1 Examen

1.1 Prime d'une option d'achat dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein

On considère une option à 90 jours sur un actif ne distribuant pas de dividendes de nominal 100 francs, et dont le prix d'exercice est 105 francs. Le taux d'intérêt (continu) du marché monétaire est 6% et la volatilité historique de l'actif est estimée à 20%/an.

1. Calculez la valeur de la prime de l'option **européenne** d'achat à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein en supposant trois possibilités d'arbitrage. Nous rappelons que nous avons

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right), \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{\exp\left(r\frac{\tau}{n}\right) - d}{u - d}$$

2. Quelle est la valeur de la prime de l'option **américaine** correspondante ? Utilisez pour cela la technique dite de "remontée de l'arbre".

1.2 Théorie de l'arbitrage

1. Qu'est-ce qu'un marché viable ? Qu'est-ce qu'un marché complet ?

2. Pourquoi pouvons-nous valoriser les actifs contingents si le marché est viable **et** complet ?

3. Après avoir présenté le cadre mathématique de la théorie de l'arbitrage dans le cas N actifs - M états de la nature (la matrice des paiements, le vecteur des prix des actifs et le vecteur de richesse), définissez la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage.

4. Cette condition est-elle vérifiée si la matrice des paiements est

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

et si le vecteur des prix est

$$p = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Remarque : vous pouvez présenter une solution graphique.

1.3 Une autre démonstration de la relation de parité call-put dans le modèle de Black et Scholes [1973]

1. Après avoir rappelé les hypothèses du modèle d'arbitrage à une variable d'état, définissez l'équation fondamentale de la finance.

2. Quelles sont les hypothèses du modèle de Black et Scholes ?

   Dans les questions suivantes, nous supposons que ces hypothèses sont vérifiées. En particulier, nous rappelons que le prix de l'actif $S(t)$ est un processus de diffusion, donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS_t & = & \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array} \right.$$

3. Soient C la valeur de la prime d'une option européenne d'achat et P celle d'une option de vente d'échéance T, de prix d'exercice K et dont le sous-jacent est l'actif S. Quelles sont les équations fondamentales que doivent satisfaire les primes C et P ?

4. Comment Black et Scholes déterminent-ils le prix du risque $\lambda(t)$? Montrez alors qu'il existe une mesure de probabilité, que nous notons $\mathbb{P}'$, telle que nous avons

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS_t & = & rS_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t' \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array} \right.$$

   avec W_t' un processus de Wiener.

5. Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration. Montrez que sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}'$, $S(T)|\,\mathcal{F}_{t_0}$ est une variable aléatoire log-normale. Calculez $E'[\ln S(T)|\,\mathcal{F}_{t_0}]$ et $\mathrm{var}'[\ln S(T)|\,\mathcal{F}_{t_0}]$.

6. Soit l'actif conditionnel $V(t,S) = C(t,S) - P(t,S)$. Montrez que V satisfait l'équation fondamentale de la finance suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}(t,S) + rSV_S(t,S) + V_t(t,S) - rV(t,S) = 0 \\ V(T) = S(T) - K \end{array} \right.$$

7. En déduire, en appliquant le théorème de Feynman-Kac, que la solution de l'équation fondamentale est

$$V(t_0, S_0) = \exp[-r(T - t_0)] \cdot E'[S(T) - K|\,\mathcal{F}_{t_0}]$$

8. Soit la maturité $\tau = T - t_0$. Montrez que

$$E' \left[S(T) - K \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] = S_0 \exp(r\tau) - K$$

Nous rappelons que si X est une variable aléatoire log-normale avec $\mu_1 = E[\ln X]$ et $\mu_2 = \text{var}[\ln X]$, nous avons

$$E[X] = \exp\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2\right)$$

9. En déduire la relation de parité call-put.

1.4 Méthode de Monte Carlo et valorisation des options exotiques

1. Présentez de façon générale la méthode de simulation pour valoriser une option exotique avec le modèle de Cox, Ross et Rubinstein.

   Nous reprenons les données de l'exercice 1. Nous cherchons à valoriser une option d'achat look-back sur cet actif. Le pay-off de cette option est

$$G(T) = \max\left(0, S(T) - \min_{t_0 \leq t \leq T} S(t)\right)$$

2. A partir des nombres au hasard donnés en annexe, simulez 12 nombres aléatoires issus de la loi de Bernoulli de paramètre π.

3. Simulez 4 trajectoires du sous-jacent sous la mesure de probabilité neutre au risque.

4. Calculez la valeur simulée de la prime de l'option d'achat look-back.

2 Annexes

2.1 Théorème de représentation de Feynman-Kac

Considérons la variable d'état x définie par

$$dx = \mu(t,x)\, dt + \sigma(t,x)\, dW$$

et $\mathcal{A}_t v$ le générateur infinitésimal de la diffusion

$$\mathcal{A}_t v = \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Les fonctions $\mu(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $k(t,x)$ et $g(t,x)$ sont lipschitziennes, bornées sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.
2. La fonction $f(x)$ est une fonction continue et de classe C^2.
3. Les fonctions g et f sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $K\geq 0$ et $\xi\geq 0$ tels que

$$\begin{cases} |g(x)| & \leq & K\exp\left(\xi x^2\right) \\ |f(x)| & \leq & K\exp\left(\xi x^2\right) \end{cases}$$

et si $v(t,x)$ est une fonction à croissance polynomiale, alors il existe une solution unique au problème suivant de Cauchy.

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t}+kv & = & \mathcal{A}_t v+g & \forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R} \\ v(T,x) & = & f(x) & \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Cette solution est donnée par la formule suivante

$$v(t,x)=E\left[f(x_T)\exp\left(-\int_t^T k(\theta,x_\theta)\,d\theta\right)+\int_t^T g(s,x_s)\exp\left(-\int_t^s k(\theta,x_\theta)\,d\theta\right)ds\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]$$

2.2 Théorème de Girsanov

Soient W un processus de Wiener et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité. Si le processus $\phi(t)$ vérifie la condition suivante

$$E\left[\exp\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \phi^2(s)\,ds\right]<\infty$$

alors W' défini par $W'(t)=W(t)-\int_{t_0}^t\phi(t)\,ds$ est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}'$. Le changement de mesure est donné par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}}=\exp\left[\int_{t_0}^t\phi(s)\,dW(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t\phi^2(s)\,ds\right]$$

2.3 Nombres au hasard issus de la loi uniforme [0,1]

0.439	0.806	0.792
0.946	0.127	0.0961
0.927	0.806	0.944
0.354	0.234	0.0786
0.714	0.403	0.208
0.121	0.400	0.741
0.924	0.884	0.577
0.974	0.585	0.573