Gestion des Risques Financiers

Thierry Roncalli

7 janvier 2009

Merci de rédiger entièrement vos réponses.

1 La réglementation Bâle II

1. Quelles sont les principales différences entre l'accord originel de Bâle (ratio Cooke) et l'accord dit Bâle II ?
2. Comment est calculé le ratio McDonough ? Quelles sont les différences entre les ratios Tier One et Tier Two ?
3. Expliquez quelles sont les fonctions et responsabilités de la Commission Bancaire d'une part et de l'Autorité des Marchés Financiers d'autre part.

2 Le risque de marché

1. Définissez précisement le périmètre des risques qui donnent lieu à une exigence de fonds propres (on fera la distinction en particulier entre les risques du trading book et ceux du banking book).
2. Comment est calculée l'exigence de fonds propres dans la méthode dite « des modèles internes » ?
3. En quoi la gestion des risques des produits exotiques est différente de celle des produits linéaires ou vanilles ?
4. Quelles sont les exigences réglementaires en terme de back-testing ?

3 Le risque de crédit

1. Comment est défini le défaut dans Bâle II ?
2. Expliquez la méthode SA pour calculer l'exigence de fonds propres au titre du risque de crédit ?
3. Quelles sont les différences entre les méthodes IRB simple (FIRB) et IRB avancée (AIRB) ?
4. Définissez les mesures de risques dites Value-at-Risk, Unexpected Loss, Expected Regret et Expected Shortfall ?
5. Pourquoi la mesure de risque Unexpected Loss a-t-elle été retenue par le Comité de Bâle plutôt que la mesure Value-at-Risk ?

4 Le risque opérationnel

1. Comment Bâle II définit le risque opérationnel ? Donnez des exemples de risque opérationnel.
2. Expliquez la méthode SA pour mesurer le risque opérationnel. Quelles sont les trois pondérations retenues ? Donner un exemple de ligne métier pour chacune des 3 pondérations. Ce système de pondérations vous semble-t-il cohérent ?
3. Quelles différences faites vous entre des risques dit "high frequency / low severity" et "low frequency / high severity" ? Donnez des exemples.

5 Value-at-Risk et risque de marché

On considère n titres. On note x le vecteur des poids du portefeuille P_1 (x_i est le poids du titre i et nous avons $\sum x_i = 1$ et $x_i \geq 0$). La valeur du portefeuille P_1 est égale aujourd'hui à 20000 euros. La CSSF (Commission de Surveillance du Secteur Financier) vous demande de lui communiquer la VaR 99% du portefeuille **(en euros) pour une période de détention de 1 mois.**

1. On suppose que les facteurs de risque sont les rendements des titres.
   (a) Soient μ et Σ le vecteur des rendements espérés et la matrice de covariance des rendements (base annuelle). Comment calcule-t-on la VaR Gaussienne du portefeuille linéaire P_1 ? En utilisant l'historique des rendements des titres des 250 derniers jours de trading, on estime que le rendement espéré du portefeuille est -34% par an et la volatilité associée est 40% par an. Calculer la VaR demandée par la CSSF. Discutez de la pertinence d'introduire ou non l'effet moyenne dans le calcul de la VaR et montrez que la différence entre les deux mesures est à première vue de l'ordre de 2000 euros.
   (b) Comment calcule-t-on la VaR historique ? En utilisant les chocs historiques des 250 derniers jours de trading, on obtient le tableau 1 des 250 PnLs simulés **à un jour** et ordonnés du portefeuille P_1. Calculez la VaR historique de ce portefeuille pour la CSSF.
2. On suppose maintenant que les rendements des actifs sont expliqués par m facteurs communs de risque. On notera :
   $$r_t^i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j^i F_t^j + \varepsilon_t^i$$
   avec r_t^i le rendement de l'actif i à la date t, F_t^j la valeur du facteur j à la date t, β_j^i l'exposition du titre i au facteur j et ε_t^i le facteur idiosyncratique du titre i. On fait l'hypothèse statistique que tous les facteurs idiosyncratiques sont indépendants les uns des autres, et qu'ils sont aussi indépendants des facteurs communs $F_t = \left(F_t^1, \ldots, F_t^m\right)$. On suppose aussi que $\varepsilon_t^i \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_i^2\right)$ et $F_t \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \Omega\right)$.
   (a) Donner l'expression de la VaR analytique en supposant la décomposition factorielle précédente (et en négligeant l'effet moyenne).
   (b) On considère maintenant qu'il n'existe qu'un seul facteur commun ($m = 1$) et que $\beta_1^i = \beta$ quel que soit le titre i (les titres ont donc tous la même sensibilité à ce facteur). On note $F_t^1 \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_F^2\right)$. Donnez l'expression de la VaR analytique (en négligeant toujours l'effet moyenne). En déduire le portefeuille correspondant à la VaR minimum dans le cas où tous les titres ont la même volatilité idiosyncratique.

6 Valorisation d'un CDS

1. On considère un CDS 6M[1] sur une contrepartie X de maturité 3 ans et de notionnel 1 million d'euros. Le spread actuel du CDS est égal à 200 bp. Donnez le diagramme des flux du CDS en supposant que la jambe de protection est payée à la maturité et que le taux de recouvrement est fixe et égal à 40%. Quel est le PnL du vendeur A de la protection si la contrepartie X ne fait pas défaut ? Quel est le PnL de l'acheteur B de la protection si la contrepartie X fait défaut dans 2 ans et 2 mois ?
2. Sept mois plus tard, la contrepartie X doit faire face à une crise majeure. Son spread a augmenté et vaut maintenant 1000 bp. L'acheteur B de la protection retourne sa pose dans le marché avec C. Combien l'acheteur B a-t-il gagné ou perdu d'argent dans cette opération ?
3. Estimez la nouvelle probabilité de défaut annuelle de la contrepartie X.

[1] Les dates de paiement de la jambe de prime sont donc semestrielles.

-1254.60	-1124.63	-1012.29	-984.62	-983.28	-968.12	-966.15	-949.34	-852.79	-808.54
-768.54	-749.90	-746.81	-722.90	-704.00	-688.00	-656.92	-625.46	-619.94	-604.84
-601.87	-593.49	-588.32	-574.66	-565.27	-554.94	-553.52	-544.72	-539.69	-504.13
-497.66	-473.71	-473.31	-463.31	-458.31	-454.78	-452.57	-451.73	-450.85	-412.26
-405.72	-405.10	-404.96	-394.60	-390.45	-370.95	-367.97	-364.13	-360.64	-356.86
-351.56	-343.82	-343.82	-335.72	-333.58	-319.57	-302.41	-299.54	-295.43	-290.80
-287.89	-268.19	-263.82	-259.56	-258.95	-257.81	-242.70	-231.55	-230.32	-227.95
-227.15	-225.10	-224.63	-221.46	-220.70	-218.09	-216.20	-215.07	-208.98	-208.17
-203.05	-201.58	-198.35	-191.56	-190.67	-185.01	-183.60	-180.37	-179.58	-177.66
-172.62	-162.50	-153.77	-145.01	-142.96	-141.66	-139.98	-139.15	-135.00	-132.07
-130.19	-122.32	-110.37	-106.02	-102.82	-100.36	-90.61	-79.21	-70.40	-68.22
-60.38	-57.92	-56.99	-44.36	-36.28	-34.44	-32.72	-18.87	-15.03	-14.41
-10.32	-9.67	-3.51	0.83	2.18	3.31	4.16	8.98	11.84	12.36
13.38	13.86	15.25	16.51	18.00	18.96	34.72	38.11	46.10	50.65
55.18	55.74	59.53	73.83	74.16	77.94	79.16	79.53	79.69	79.73
80.47	83.53	84.23	97.12	105.46	111.31	115.98	118.92	119.63	131.77
133.16	143.97	150.34	152.41	154.02	163.32	168.58	173.36	191.22	194.09
197.51	208.07	209.72	223.78	227.43	227.58	242.47	246.91	249.39	256.44
263.63	269.89	285.14	295.54	295.60	296.02	309.22	315.63	316.92	322.41
325.91	330.75	332.82	342.37	346.77	356.92	365.84	371.58	372.21	386.05
399.98	403.42	404.07	412.04	420.08	423.14	450.60	454.47	459.82	461.39
466.75	468.35	472.00	481.70	488.52	491.22	515.60	523.34	524.37	543.97
560.00	561.87	563.14	591.34	613.31	632.33	647.38	649.08	673.58	683.85
697.55	701.99	709.17	718.80	719.69	756.79	784.94	789.67	818.84	830.27
860.35	889.58	909.39	910.57	914.16	942.00	1026.82	1086.44	1087.89	1228.93

TAB. 1 – Simulation historique des 250 PnLs journaliers (en euros)

7 Contribution en risque dans le modèle Bâle II

On considère un portefeuille de I créances de maturité M_i. On note L la perte du portefeuille :

$$L = \sum_{i=1}^{I} EAD_i \times LGD_i \times 1\left\{\tau_i \leq M_i\right\}$$

On montre que, sous certaines hypothèses, le quantile α de la fonction de distribution F de L a pour expression :

$$F^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{I} EAD_i \times \mathbb{E}\left[LGD_i\right] \times PD_i\left(H^{-1}(1-\alpha)\right)$$

1. Pour obtenir l'expression $F^{-1}(\alpha)$, on s'est placé dans un modèle mono-factoriel pour modéliser le défaut et on a supposé que la probabilité de défaut conditionnelle est une fonction décroissante de ce facteur X – H est la distribution de la variable aléatoire X. Qu'appelle-t-on un portefeuille infiniment granulaire ? Quelles sont les autres hypothèses nécessaires pour obtenir l'expression de $F^{-1}(\alpha)$?
2. Qu'appelle-t-on la contribution en risque d'une créance ?
3. Définissez les notions « *Expected Loss* » (EL) et « *Unexpected Loss* » (UL). Montrez que la mesure VaR est égale à la mesure EL sous les hypothèses (H) précédentes si les temps de défaut sont indépendants du facteur X.
4. Dans le modèle Bâle II, on suppose que le défaut intervient avant la maturité M_i si une variable latente Z_i passe en dessous d'une certaine barrière B_i :

$$\tau_i \leq M_i \Leftrightarrow Z_i \leq B_i$$

On modélise $Z_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i$ avec Z_i, X et ε_i trois variables aléatoires Gaussiennes centrées réduites et indépendantes. X est le facteur (ou le risque systémique) et ε_i est le risque individuel.

Montrez que la valeur de la barrière est $B_i = \Phi^{-1}(PD_i(M_i))$ où $PD_i(M_i)$ est la probabilité de défaut inconditionnelle de la créance i pour la maturité M_i. Montrez que la probabilité de défaut conditionnelle est :

$$\Pr\{\tau_i \leq M_i \mid X = x\} = \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

On utilise la mesure UL pour calculer le risque de crédit. En déduire que la contribution en risque de la créance i est :

$$EAD_i \times \mathbb{E}[LGD_i] \times \left[\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_i(M_i)) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) - PD_i(M_i)\right]$$

5. La contribution en risque précédente a été obtenue sous les hypothèses (H) et dans le cadre du modèle de défaut de la question 5. En déduire les implications en terme de Pilier II.

8 Construction d'un scénario de stress à partir de la théorie des valeurs extrêmes

1. Donner le théorème des valeurs extrêmes caractérisant la loi asymptotique de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ (ou $\min(X_1, \ldots, X_n)$) avec X_i une variable aléatoire *iid.*
2. On rappelle que les fonctions de distribution et quantile de la loi de probabilité GEV sont :

$$\begin{aligned} G(x) &= \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\} \\ G^{-1}(\alpha) &= \mu - \sigma\xi^{-1}\left[1 - (-\ln\alpha)^{-\xi}\right] \end{aligned}$$

   Quel est l'intérêt de cette distribution ? Donnez la log-vraisemblance associée à un échantillon $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
3. Définissez la notion de temps de retour. Quel est le temps de retour associé à une VaR 1 jour 99%, à une VaR 1 an 95% ?
4. Définissez le stress-testing. Quelle est son utilité dans la gestion des risques ? Comment est-il utilisé dans la réglementation ?
5. On considère un portefeuille de trading dont on modélise le rendement en estimant les paramètres de la distribution GEV à partir de l'opposé des minima des rendements journaliers sur n jours de trading. On suppose que ξ est égal à 1. Soit $\check{t}$ le temps de retour (en jours de trading). Montrez que nous pouvons estimer la perte $r(\check{t})$ du portefeuille (en %) associée au temps de retour $\check{t}$ en utilisant l'approximation suivante :

$$r(\check{t}) \simeq -\left(\hat{\mu} + \left(\frac{\check{t}}{n} - 1\right)\hat{\sigma}\right)$$

   avec $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ les paramètres estimés par maximum de vraisemblance de la distribution GEV.
6. On considère deux portefeuilles P_1 et P_2. On estime les paramètres de la distribution GEV à partir des données correspondantes à l'opposé des minima des rendements journaliers sur un mois de trading (ou 20 jours de trading). On obtient les résultats suivants :

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	ξ
P_1	0.01	0.03	1.00
P_2	0.10	0.02	1.00

   Calculez le scénario de stress pour chacun des portefeuilles et pour un temps de retour égal à un an. Commentez ces résultats.

9 Calibration du paramètre LGD

1. On considère une classe de risque $\mathcal{C}$ correspondant à un segment de clientèle et à un produit donnés **dans la banque de détail**. Une analyse statistique de 1000 données disponibles de LGD pour cette classe $\mathcal{C}$ donne les résultats suivants :

LGD	0%	25%	50%	75%	100%
Effectifs	100	100	600	100	100

On considère un portefeuille de 100 créances homogènes de nominal 10000 euros et appartenant à la classe $\mathcal{C}$. La probabilité de défaut annuelle est égale à 1%. Calculez l'expected loss d'horizon 1 an de ce portefeuille de créance en considérant la distribution empirique précédente pour modéliser le paramètre LGD.

2. On suppose que la marge commerciale est égale à 650 euros par créance. Quel est l'impact sur le bilan de la banque si on suppose que l'exigence des fonds propres porte aussi sur la perte espérée ? Quel est l'impact sur le compte de résultat si on considère que l'expected loss est couverte par la marge commerciale ?
3. On désire modéliser le paramètre LGD par une distribution Beta $\mathcal{B}(a,b)$. On rappelle que l'expression des deux premiers moments de cette distribution est :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{a}{a+b} \\ \sigma^2 &= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \end{aligned}$$

Calibrez les paramètres a et b de la distribution Beta à partir de la distribution empirique précédente.

4. On suppose que le défaut est modélisé par un modèle à un seul facteur de type Bâle II et qu'il est indépendant de la perte en cas de défaut. On considère le portefeuille de créances précédentes et on cherche à mesurer l'unexpected loss. Quel est l'impact sur cette mesure de risque si on utilise une distribution uniforme à la place de la loi Beta calibrée ? Pourquoi ce résultat est vérifié aussi dans le cas où nous considérons un modèle à deux facteurs pour modéliser le temps de défaut ?

10 Modélisation du temps de défaut

1. On modélise le temps de défaut τ comme une distribution exponentielle généralisée. On suppose que le taux de risque (ou taux de hasard) $\lambda(t)$ est constant par morceaux :

$$\lambda(t) = \lambda_m \qquad \text{si } t \in \left[t^\star_{m-1}, t^\star_m\right[$$

Calculez la fonction de survie de τ ainsi que la fonction de densité.

2. On suppose que $\lambda(t)$ est égal à 100 bp si t est inférieur à 5 ans et 200 bp si t est supérieur à 5 ans. Comment simule-t-on τ ? Calculez les valeurs simulées de τ si on tire des nombres aléatoires uniformes qui valent respectivement 0.04, 0.23 et 0.97.
3. On considère un système de rating avec 4 classes de risque : A, B, C et D. La note D représente le défaut. Une estimation des probabilités de transition 2Y donnent :

$$\pi = \begin{pmatrix} 94\% & 3\% & 2\% & 1\% \\ 10\% & 80\% & 5\% & 5\% \\ 10\% & 10\% & 60\% & 20\% \\ 0 & 0 & 0 & 100\% \end{pmatrix}$$

Nous avons aussi :

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 88.86\% & 5.42\% & 3.23\% & 2.49\% \\ 17.9\% & 64.80\% & 7.2\% & 10.1\% \\ 16.4\% & 14.3\% & 36.70\% & 32.60\% \\ 0 & 0 & 0 & 100\% \end{pmatrix}$$

et :

$$\pi^3 = \begin{pmatrix} 84.39\% & 7.32\% & 3.99\% & 4.30\% \\ 24.02\% & 53.10\% & 7.92\% & 14.96\% \\ 20.52\% & 15.60\% & 23.06\% & 40.82\% \\ 0 & 0 & 0 & 100\% \end{pmatrix}$$

On note $S_A(t)$, $S_B(t)$ et $S_C(t)$ les fonctions de survie des classes de risque A, B et C. En supposant un modèle exponentiel généralisé, calibrez pour chacune des classes les taux de risque $\lambda(t)$ indiqués dans le tableau par le symbole ✓ :

$\lambda(t)$	A	B	C
$0 \leq t < 2$	✓		
$2 \leq t < 4$		✓	
$4 \leq t < 6$			✓

4. Définissez la notion de générateur markovien. Comment estime–t-on le générateur Λ associé aux matrices de transition précédentes ? Un calcul numérique montre que :

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} -0.0325 & 0.0165 & 0.0126 & 0.0034 \\ 0.0558 & -0.1149 & 0.0353 & 0.0238 \\ 0.0622 & 0.0711 & -0.2592 & 0.1259 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{\Lambda}$ est-il un générateur markovien ?

5. Sur le graphique 5, nous avons représenté les taux de risque $\lambda(t)$ en considérant le modèle exponentiel généralisé et ceux calculés directement à partir du générateur markovien. Expliquez précisément comment $\lambda(t)$ a été calculé dans les deux cas. Pouquoi obtient-on une courbe croissante pour le rating A, une courbe décroissante pour le rating C et une courbe en U inversé pour le rating B ?

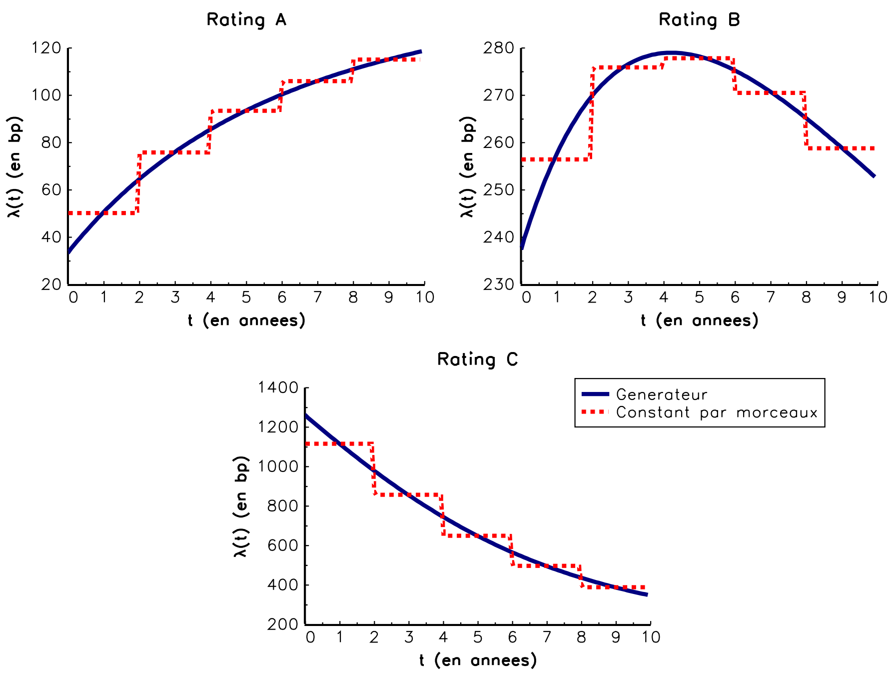

FIG. 1 – Taux de risque $\lambda(t)$ pour les ratings A, B et C