Stratégies Quantitatives de Gestion

Thierry Roncalli

2 février 2011

Merci de rédiger entièrement vos réponses et de fournir les fichiers Excel.

1 Construction d'un backtest

1. Quelle est la différence entre un indice *price index* et un indice *total return* ?
2. À quoi correspondent les taux Libor ? Quelle est la différence entre le taux Libor EUR et le taux Euribor ?
3. Récupérez sur Reuters les indices S&P 500 TR et DJ Eurostoxx 50 TR ainsi que les taux Libor USD 1M et Libor EUR 1M pour la période allant du 1er janvier 2000 au 31 décembre 2010.
4. Construisez le track hedgé en euros du S&P 500 TR[1].
5. Construisez le backtest du panier en euros dont la composition est 50% S&P 500 TR et 50% DJ Eurostoxx 50 TR en considérant un rebalancement annuel[2].
6. Calculez la valeur nette du backtest précédent en considérant des frais de gestion de 1% par an.
7. Faites un reporting synthétique en fournissant les statistiques usuelles (performance annualisée, volatilité, Sharpe[3], VaR, Drawdown, etc.).
8. Étudiez l'influence de la date de rebalancement sur le backtest en considérant que le portefeuille est rebalancé annuellement à une autre date (par exemple début juillet ou début avril). Commentez ce résultat.

2 Variations autour de la frontière efficiente

On considère un univers de 4 actifs. On suppose que le rendement espéré des 4 actifs est respectivement égal à 5%, 6%, 8% et 6%, que la volatilité des 4 actifs est égale à 15%, 20%, 25% et 30% et que la matrice de corrélation est :

$$\rho = \begin{pmatrix} 100\% & & & \\ 10\% & 100\% & & \\ 40\% & 70\% & 100\% & \\ 50\% & 40\% & 80\% & 100\% \end{pmatrix}$$

[1] Pour cela, on considère que la couverture de change est faite à partir des taux Libor 1M.
[2] On fixe la date de rebalancement au 1er jour de trading de l'année.
[3] On suppose que le taux sans risque est le taux Libor EUR 1M.

On note w_i le poids du i-ième actif dans le portefeuille. On impose seulement que la somme des poids est égale à 100%.

1. Représentez la frontière efficiente[4].
2. Calculez le portefeuille de variance minimale. Quelle est la volatilité et le rendement espéré associés à ce portefeuille ?
3. Calculez le portefeuille optimal dont la volatilité cible $\sigma^\star$ est égale à 10%. Même question si $\sigma^\star = 15\%$ et $\sigma^\star = 20\%$.
4. On note w_1 le portefeuille de variance minimale et w_2 le portefeuille optimal pour $\sigma^\star = 20\%$. On cherche à étudier les portefeuilles w_α définis de la façon suivante :

$$w_\alpha = (1 - \alpha)\, w_1 + \alpha w_2$$

   Sur la frontière efficiente précédente, représentez les portefeuilles w_α pour les valeurs de α suivantes : $-0{,}5$, $-0{,}25$, 0, 0,1, 0,2, 0,5, 0,7 et 1. Commentez ce résultat.
5. Reprenez la question 3 en considérant la contrainte supplémentaire $0 \leq w_i \leq 1$.
6. On suppose maintenant que l'on dispose d'un cinquième actif correspondant à l'actif sans risque. Le rendement de celui-ci est fixé à 3%.
   (a) Définissez le nouveau vecteur des rendements espérés ainsi que la nouvelle matrice de covariance.
   (b) Déduisez-en la frontière efficiente en résolvant directement le problème quadratique.
   (c) Quelle est la forme de cette frontière efficiente ? Commentez ce résultat.
   (d) Choisissez w_1 et w_2 deux portefeuilles quelconques de cette frontière efficiente. Déduisez-en la valeur du ratio de Sharpe du portefeuille de marché[5].
   (e) Trouvez le portefeuille de marché à partir de w_1 et w_2.
7. De façon générale, on considère un univers de n actifs dont le vecteur des rendements espérés est noté μ et dont la matrice de covariance est Σ. On considère aussi un actif sans risque de rendement r. On note $\tilde{w}$ la composition du portefeuille investi dans les $n+1$ actifs :

$$\tilde{w} = \left[\begin{array}{c} w \\ w_r \end{array} \right]$$

   avec w le vecteur des poids des actifs risqués et w_r le poids de l'actif sans risque. On impose la contrainte suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i = 1$$

   (a) Définissez $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\Sigma}$ le vecteur des rendements espérés et la matrice de covariance associés aux $n+1$ actifs.
   (b) En utilisant le ϕ-problème correspondant de Markowitz, retrouvez le théorème de séparation de Sharpe.

[4] Considérez par exemple les valeurs suivantes de ϕ : -1, $-0{,}5$, $-0{,}25$, 0, 0,25, 0,5, 1 et 2.
[5] Vous devez trouver un ratio de Sharpe égal à 0,24.

3 Les stratégies de taux

1. On considère une courbe des taux donnée par le modèle de Nelson-Siegel avec les paramètres suivants : $\theta_1 = 5\%$, $\theta_2 = -2\%$, $\theta_3 = 0$ et $\theta_4 = 1$.
   (a) Calculez les taux zéro-coupon de maturité 2 ans, 5 ans et 10 ans.
   (b) Représentez graphiquement la courbe des taux. Commentez la forme de celle-ci.
2. On considère trois obligations de maturité résiduelle respective 2 ans, 5 ans et 10 ans. Ces obligations ont été émises à des dates différentes et le coupon vaut respectivement 3,5%, 5,15% et 4,25%.
   (a) Calculez le prix actuel de ces obligations en utilisant la courbe des taux précédente[6].
   (b) Montrez que le taux de rendement actuariel de la deuxième obligation est compris entre 4,5% et 4,6%.
   (c) Déduisez-en la valeur du taux de rendement actuariel de la deuxième obligation en utilisant l'algorithme de la bi-section.
   (d) Vérifiez que le taux de rendement actuariel est égal à 4,129% (resp. 4,765%) pour l'obligation de maturité 2 ans (resp. 10 ans).
   (e) Calculez la sensibilité de chaque obligation.
3. On considère une hausse homogène des taux de 30 pbs.
   (a) Calculez le prix des trois obligations en considérant une translation uniforme de la courbe des taux.
   (b) Même question si on impacte le taux de rendement actuariel.
   (c) Même question si on utilise une approximation par la sensibilité.
4. On cherche à optimiser le rendement d'un investissement d'horizon 1 an.
   (a) Définissez la stratégie de roll-down.
   (b) Pour chaque obligation, calculez l'excès de rendement par rapport à une obligation de maturité 1 an, ainsi que les composantes carry et roll-down pur. Quelle stratégie vous semble la plus pertinente ?
   (c) L'investisseur considère deux scénarios à horizon d'un an : un scénario de taux inchangés avec une probabilité de 60% et une hausse des taux de 30 pbs avec une probabilité de 40%. Quelle stratégie est optimale si l'utilité de l'investisseur est de maximiser son espérance de richesse terminale ?
5. On considère une stratégie de barbell avec les trois obligations précédentes.
   (a) Calibrez le portefeuille barbell *50/50*.
   (b) Calibrez le portefeuille barbell *cash-neutral*.
   (c) On considère le scénario $-30/0/0$. Explicitez ce scénario. Calculez le PnL des stratégies barbell précédentes.
   (d) Calibrez le portefeuille barbell *regression-weighted* avec $\beta = 50\%$. Calculez le PnL de la stratégie barbell dans le cas du scénario $-30/0/15$. Commentez ce résultat.

[6] Utilisez la convention actuarielle d'actualisation des flux.

4 L'allocation tactique d'actifs

1. Quelles différences faites-vous entre allocation stratégique et allocation tactique ?
2. Quels sont les fondements empiriques de l'allocation tactique ?
3. Définissez le ratio CAY. Comment peut-on utiliser ce ratio pour prévoir le rendement du marché actions ? Quelle est la rationalité sous-jacente ?
4. Quels sont les principaux enseignements des résultats de Barberis (2001) ?

Références

[1] Barberis N., « Investing for the Long Run When Returns Are Predictable », *Journal of Finance*, 55(1), 2000, p. 225-264.

[2] Lettau M. et Ludvigson S., « Consumption, Aggregate Wealth, and Expected Stock Returns », *Journal of Finance*, 56(3), 2001, p. 815-849.

[3] Darolles S., Eychenne K. et Martinetti S., « Time-varying Risk Premiums and Business Cycle: A Survey », *Lyxor White Papers*, 4, 2010, `www.lyxor.com`.