

1 Examen

1.1 Prime d'une option sur un future

On considère une option à 30 jours sur un future de nominal 100 francs, et dont le prix d'exercice est 95 francs. Le taux d'intérêt (continu) du marché monétaire est 5% et la volatilité historique du future est estimée à 10%/an.

1. Calculez la valeur de la prime de l'option **européenne** d'achat à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein en supposant **trois** possibilités d'arbitrage. Nous rappelons que nous avons

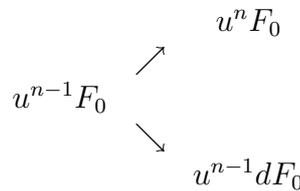
$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right), \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{1-d}{u-d}$$

2. Quelle est la valeur de la prime de l'option **américaine** correspondante ? Utilisez pour cela la technique dite de "remontée de l'arbre".
3. La prime de l'option d'achat dans le modèle de Black est donnée par la formule suivante :

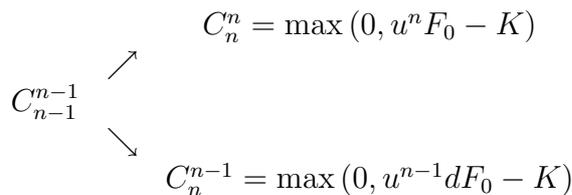
$$C = F_0 e^{-r\tau} \Phi(d_1) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2)$$

avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln \frac{F_0}{K} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Calculez la valeur de la prime de l'option européenne précédente.

4. A partir de la formulation des primes d'option d'achat et de vente sur future sous la probabilité neutre au risque, retrouvez la relation de parité call-put. En déduire que la prime d'un call doit être égale à la prime d'un put pour les options à la monnaie. Retrouvez ce résultat en utilisant la théorie de l'arbitrage.
5. On considère une option d'achat sur un future. Soit la position correspondante à l'arbitrage $(n-1)$ et à $(n-1)$ hausses du future. On rappelle que la portion correspondante de l'arbre d'évolution du future et celle de la valeur intrinsèque du call sont



et



On suppose que

$$(u^{n-1}dF_0 - K)_+ = u^{n-1}dF_0 - K$$

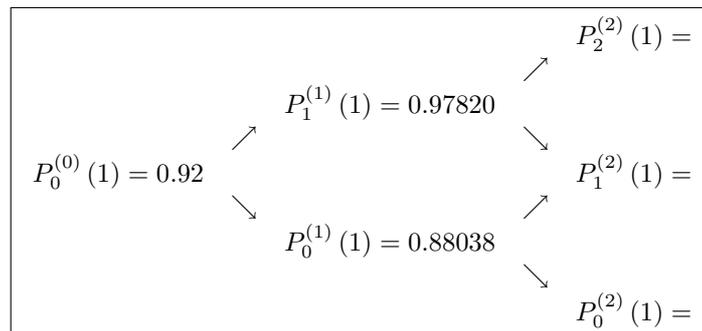
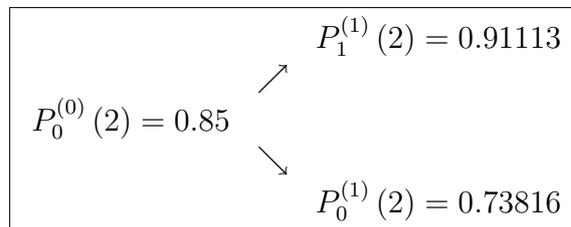
Montrez que la valeur intrinsèque du call **américain** C_{n-1}^{n-1} est égale à celle du call **européen** si le taux d'intérêt est négatif. En déduire qu'une condition nécessaire pour que la valeur de la prime de l'option **américaine** d'achat soit égale à celle de l'option **européenne** est

$$F_0 \leq \frac{1}{u^{n-2}}K$$

Commentez ces résultats.

1.2 Valorisation d'un FLOOR et modèle de Ho et Lee

1. Explicitiez la fonction d'actualisation $P_i^{(n)}(\tau)$. Pourquoi Ho et Lee considèrent-ils deux fonctions perturbatrices $h(\tau)$ et $h^*(\tau)$? Présentez et expliquez les relations entre les fonctions perturbatrices et la fonction d'actualisation.
2. La structure par terme des coupons zéros (de nominal 1 Franc) est la suivante : 0.92 (1 an), 0.85 (2 ans) et 0.75 (3 ans). On suppose que la probabilité neutre au risque π vaut 44.5 % et que le coefficient d'incertitude δ est de 0.9. Les diagrammes d'évolution de la fonction d'actualisation sont :



Trouvez les valeurs de $P_2^{(2)}(1)$, $P_1^{(2)}(1)$ et $P_0^{(2)}(1)$.

3. On considère un FLOOR 3 ans sur Pibor 1 an portant sur un emprunt à taux variable de 1000 francs. Le taux d'exercice est 6.5%. Définissez la notion de FLOOR. **Calculez la valeur de la prime du FLOOR.**

1.3 Gestion des options

1. Définissez le coefficient delta d'une option.
2. On considère un portefeuille constitué des actifs suivants :

Actif	Nombre	Delta
Action A	8	
Option d'achat sur l'action A	14	0.65
Option de vente sur l'action A	5	-0.35
Contrat de vente à terme sur l'action A	7	

Que doit-on faire pour que ce portefeuille soit "delta-neutre" par rapport au prix de l'action A ?

3. Nous considérons un actif $S_1(t)$ et un facteur $S_2(t)$. Nous supposons que $S(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix}$ est un processus de diffusion, dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle :

$$\begin{cases} dS(t) = \begin{bmatrix} \mu_1 S_1 \\ \mu_2 S_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 S_1 & \sigma_{12} S_2 \\ 0 & \sigma_2 S_2 \end{bmatrix} dW(t) \\ S(t_0) = \begin{bmatrix} S_1^0 \\ S_2^0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

où $W(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}$ est un processus de Wiener de dimension 2 avec

$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$. Nous supposons que l'option $C(t, S_1)$ dépend uniquement du prix de l'actif S_1 . Soit \mathbf{P} un portefeuille constitué de α_1 actifs S_1 et α_2 options C . Calculez la différentielle stochastique de la valeur du portefeuille. Quelle est la condition nécessaire pour que le portefeuille soit localement sans risque ? Commentez ce résultat.

1.4 Une autre démonstration des modèles de BLACK et SC-HOLES [1973], BLACK [1976] et GARMAN et KOHLHAGEN [1983]

Nous considérons que les hypothèses générales du modèle de Black et Scholes sont vérifiées. Le taux d'intérêt sans risque, noté r , est constant. Nous rappelons que la variable d'état du modèle est le prix de l'actif $S(t)$ et que $S(t)$ est un processus de diffusion, dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$$

1. Donnez la définition d'une option européenne d'achat.
2. Soit C la valeur de la prime d'une option européenne d'échéance T , de prix d'exercice K et dont le sous-jacent est l'actif S . Quelle est l'équation fondamentale que doit satisfaire la prime C ? Avons-nous une représentation de Feynman-Kac ?
3. On suppose que le prix du risque est constant, c'est-à-dire que nous avons

$$\lambda(t) = \lambda$$

Montrez alors qu'il existe une mesure de probabilité, que nous notons \mathbb{P}' , telle que nous avons

$$\begin{cases} dS(t) &= (\mu - \lambda\sigma) S(t) dt + \sigma S(t) dW'(t) \\ S(t_0) &= S_0 \end{cases}$$

avec $W'(t)$ un processus de Wiener.

4. Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration. En déduire, en appliquant le théorème de Feynman-Kac, que la solution de l'équation fondamentale est

$$C(t_0, S_0) = \exp[-r(T - t_0)] \cdot E'[\max(0, S(T) - K) | \mathcal{F}_{t_0}] \quad (1)$$

5. Montrez qu'il existe un taux d'actualisation i qui dépend du prix du risque tel que le prix actualisé de l'actif sous-jacent $\tilde{S}(t) = e^{-i(t-t_0)} S(t)$ soit une martingale sous \mathbb{P}' .
6. Montrez que

$$\tilde{S}(T) | \mathcal{F}_{t_0} = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T - t_0) + \sigma[W'(T) - W'(t_0)]\right)$$

En déduire que $\tilde{S}(T) | \mathcal{F}_{t_0}$ suit une loi log-normale dont vous préciserez les paramètres $\mu_1 = E'[\ln \tilde{S}(T) | \mathcal{F}_{t_0}]$ et $\mu_2 = \text{var}'[\ln \tilde{S}(T) | \mathcal{F}_{t_0}]$.

7. Soit la maturité de l'option $\tau = T - t_0$. A partir de la représentation (1) et de la définition de la variable aléatoire $\tilde{S}(t)$, montrez que

$$C(t_0, S_0) = S_0 e^{(i-r)\tau} E'[\varepsilon(T) \iota(\varepsilon(T), \mathcal{E})] - K e^{-r\tau} \Pr'\{\varepsilon(T) \in \mathcal{E}\}$$

avec

$$\varepsilon(T) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T - t_0) + \sigma[W'(T) - W'(t_0)]\right)$$

et

$$\mathcal{E} = \left\{ x \mid x \geq \frac{K}{S_0} e^{-i\tau} \right\}$$

La fonction $\iota(x, \mathcal{E})$ est définie de la façon suivante

$$\iota(x, \mathcal{E}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

8. Nous rappelons que

$$\Pr \{ \text{LN}(\mu_1, \mu_2) \leq a \} = \Phi \left(\frac{\ln a - \mu_1}{\sqrt{\mu_2}} \right)$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite. En déduire que

$$\Pr' \{ \varepsilon(T) \in \mathcal{E} \} = \Phi(d_2)$$

avec

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + i\tau \right] - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

9. En utilisant le théorème de Girsanov, montrez que \mathbb{P}^* défini par

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}'} = \varepsilon(T)$$

satisfait le théorème de Radon-Nikodym et que $W^*(t) = W'(t) - \sigma(t - t_0)$ est un processus de Wiener sous \mathbb{P}^* . En déduire que, sous \mathbb{P}^* , nous avons

$$\varepsilon(T) = \exp \left(\frac{1}{2}\sigma^2(T - t_0) + \sigma[W^*(T) - W^*(t_0)] \right)$$

Remarquez alors que

$$E'[\varepsilon(T) \iota(\varepsilon(T), \mathcal{E})] = \Pr^* \{ \varepsilon(T) \in \mathcal{E} \} = \Phi(d_1)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + i\tau \right] + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

10. Quelle valeur de i correspond au modèle de Black et Scholes ? En déduire l'expression du prix du risque dans ce modèle.
11. Quelle valeur de i correspond au modèle de Garman et Kohlhagen ? En déduire l'expression du prix du risque dans ce modèle.

12. Supposons que l'actif distribue un dividende continu proportionnel à la valeur du sous-jacent. Nous avons

$$b(t, S) = \delta S(t)$$

Montrez que le prix du risque est

$$\lambda(t) = \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}$$

En déduire que

$$i = r - \delta$$

Interprétez ce résultat.

13. Montrez que dans le modèle de Black, "tout se passe comme si δ était égal au taux d'intérêt sans risque". Interprétez ce résultat dans le cas d'une option sur un indice.

2 Annexes

2.1 Théorème de représentation de Feynman-Kac

Considérons la variable d'état x définie par

$$dx = \mu(t, x) dt + \sigma(t, x) dW$$

et $\mathcal{A}_t v$ le générateur infinitésimal de la diffusion

$$\mathcal{A}_t v = \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Les fonctions $\mu(t, x)$, $\sigma(t, x)$, $k(t, x)$ et $g(t, x)$ sont lipschitziennes, bornées sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.
2. La fonction $f(x)$ est une fonction continue et de classe C^2 .
3. Les fonctions g et f sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $K \geq 0$ et $\xi \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} |g(x)| & \leq K \exp(\xi x^2) \\ |f(x)| & \leq K \exp(\xi x^2) \end{cases}$$

et si $v(t, x)$ est une fonction à croissance polynomiale, alors il existe une solution unique au problème suivant de Cauchy.

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t} + kv = \mathcal{A}_t v + g & \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \\ v(T, x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cette solution est donnée par la formule suivante

$$v(t, x) = E \left[f(x_T) \exp \left(- \int_t^T k(\theta, x_\theta) d\theta \right) + \int_t^T g(s, x_s) \exp \left(- \int_t^s k(\theta, x_\theta) d\theta \right) ds \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

2.2 Théorème de Girsanov

Soient W un processus de Wiener et \mathbb{P} la mesure de probabilité. Si le processus $\phi(t)$ vérifie la condition suivante

$$E \left[\exp \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \phi^2(s) ds \right] < \infty$$

alors W' défini par $W'(t) = W(t) - \int_{t_0}^t \phi(s) ds$ est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité \mathbb{P}' . Le changement de mesure est donné par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}} = \exp \left[\int_{t_0}^t \phi(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \phi^2(s) ds \right]$$

2.3 Fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite