1 Examen

1.1 Prime d'une option sur un contrat à terme

On considère une option à 120 jours sur un contrat à terme de nominal 1000 francs, et dont le prix d'exercice est 990 francs. Le taux d'intérêt (continu) du marché monétaire est 6% et la volatilité historique de l'actif support est estimée à 10%/an.

1. Calculez la valeur de la prime de l'option **européenne** d'achat à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein en supposant deux possibilités d'arbitrage. Nous rappelons que nous avons

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right), \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{1-d}{u-d}$$

2. Quelle est la valeur de la prime de l'option **américaine** correspondante ? Utilisez pour cela la technique dite de "remontée de l'arbre".

3. On rappelle que la prime de l'option d'achat dans le modèle de Black est donnée par la formule suivante :

$$C = F_0 e^{-r\tau}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)$$

avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\frac{F_0}{K} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Calculez la valeur de la prime de l'option européenne précédente.

4. A partir de la formulation, sous la probabilité neutre au risque, des primes d'option d'achat et de vente sur contrat à terme, retrouvez la relation de parité call-put.

1.2 Lemme d'Ito

Soit le processus stochastique $X = (X(t), t \geq 1)$ défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} dX(t) &= \left(te^{-t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{X(t)}{t}\right)dt + 2t\,dW(t) \\ X(1) &= 1 \end{aligned}$$

avec $W(t)$ un processus de Wiener.

1. En appliquant le lemme d'Ito, trouvez l'EDS du processus $Y(t)$ défini par la relation suivante

$$Y(t) = \frac{1}{t}X(t) - \sqrt{\frac{1}{t}}$$

2. Donnez la solution de $Y(t)$ sous la forme $Y(t) = f_y(t, W(t))$. Quelle est la nature de $Y(t)$? Caractérisez ses deux premiers moments.

3. Donnez la solution de $X(t)$ sous la forme $X(t) = f_x(t, W(t))$. Vérifiez que $X(1) = 1$.

1.3 Les notions de prix du risque et de probabilité neutre au risque

1. Après avoir rappelé les hypothèses du modèle d'arbitrage à une variable d'état, définissez l'équation fondamentale de la finance.

2. On considère un modèle, dont la variable d'état est le prix d'un actif S_t et dont le taux de rendement sans risque est constant et noté r. On suppose que la dynamique du prix de cet actif est donnée par la différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

Cet actif distribue un revenu continu proportionnel au prix de l'actif, c'est-à-dire que nous avons

$$b(S, t) = dS_t$$

En déduire la valeur du prix du risque. Montrer, en utilisant le théorème de Girsanov, que nous avons sous la nouvelle mesure de probabilité

$$E' \left[\left. \frac{dS_t + b(S,t) \; dt}{S_t} \right| \mathcal{F}_t \right] = r \, dt$$

Expliquez cette relation. Pourquoi pouvons-nous assimiler la nouvelle mesure de probabilité à une probabilité risque-neutre ?

3. Montrez que $e^{-(r-d)(t-t_0)} S_t$ est une martingale sous la mesure de probabilité neutre au risque.

4. En déduire la relation de parité call-put.

5. Commentez et expliquez la phrase suivante :

Un future se comporte comme un actif qui distribue un revenu continu proportionnel au taux sans risque.

1.4 Valorisation des options avec volatilité stochastique

1.4.1 Le cas d'une seule variable d'état : le modèle de Black et Scholes

On considère que les hypothèses générales du modèle financier sont vérifiées. On suppose que le taux d'intérêt sans risque, noté r, est constant. Nous cherchons à valoriser une option européenne d'achat sur un actif $S(t)$ qui ne distribue pas de dividendes. Dans le modèle de Black et Scholes, nous rappelons que la dynamique de $S(t)$ est un processus de diffusion, donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS(t) & = & \mu S(t)\; dt + \sigma S(t)\; dW(t) \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array} \right.$$

1. Donnez la définition d'une option européenne d'achat.

2. Soit C la valeur de la prime d'une option européenne d'échéance T, de prix d'exercice K et dont le sous-jacent est l'actif $S(t)$. Quelle est l'équation fondamentale que doit satisfaire la prime C ?

3. Montrez que la prix du risque est

$$\lambda(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

4. Montrez alors qu'il existe une mesure de probabilité, que nous notons $\mathbb{P}'$, telle que nous avons

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS(t) & = & rS(t)\; dt + \sigma S(t)\; dW(t)' \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array} \right.$$

   avec $W(t)'$ un processus de Wiener.

5. Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration. En déduire, en appliquant le théorème de Feynman-Kac, que la solution de l'équation fondamentale est

$$C(t_0, S_0) = \exp\left[-r(T - t_0)\right] \cdot E'\left[\max(0, S(T) - K) \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right]$$

6. Soit le processus $Y(t) = \ln S(t)$. En utilisant le lemme d'Ito, montrez que $Y(T)|\,\mathcal{F}_{t_0}$ est une variable aléatoire gaussienne. En déduire la loi de probabilité de $S(T)$. Calculez $E'\left[\ln S(T)|\,\mathcal{F}_{t_0}\right]$ et $\mathrm{var}'\left[\ln S(T)|\,\mathcal{F}_{t_0}\right]$.

7. Soit la maturité de l'option $\tau = T - t_0$. En déduire que la prime d'une option d'achat est

$$C(t_0, S_0) = S_0 \Phi(d_1) - K \exp(-r\tau)\, \Phi(d_2)$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\frac{S_0}{K} + r\tau\right] + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

1.4.2 Le cas de deux variables d'état : le modèle de Wiggins

Le modèle de Wiggins est une extension du modèle de Black et Scholes et prend en compte une volatilité σ stochastique. C'est donc un modèle à deux variables d'état, le prix du sous-jacent $S(t)$ et la volatilité stochastique du sous-jacent $\sigma(t)$. La dynamique des variables d'état $X(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ \sigma(t) \end{bmatrix}$ est un processus de diffusion multidimensionnel, donnée par l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{aligned} dX(t) &= \begin{bmatrix} \mu S(t) \\ f(\sigma(t)) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma(t) S(t) & 0 \\ 0 & \theta\sigma(t) \end{bmatrix} dW(t) \\ X(t_0) &= \begin{bmatrix} S_0 \\ \sigma_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec f une fonction réelle quelconque.

1. Commentez ce modèle. Combien y a-t-il de sources de risque ? Quelle est la nature de ces sources de risque (spécifique/commune) ?

2. Nous supposons que

   $$E\left[W(t) W(t)^\top\right] = \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \cdot t$$

   En déduire que l'équation fondamentale de la prime européenne d'achat C est

   $$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma(t)^2 S(t)^2 C_{SS} + \delta\theta\sigma(t)^2 S(t) C_{S\sigma} + \frac{1}{2}\theta^2\sigma(t)^2 C_{\sigma\sigma} + (\mu S(t) - \lambda_1(t)\sigma(t) S(t)) C_S & \\ + (f(\sigma(t)) - \lambda_2(t)\theta\sigma(t)) C_\sigma + C_t - rC &= 0 \end{aligned}$$

   avec

   $$C(T) = \max(0, S(T) - K)$$

3. Que représentent $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$? Sans calcul, montrez que

   $$\lambda_1(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

   Pourquoi la spécification de $\lambda_2(t)$ pose-t-elle un problème ?

4. Nous supposons que $\lambda_2(t)$ est nul. En déduire la dynamique des variables d'état sous la mesure de probabilité neutre au risque et montrez que la solution de l'équation fondamentale est

$$C(t_0, S_0) = \exp[-r(T - t_0)] \cdot E'[\max(0, S(T) - K) | \mathcal{F}_{t_0}]$$

Même si cette expression est la même que celle obtenue pour le modèle de Black et Scholes, nous devons obtenir des solutions différentes. Pourquoi ?

5. Montrez que le modèle de Black et Scholes est un cas particulier du modèle de Wiggins et que l'équation fondamentale de Black et Scholes peut être dérivée de celle de Wiggins.

1.5 Gestion des options en Delta neutre

1. Définissez le coefficient delta d'une option. Quel est son intérêt dans la gestion du risque d'un portefeuille d'options ?

2. On considère un portefeuille constitué des actifs suivants :

Actif	Nombre	Delta
Action A	3	
Action B	0	
Option d'achat (action A)	15	0.5
Option de vente (Action A)	2	-0.25
Option d'achat (Action B)	3	0.8
Option de vente (Action B)	8	-0.20

Que doit-on faire pour que ce portefeuille soit "delta-neutre" par rapport au prix de l'action A ?

2 Annexes

2.1 Calcul de $E\left[\max\left(0, X - x^\star\right)\right]$ avec X une variable aléatoire log-normale

Soit X une variable aléatoire log-normale avec $\mu_1 = E\left[\ln X\right]$ et $\mu_2 = \operatorname{var}\left[\ln X\right]$. Nous avons

$$E\left[\max\left(0, X - x^\star\right)\right] = \exp\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2\right)\Phi\left(\frac{\mu_1 + \mu_2 - \ln x^\star}{\sqrt{\mu_2}}\right) - x^\star\Phi\left(\frac{\mu_1 - \ln x^\star}{\sqrt{\mu_2}}\right)$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite.

2.2 Théorème de représentation de Feynman-Kac

Considérons la variable d'état x définie par

$$dx = \mu\left(t, x\right)\,dt + \sigma\left(t, x\right)\,dW$$

et $\mathcal{A}_t v$ le générateur infinitésimal de la diffusion

$$\mathcal{A}_t v = \frac{1}{2}\sigma^2\left(t, x\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu\left(t, x\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Les fonctions $\mu\left(t, x\right)$, $\sigma(t, x)$, $k\left(t, x\right)$ et $g\left(t, x\right)$ sont lipschitziennes, bornées sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

2. La fonction $f\left(x\right)$ est une fonction continue et de classe C^2.

3. Les fonctions g et f sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $K \geq 0$ et $\xi \geq 0$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \left|g\left(x\right)\right| & \leq & K\exp\left(\xi x^2\right) \\ \left|f\left(x\right)\right| & \leq & K\exp\left(\xi x^2\right) \end{array}\right.$$

et si $v\left(t, x\right)$ est une fonction à croissance polynomiale, alors il existe une solution unique au problème suivant de Cauchy.

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\frac{\partial v}{\partial t} + kv & = & \mathcal{A}_t v + g & \forall\left(t, x\right) \in [0, T] \times \mathbb{R} \\ v\left(T, x\right) & = & f\left(x\right) & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Cette solution est donnée par la formule suivante

$$v\left(t_0, x\right) = E\left[f\left(x_T\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{T} k\left(t, x_t\right)\,dt\right) + \int_{t_0}^{T} g\left(t, x_t\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} k\left(s, x_s\right)\,ds\right)\,dt \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right]$$

2.3 Théorème de Girsanov

Soient W un processus de Wiener et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité. Si le processus $\phi(t)$ vérifie la condition suivante

$$E\left[\exp\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\phi^2(s)\ ds\right]<\infty$$

alors W' défini par $W'(t)=W(t)-\int_{t_0}^{t}\phi(s)\ ds$ est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}'$. Le changement de mesure est donné par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}}=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\phi(s)\ dW(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\phi^2(s)\ ds\right]$$

2.4 Fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite