}(v) \mathbf{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \quad (\text{D.32})$$

where  $B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$ ;

2. The Checkerboard approximation corresponds to

$$\mathfrak{C}_n(\mathbf{C})(u, v) = n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{i,j}(\mathbf{C}) \int_0^u \chi_{i,n}(x) dx \int_0^v \chi_{j,n}(y) dy \quad (\text{D.33})$$

where  $\chi_{i,n}$  is the characteristic function of the interval  $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ ;

3. The Tent approximation  $\mathfrak{T}_n(\mathbf{C})(u, v)$ , like the two others, is a special case of approximation with partitions of unity with  $\phi_{i,n}(x) = (1 - |nx - i + \frac{1}{2}|)^+$ ,  $\phi_{1,n}(x) = (\min(1, \frac{3}{2} - nx))^+$  and  $\phi_{n,n}(x) = \phi_{1,n}(1-x)$ .

To finish this paragraph, we do two remarks :

**Remark 7** In the original definition, strong convergence is defined in  $L^1$ . Li, Mikusiński and Taylor [18] have extended it to the case of  $p$ -strong convergence in  $L^p$ . However, they shown that “ $p$ -strong convergence is equivalent in measure for all  $p$ , thus one need not specify  $p$  when discussing strong convergence”.

**Remark 8** Li, Mikusiński and Taylor [17] provide a surprising use of strong convergence to show that

$$\int_{\mathbf{I}^2} f(\mathbf{C}_1) d\mathbf{C}_2 = \int_{\mathbf{I}} f(u) du - \int_{\mathbf{I}^2} \partial f(\mathbf{C}_1) d_2\mathbf{C}_1 d_1\mathbf{C}_2 \quad (\text{D.34})$$

where  $f$  is a continuous differentiable function, and  $\mathbf{C}_1$  and  $\mathbf{C}_2$  two copula functions.

## Références

- [1] BENEŠ, V. and J. ŠTĚPÁN [1991], Extremal solutions in the marginal problem, in G. Dall’Aglio, S. Kotz and G. Salinetti (Eds.), *Advances in Probability Distributions with Given Marginals (Beyond the Copulas)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [2] BENEŠ, V. and J. ŠTĚPÁN [1997], *Distributions with Given Marginals and Moment Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [3] BLOCK, H.W., A.R. SAMPSON and T.H. SAVITS [1991], *Topics in Statistical Dependence*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA

- [4] BROWN, J.R. [1966], Approximation theorems for markov operators, *Pacific Journal of Mathematics*, **16-1**, 13-23
- [5] BROWN, J.R. and R.C. SHIFFLET [1970], On extreme doubly stochastic measures, *Michigan Mathematical Journal*, **17**, 249-254
- [6] DALL'AGLIO, G., S. KOTZ and G. SALINETTI [1991], Advances in Probability Distributions with Given Marginals (Beyond the Copulas), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [7] DARSOW, W.F., B. NGUYEN and E.T. OLSEN [1992], Copulas and markov processes, *Illinois Journal of Mathematics*, **36(4)**, 600-642
- [8] DARSOW, W.F. and E.T. OLSEN [1995], Norms for copulas, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **18(3)**, 417-436
- [9] DIEGO, A. and A. GERMANI [1972], Extremal measures with prescribed marginals (finite case), *Journal of Combinatorial Theory A*, **13**, 353-366
- [10] DOOB, J.L. [1953], Stochastic Processes, *Wiley Classics Library Edition Published 1990*, John Wiley & Sons, New York
- [11] FOGUEL, S. [1969], The Ergodic Theory of Markov Processes, *Van Nostrand Mathematical Studies*, **21**
- [12] KELLERER H. G. [1964], Verteilungsfunktionen mit gegebenen Marginalverteilungen, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, **3**, 247-270
- [13] KULPA, T. [1999], On approximation of copulas, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **22(2)**, 259-269
- [14] LASOTA, A. and M.C. MACKEY [1994], Chaos, Fractals and Noise — Stochastic Aspects of Dynamics, *Applied Mathematical Sciences*, **97**, second edition, Springer-Verlag, Berlin
- [15] LI, X., P. MIKUSIŃSKI, H. SHERWOOD and M.D. TAYLOR [1997], On approximation of copulas, in V. Beneš and J. Štěpán (Eds.), *Distributions with Given Marginals and Moment Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [16] LI, X., P. MIKUSIŃSKI and M.D. TAYLOR [1998], Strong approximation of copulas, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **225**, 608-623
- [17] LI, X., P. MIKUSIŃSKI and M.D. TAYLOR [2000a], Some integration-by-part formulas involving 2-copulas, *to appear*
- [18] LI, X., P. MIKUSIŃSKI and M.D. TAYLOR [2000b], Remarks on convergence of Markov operators, *to appear*
- [19] LINDENSTRAUSS, J. [1965], A remark on extreme doubly stochastic measures, *American Mathematical Monthly*, **72**, 379-382
- [20] LOSERT, V. [1982], Counter-examples to some conjectures about doubly stochastic measures, *Pacific Journal of Mathematics*, **99(2)**, 387-397
- [21] MIKUSIŃSKI, P., H. SHERWOOD and M.D. TAYLOR [1992], Shuffles of min, *Stochastica*, **13**, 61-74
- [22] MUKERJEE, H.G. [1985], Support of extremal measures with given marginals, *Illinois Journal of Mathematics*, **29(2)**, 248-260
- [23] OLSEN, E.T., W.F. DARSOW and B. NGUYEN [1996], Copulas and Markov operators, in L. Rüschendorf, B. Schweizer and M.D. Taylor (Eds.), *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA
- [24] RÜSCHENDORF, L., B. SCHWEIZER and M.D. TAYLOR [1993], Distributions with Fixed Marginals and Related Topics, *Lecture Notes — Monograph Series*, **28**, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA
- [25] RYFF, J.V. [1963], On the representation of doubly stochastic operators, *Pacific Journal of Mathematics*, **13**, 1379-1386
- [26] SCHWEIZER, B. [1991], Thirty years of copulas, in G. Dall'Aglio, S. Kotz and G. Salinetti (Eds.), *Advances in Probability Distributions with Given Marginals (Beyond the Copulas)*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- [27] SEMPI, C. [2000], Conditional expectations and idempotent copulae, *to appear*
- [28] SHIFFLET, R.C. [1972], Extreme markov operators and the orbits of Ryff, *Pacific Journal of Mathematics*, **40(1)**, 201-206
- [29] VITALE, R.A. [1991a], On stochastic dependence and a class of degenerate distributions, in H.W. Block, A.R. Sampson and T.H. Savits (Eds.), *Topics in Statistical Dependence*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA

- [30] VITALE, R.A. [1991b], Approximation by mutually completely dependent processes, *Journal of Approximation Theory*, **66**, 225-228
- [31] VITALE, R.A. [1996], Parametrizing doubly stochastic measures, in L. Rüschendorf, B. Schweizer and M.D. Taylor (Eds.), *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA



# Annexe E

## Copulas and markov processes

### E.1 The Chapman-Kolmogorov equation and the $*$ product

If we consider the original construction of Markov operators by Brown [1], we may imagine that copulas are related to Markov processes in a very simple way. Let  $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; t \geq 0\}$  be a Markov process. The stochastic transition function  $P_{s,t}(x, \mathcal{A})$  is equal to  $\Pr\{X_t \in \mathcal{A} \mid X_s = x\}$ . Let  $\mathbf{T}_{s,t}$  be the following Markov operator :

$$\mathbf{T}_{s,t}[f](x) = \int_{\Omega} f(y) P_{s,t}(x, dy) \quad (\text{E.1})$$

We know that  $\mathbf{T}_{s,\theta} \circ \mathbf{T}_{\theta,t}$  is a Markov operator. So, there exists a stochastic transition function  $P^*$  (see the remark of BROWN [1966] page 15 and the theorem 9.4 of DOOB [1953]) such that

$$(\mathbf{T}_{s,\theta} \circ \mathbf{T}_{\theta,t})[f](x) = \int_{\Omega} f(y) P^*(x, dy) \quad (\text{E.2})$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_{s,\theta} \circ \mathbf{T}_{\theta,t})[1](x) &= \int_{\Omega} \mathbf{T}_{\theta,t}[1](y) P_{s,\theta}(x, dy) \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} P_{\theta,t}(y, d\omega) P_{s,\theta}(x, dy) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

We deduce that the stochastic transition function  $P$  of  $\mathbf{T}_{s,\theta} \circ \mathbf{T}_{\theta,t}$  is equal to  $\int_{\Omega} P_{s,\theta}(x, dy) P_{\theta,t}(y, d\omega)$ . Because of the Chapman-Kolmogorov equation, we have the following relationship

$$\begin{aligned} P_{s,t}(x, \mathcal{A}) := (P_{s,\theta} * P_{\theta,t})(x, \mathcal{A}) &= \int_{\Omega} P_{s,\theta}(x, dy) P_{\theta,t}(y, \mathcal{A}) \\ &= P^*(x, \mathcal{A}) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

In terms of Markov operators, we have

$$\mathbf{T}\langle P_{s,t} \rangle = \mathbf{T}\langle P_{s,\theta} * P_{\theta,t} \rangle = \mathbf{T}\langle P_{s,\theta} \rangle \circ \mathbf{T}\langle P_{\theta,t} \rangle \quad (\text{E.5})$$

Let us define  $\mathbf{C}_{s,t}$  as the copula of the random variables  $X_s$  and  $X_t$  of the Markov process  $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ . The equation (E.5) becomes

$$\mathbf{T}\langle \mathbf{C}_{s,t} \rangle = \mathbf{T}\langle \mathbf{C}_{s,\theta} * \mathbf{C}_{\theta,t} \rangle = \mathbf{T}\langle \mathbf{C}_{s,\theta} \rangle \circ \mathbf{T}\langle \mathbf{C}_{\theta,t} \rangle \quad (\text{E.6})$$

The link between Markov processes and copulas (or the link between the Chapman-Kolmogorov equation and the product of copulas) is then established.

**Theorem 10 (Darsow, Nguyen and Olsen [1992, theorem 3.2, p. 612])** Let  $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; t \geq 0\}$  be a stochastic process and let  $\mathbf{C}_{s,t}$  denote the copula of the random variables  $X_s$  and  $X_t$ . Then the following are equivalent :

(i) The transition probabilities  $P_{s,t}(x, \mathcal{A}) = \Pr\{X_t \in \mathcal{A} \mid X_s = x\}$  satisfy the Chapman-Kolmogorov equation

$$P_{s,t}(x, \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{s,\theta}(x, dy) P_{\theta,t}(y, \mathcal{A}) \quad (\text{E.7})$$

for all  $s < \theta < t$  and almost all  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) For all  $s < \theta < t$ ,

$$\mathbf{C}_{s,t} = \mathbf{C}_{s,\theta} * \mathbf{C}_{\theta,t} \quad (\text{E.8})$$

We recall that Darsow, Nguyen and Olsen [2] did not obtain this theorem using Markov operators. Indeed, their starting point is the fact that a Markov process verify that

$$\mathbb{E}[X_t \in \mathcal{A} \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t \in \mathcal{A} \mid X_s = x] \quad (\text{E.9})$$

Let  $\Omega = [0, 1]$ . If we set  $\mathcal{A} = [0, \xi]$ , we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[X_t \leq \xi]} \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{[X_t \leq \xi]} \mid X_s = x] \\ &= \Pr\{X_t \leq \xi \mid X_s = x\} \\ &= \partial_1 \mathbf{C}_{s,t}(x, \xi) \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Another form of the Chapman-Kolmogorov equation is (equation 6.16 of DOOB [1953]) :

$$\Pr\{X_t \in \mathcal{A} \mid \mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}[\Pr\{X_t \in \mathcal{A} \mid \mathcal{F}_\theta\} \mid \mathcal{F}_s] \quad (\text{E.11})$$

with  $s < \theta < t$ . Using the equations (E.7), (E.10) and (E.11), we obtain (see DARSOW, NGUYEN and OLSEN [1992] page 612) :

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{C}_{s,t}(x, \xi) &= \int_0^1 \partial_1 \mathbf{C}_{s,\theta}(x, dy) \partial_1 \mathbf{C}_{\theta,t}(y, \xi) \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{d}{dx} \mathbf{C}_{s,\theta}(x, dy) \right] \partial_1 \mathbf{C}_{\theta,t}(y, \xi) \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{d}{dx} \partial_2 \mathbf{C}_{s,\theta}(x, y) dy \right] \partial_1 \mathbf{C}_{\theta,t}(y, \xi) \\ &= \partial_1 (\mathbf{C}_{s,\theta} * \mathbf{C}_{\theta,t})(x, \xi) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Let consider the example of the standard brownian motion  $W_t$ . The stochastic transition function is

$$P_{s,t}(x, (-\infty, y]) = \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{t-s}}\right) \quad (\text{E.13})$$

and the distribution of  $W_t$  is  $\mathbf{F}_t(y) = \Phi(y/\sqrt{t})$ . By definition of the conditional distribution

$$P_{s,t}(x, (-\infty, y]) = \partial_1 \mathbf{C}_{s,t}(\mathbf{F}_s(x), \mathbf{F}_t(y)) \quad (\text{E.14})$$

it comes that

$$\mathbf{C}_{s,t}(\mathbf{F}_s(x), \mathbf{F}_t(y)) = \int_{-\infty}^x \Phi\left(\frac{y-z}{\sqrt{t-s}}\right) d\mathbf{F}_s(z) \quad (\text{E.15})$$

With the change of variables  $u_1 = \mathbf{F}_s(x)$ ,  $u_2 = \mathbf{F}_t(y)$  and  $u = \mathbf{F}_s(z)$ , we obtain

$$\mathbf{C}_{s,t}(u_1, u_2) = \int_0^{u_1} \Phi\left(\frac{\sqrt{t}\Phi^{-1}(u_2) - \sqrt{s}\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{t-s}}\right) du \quad (\text{E.16})$$

**Theorem 11** *The Brownian copula  $\mathbf{C}_{s,t}$  is a Normal copula with parameter  $\sqrt{t^{-1}s}$ .*

**Proof.** The usual expression of the Normal copula with parameter  $\rho$  is

$$\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho) = \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho) \quad (\text{E.17})$$

To prove the theorem, we need however another expression of this copula. Let  $X_1$  and  $X_2$  be two random variables which are jointly normal distributed with correlation  $\rho$ . Let  $X$  be a normal-distributed random variable independent of  $X_1$  and  $X_2$ . We have

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2; \rho) &= \Pr\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} \\ &= \mathbb{E}\left[\Pr\left\{X_1 \leq x_1, \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X \leq x_2 \mid X_1\right\}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \Phi\left(\frac{x_2 - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \phi(x) dx \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

The expression of the Normal copula is then

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u_1, u_2; \rho) &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \phi(x) dx \\ &= \int_0^{u_1} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \rho\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) du \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

By identifying the parameter  $\rho$ , we obtain the desired result. ■

## E.2 The Markov property and the $\star$ product

The Chapman-Kolmogorov equation is a necessary but not a sufficient condition for a Markov process. Darsow, Nguyen and Olsen consider then a generalization of the  $\star$  product which is denoted  $\star$  :

$$\begin{aligned} [0, 1]^{N_1+N_2-1} &\longrightarrow [0, 1] \\ (u_1, \dots, u_{N_1+N_2-1}) &\longmapsto (\mathbf{C}_1 \star \mathbf{C}_2)(\mathbf{u}) = \int_0^{u_{N_1}} \partial_{N_1} \mathbf{C}_1(u_1, \dots, u_{N_1-1}, u) \partial_1 \mathbf{C}_2(u, u_{N_1+1}, \dots, u_{N_1+N_2-1}) du \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

where  $\mathbf{C}_1$  and  $\mathbf{C}_2$  are two copulas of dimension  $N_1$  and  $N_2$ . They also prove the following theorem :

**Theorem 12** *Let  $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; t \geq 0\}$  be a stochastic process. Let  $\mathbf{C}_{t_1, \dots, t_N}$  denote the copula of the random variables  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_N})$ .  $X$  is a Markov process iff for all positive integers  $N$  and for all  $(t_1, \dots, t_N)$  satisfying  $t_n < t_{n+1}$*

$$\mathbf{C}_{t_1, \dots, t_N} = \mathbf{C}_{t_1, t_2} \star \dots \star \mathbf{C}_{t_n, t_{n+1}} \star \dots \star \mathbf{C}_{t_{N-1}, t_N} \quad (\text{E.21})$$

This condition could be written in another form. We have

$$\mathbf{C}_{t_1, \dots, t_N}(u_1, \dots, u_N) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \dots \int_0^{u_N} \prod_{n=1}^{N-1} \partial_{1,2} \mathbf{C}_{t_n, t_{n+1}}(v_n, v_{n+1}) \prod_{n=1}^N dv_n \quad (\text{E.22})$$

The density of the Markov copula is also

$$\partial_{1, \dots, N} \mathbf{C}_{t_1, \dots, t_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) = \prod_{n=1}^{N-1} \partial_{1,2} \mathbf{C}_{t_n, t_{n+1}}(u_n, u_{n+1}) \quad (\text{E.23})$$

The copula approach is a new method to construct Markov processes :

*In the conventional approach, one specifies a Markov process by giving the initial distribution and a family of transition probabilities  $P_{s,t}(x, \mathcal{A})$  satisfying the Chapman-Kolmogorov equations. In our approach, one specifies a Markov process by giving all of the marginal distributions and a family of 2-copulas satisfying (E.8). Ours is accordingly an alternative approach to the study of Markov processes which is different in principle from the conventional one. Holding the transition probabilities of a Markov process fixed and varying the initial distribution necessarily varies all of the marginal distributions, but holding the copulas of the process fixed and varying the initial distribution does not affect any other marginal distribution (DARSOW, NGUYEN and OLSEN [1992]).*

## E.3 Properties of some Markov copulas

### E.3.1 The Brownian copula

We have the following properties :

1. The Brownian copula family is bounded

$$\mathbf{C}^\perp \prec \mathbf{C}_{s,t} \prec \mathbf{C}^+$$

2. The Brownian copula is symmetric.
3. We have  $\mathbf{C}_{0,t} = \mathbf{C}^\perp$ ,  $\mathbf{C}_{s,\infty} = \mathbf{C}^\perp$  and  $\mathbf{C}_{t,t} = \mathbf{C}^+$ .
4. It is not invariant by time translation :

$$\mathbf{C}_{s,t} \neq \mathbf{C}_{s+r,t+r} \quad (\text{E.24})$$

5. It has the following scaling property (DARSOW and OLSEN [1995]) :

$$\mathbf{C}_{s,t} = \mathbf{C}_{\alpha s, \alpha t} \quad (\text{E.25})$$

where  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

6. Let  $U_1$  and  $U_2$  be two **independent** uniform variables. Then, the copula of the random variables  $\left( U_1, \Phi \left( \sqrt{t^{-1}s} \Phi^{-1}(U_1) + t^{-1} \sqrt{t^2 - s^2} \Phi^{-1}(U_2) \right) \right)$  is the Brownian copula  $\mathbf{C}_{s,t}$ .
7. The Markov copula of a geometric brownian motion is the Brownian copula.

### E.3.2 The Ornstein-Uhlenbeck copula

**Definition 9** An Ornstein-Uhlenbeck process corresponds to the following SDE representation

$$\begin{cases} dX(t) &= a(b - X(t)) dt + \sigma dW(t) \\ X_0 &= x_0 \end{cases} \quad (\text{E.26})$$

Using Ito calculus, we may show that the diffusion process representation is

$$X(t) = x_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{a(\theta-t)} dW(\theta) \quad (\text{E.27})$$

By definition of the stochastic integral, it comes that the distribution  $\mathbf{F}_t(x)$  is

$$\mathbf{F}_t(x) = \Phi \left( \frac{x - x_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})}{\frac{\sigma}{\sqrt{2a}} \sqrt{1 - e^{-2at}}} \right) \quad (\text{E.28})$$

**Theorem 13** The Ornstein-Uhlenbeck copula is

$$\mathbf{C}_{s,t}(u_1, u_2) = \int_0^{u_1} \Phi \left( \frac{\tilde{h}(0, s, t) \Phi^{-1}(u_2) - \tilde{h}(0, s, s) \Phi^{-1}(u)}{\tilde{h}(s, s, t)} \right) du \quad (\text{E.29})$$

with

$$\tilde{h}(t_0, s, t) = \sqrt{e^{2a(t-s)} - e^{-2a(s-t_0)}} \quad (\text{E.30})$$

This is the Normal copula with parameter  $e^{-a(t-s)} (1 - e^{-2as})^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-2at})^{-\frac{1}{2}}$ .

**Proof.** We have

$$P_{s,t}(x, (-\infty, y]) = \Phi \left( \frac{y - x e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)})}{\frac{\sigma}{\sqrt{2a}} \sqrt{1 - e^{-2a(t-s)}}} \right) \quad (\text{E.31})$$

It comes then

$$\mathbf{C}_{s,t}(\mathbf{F}_s(x), \mathbf{F}_t(y)) = \int_{-\infty}^x \Phi \left( \frac{y - ze^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)})}{\frac{\sigma}{\sqrt{2a}} \sqrt{1 - e^{-2a(t-s)}}} \right) d\mathbf{F}_s(z) \quad (\text{E.32})$$

Using the change of variables  $u_1 = \mathbf{F}_s(x)$ ,  $u_2 = \mathbf{F}_t(y)$  and  $u = \mathbf{F}_s(z)$ , we have

$$\begin{aligned} y - ze^{-a(t-s)} &= x_0 e^{-at} - b(1 - e^{-at}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2a}} \sqrt{1 - e^{-2at}} \Phi^{-1}(u_2) - \\ &e^{-a(t-s)} \left[ x_0 e^{-as} - b(1 - e^{-as}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2a}} \sqrt{1 - e^{-2as}} \Phi^{-1}(u) \right] \\ &= -b(1 - e^{-a(t-s)}) + \\ &\frac{\sigma}{\sqrt{2a}} \left[ \sqrt{1 - e^{-2at}} \Phi^{-1}(u_2) - e^{-a(t-s)} \sqrt{1 - e^{-2as}} \Phi^{-1}(u) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

We finally obtain

$$\mathbf{C}_{s,t}(u_1, u_2) = \int_0^{u_1} \Phi \left( \frac{\sqrt{1 - e^{-2at}} \Phi^{-1}(u_2) - e^{-a(t-s)} \sqrt{1 - e^{-2as}} \Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1 - e^{-2a(t-s)}}} \right) du \quad (\text{E.34})$$

■

We have the following properties :

1. The Ornstein-Uhlenbeck copula family is bounded

$$\mathbf{C}^\perp \prec \mathbf{C}_{s,t} \prec \mathbf{C}^+$$

2. The Ornstein-Uhlenbeck copula is symmetric.
3. We have  $\mathbf{C}_{0,t} = \mathbf{C}^\perp$ ,  $\mathbf{C}_{s,\infty} = \mathbf{C}^\perp$  and  $\mathbf{C}_{t,t} = \mathbf{C}^+$ .
4. It is not invariant by time translation :

$$\mathbf{C}_{s,t} \neq \mathbf{C}_{s+r,t+r} \quad (\text{E.35})$$

5. It has not the scaling property :

$$\mathbf{C}_{s,t} \neq \mathbf{C}_{\alpha s, \alpha t} \quad (\text{E.36})$$

where  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

6. Let  $U_1$  and  $U_2$  be two **independent** uniform variables. Then, the copula of the random variables  $\left( U_1, \Phi \left( e^{-a(t-s)} \sqrt{\frac{1 - e^{-2as}}{1 - e^{-2at}}} \Phi^{-1}(U_1) + \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{1 - e^{-2at}}} \Phi^{-1}(U_2) \right) \right)$  is the Ornstein-Uhlenbeck copula  $\mathbf{C}_{s,t}$ .
7. The Brownian copula is a special case of the Ornstein-Uhlenbeck copula with the limit function  $\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{h}(0, s, t) = \sqrt{t}$ .

### E.3.3 The Relected Brownian copula

The reflected brownian motion is the homogeneous Markov process  $|W_t|$ . Its stochastic transition function is (REVUZ and YOR [1999]) :

$$P_{s,t}(x, (0, y]) = \Phi \left( \frac{y - x}{\sqrt{t - s}} \right) + \Phi \left( \frac{y + x}{\sqrt{t - s}} \right) - 1 \quad (\text{E.37})$$

Using the same method as that for the Brownian copula, we obtain for the Relected Brownian copula the following expression :

$$\mathbf{C}_{s,t}(u_1, u_2) = -u_1 + \int_0^{u_1} \Phi \left( \frac{\sqrt{t} \Phi^{-1}(u_2) - \sqrt{s} \Phi^{-1}(u)}{\sqrt{t - s}} \right) du + \int_0^{u_1} \Phi \left( \frac{\sqrt{t} \Phi^{-1}(u_2) + \sqrt{s} \Phi^{-1}(u)}{\sqrt{t - s}} \right) du \quad (\text{E.38})$$

Its properties are the following :

1. The Relected Brownian copula family is bounded

$$\mathbf{C}^\perp \prec \mathbf{C}_{s,t} \prec \mathbf{C}^+$$

2. The Relected Brownian copula is symmetric.

3. We have  $\mathbf{C}_{0,t} = \mathbf{C}^\perp$ ,  $\mathbf{C}_{s,\infty} = \mathbf{C}^\perp$  and  $\mathbf{C}_{t,t} = \mathbf{C}^+$ .

4. It is not invariant by time translation :

$$\mathbf{C}_{s,t} \neq \mathbf{C}_{s+r,t+r} \tag{E.39}$$

5. It has the scaling property :

$$\mathbf{C}_{s,t} = \mathbf{C}_{\alpha s, \alpha t} \tag{E.40}$$

where  $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

## E.4 Backward and forward Kolmogorov equations

We consider an inhomogeneous Markov processes  $X$  which has the following SDE representation

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \tag{E.41}$$

Let  $\mathbf{F}_t(x)$  be the probability distribution function of  $X_t$

$$\mathbf{F}_t(x) := F(t, x) = \Pr \{X_t \leq x\} \tag{E.42}$$

$Y = \{Y_t = F(t, X_t), \mathcal{F}_t; t \geq 0\}$  is then an inhomogeneous Markov processes with

$$\begin{aligned} dY_t &= \left[ \partial_t F(t, \mathbf{F}_t^{-1}(Y_t)) + b(t, \mathbf{F}_t^{-1}(Y_t)) \partial_x F(t, \mathbf{F}_t^{-1}(Y_t)) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, \mathbf{F}_t^{-1}(Y_t)) \partial_{x,x}^2 F(t, \mathbf{F}_t^{-1}(Y_t)) \right] dt \\ &\quad + \sigma(t, \mathbf{F}_t^{-1}(Y_t)) \partial_x F(t, \mathbf{F}_t^{-1}(Y_t)) dW_t \\ &= \tilde{b}(t, Y_t) dt + \tilde{\sigma}(t, Y_t) dW_t \end{aligned} \tag{E.43}$$

Because  $F$  is non-decreasing with respect to  $x$ , we have  $\mathbf{C}_{s,t}^X = \mathbf{C}_{s,t}^Y$  and

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{C}_{s,t}^Y(u_1, u_2) &= \Pr \{Y_t \leq u_2 \mid Y_s \leq u_1\} \\ &= \int_0^{u_2} \tilde{p}_{s,t}(u_1, u) du \end{aligned} \tag{E.44}$$

where  $\tilde{P}_{s,t}$  is the stochastic transition function of  $Y$  and  $\tilde{p}_{s,t}$  its density  $\tilde{P}_{s,t}(u_1, du) = \tilde{p}_{s,t}(u_1, u) du$ .  $\tilde{P}$  is the semigroup of  $Y$  and we deduce that

$$c_{s,t}^X(u_1, u_2) = \partial_{1,2} \mathbf{C}_{s,t}^X(u_1, u_2) = \tilde{p}_{s,t}(u_1, u_2) \tag{E.45}$$

We know that  $\tilde{p}_{s,t}$  satisfy the *backward Kolmogorov* equation (KARATZAS and SHREVE [1991], p. 282). We finally obtain

$$-\frac{\partial}{\partial s} c_{s,t}^X(u_1, u_2) = \tilde{b}(s, u_1) \frac{\partial}{\partial u_1} c_{s,t}^X(u_1, u_2) + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2(s, u_1) \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} c_{s,t}^X(u_1, u_2) \tag{E.46}$$

for every fixed  $t \in \mathbb{R}^+$  and  $u_2 \in [0, 1]$ . In the case of the *forward Kolmogorov* equation, for every fixed  $s \in \mathbb{R}^+$  and  $u_1 \in [0, 1]$ , we have

$$\frac{\partial}{\partial t} c_{s,t}^X(u_1, u_2) = -\frac{\partial}{\partial u_2} \left[ \tilde{b}(t, u_2) c_{s,t}^X(u_1, u_2) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} \left[ \tilde{\sigma}^2(t, u_2) c_{s,t}^X(u_1, u_2) \right] \tag{E.47}$$

For these two Kolmogorov equations, the boundary conditions are respectively  $c_{0,t}^X(u_1, u_2) = 1$  and  $c_{s,\infty}^X(u_1, u_2) = 1$ .

**Example 3** For the Brownian copula, we have  $F(t, x) = \Phi(x/\sqrt{t})$ . It comes that

$$\tilde{b}(s, u_1) = -\frac{\Phi^{-1}(u_1)}{s} \phi(\Phi^{-1}(u_1)) \quad (\text{E.48})$$

and

$$\tilde{\sigma}(s, u_1) = \phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{s}}\right) \quad (\text{E.49})$$

The Brownian copula  $\mathbf{C}_{s,t}$  satisfy then the following PDE

$$\frac{1}{2} \phi^2\left(\frac{\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{s}}\right) \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} c_{s,t}(u_1, u_2) - \frac{\Phi^{-1}(u_1)}{s} \phi(\Phi^{-1}(u_1)) \frac{\partial}{\partial u_1} c_{s,t}(u_1, u_2) + \frac{\partial}{\partial s} c_{s,t}(u_1, u_2) = 0 \quad (\text{E.50})$$

for every fixed  $t \in \mathbb{R}^+$  and  $u_2 \in [0, 1]$ .

## Références

- [1] BROWN, J.R. [1966], Approximation theorems for markov operators, *Pacific Journal of Mathematics*, **16-1**, 13-23
- [2] DARSOW, W.F., B. NGUYEN and E.T. OLSEN [1992], Copulas and markov processes, *Illinois Journal of Mathematics*, **36(4)**, 600-642
- [3] DARSOW, W.F. and E.T. OLSEN [1995], Norms for copulas, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, **18(3)**, 417-436
- [4] DOOB, J.L. [1953], Stochastic Processes, *Wiley Classics Library Edition Published 1990*, John Wiley & Sons, New York
- [5] KARATZAS, I. and S.E. SHREVE [1991], Brownian Motion and Stochastic Calculus, *Graduate Texts in Mathematics*, **113**, second edition, Springer Verlag, New York
- [6] OLSEN, E.T., W.F. DARSOW and B. NGUYEN [1996], Copulas and Markov operators, in L. Rüschendorf, B. Schweizer and M.D. Taylor (Eds.), *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA
- [7] REVUZ, D. and M. YOR [1999], Continuous Martingales and Brownian Motion, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, **113**, third edition, Springer Verlag, Berlin