1 Examen

1.1 Prime d'une option sur un future

On considère une option à 30 jours sur un future de nominal 100 francs, et dont le prix d'exercice est 95 francs. Le taux d'intérêt (continu) du marché monétaire est 5% et la volatilité historique du future est estimée à 10%/an.

1. Calculez la valeur de la prime de l'option **européenne** d'achat à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein en supposant **trois** possibilités d'arbitrage. Nous rappelons que nous avons

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right), \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{1-d}{u-d}$$

2. Quelle est la valeur de la prime de l'option **américaine** correspondante ? Utilisez pour cela la technique dite de "remontée de l'arbre".

3. La prime de l'option d'achat dans le modèle de Black est donnée par la formule suivante :

$$C = F_0 e^{-r\tau}\Phi(d_1) - K e^{-r\tau}\Phi(d_2)$$

avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\frac{F_0}{K} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Calculez la valeur de la prime de l'option européenne précédente.

4. A partir de la formulation des primes d'option d'achat et de vente sur future sous la probabilité neutre au risque, retrouvez la relation de parité call-put. En déduire que la prime d'un call doit être égale à la prime d'un put pour les options à la monnaie. Retrouvez ce résultat en utilisant la théorie de l'arbitrage.

5. On considère une option d'achat sur un future. Soit la position correspondante à l'arbitrage $(n-1)$ et à $(n-1)$ hausses du future. On rappelle que la portion correspondante de l'arbre d'évolution du future et celle de la valeur intrinsèque du call sont

$$\begin{array}{ccc} & & u^n F_0 \\ & \nearrow & \\ u^{n-1}F_0 & & \\ & \searrow & \\ & & u^{n-1}dF_0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} & & C_n^n = \max\left(0, u^n F_0 - K\right) \\ & \nearrow & \\ C_{n-1}^{n-1} & & \\ & \searrow & \\ & & C_n^{n-1} = \max\left(0, u^{n-1}dF_0 - K\right) \end{array}$$

On suppose que

$$\left(u^{n-1}dF_0 - K\right)_+ = u^{n-1}dF_0 - K$$

Montrez que la valeur intrinsèque du call **américain** C_{n-1}^{n-1} est égale à celle du call **européen** si le taux d'intérêt est négatif. En déduire qu'une condition nécessaire pour que la valeur de la prime de l'option **américaine** d'achat soit égale à celle de l'option **européenne** est

$$F_0 \leq \frac{1}{u^{n-2}} K$$

Commentez ces résultats.

1.2 Valorisation d'un FLOOR et modèle de Ho et Lee

1. Explicitez la fonction d'actualisation $P_i^{(n)}(\tau)$. Pourquoi Ho et Lee considèrent-t-ils deux fonctions perturbatrices $h(\tau)$ et $h^*(\tau)$? Présentez et expliquez les relations entre les fonctions perturbatrices et la fonction d'actualisation.

2. La structure par terme des coupons zéros (de nominal 1 Franc) est la suivante : 0.92 (1 an), 0.85 (2 ans) et 0.75 (3 ans). On suppose que la probabilité neutre au risque π vaut 44.5 % et que le coefficient d'incertitude δ est de 0.9. Les diagrammes d'évolution de la fonction d'actualisation sont :

$$\begin{array}{ccc} & & P_1^{(1)}(2) = 0.91113 \\ & \nearrow & \\ P_0^{(0)}(2) = 0.85 & & \\ & \searrow & \\ & & P_0^{(1)}(2) = 0.73816 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & P_2^{(2)}(1) = \\ & & & \nearrow & \\ & & P_1^{(1)}(1) = 0.97820 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ P_0^{(0)}(1) = 0.92 & & & & P_1^{(2)}(1) = \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & P_0^{(1)}(1) = 0.88038 & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & P_0^{(2)}(1) = \end{array}$$

Trouvez les valeurs de $P_2^{(2)}(1)$, $P_1^{(2)}(1)$ et $P_0^{(2)}(1)$.

3. On considère un FLOOR 3 ans sur Pibor 1 an portant sur un emprunt à taux variable de 1000 francs. Le taux d'exercice est 6.5%. Définissez la notion de FLOOR. **Calculez la valeur de la prime du FLOOR.**

1.3 Gestion des options

1. Définissez le coefficient delta d'une option.

2. On considère un portefeuille constitué des actifs suivants :

Actif	Nombre	Delta
Action A	8	
Option d'achat sur l'action A	14	0.65
Option de vente sur l'action A	5	-0.35
Contrat de vente à terme sur l'action A	7	

   Que doit-on faire pour que ce portefeuille soit "delta-neutre" par rapport au prix de l'action A ?

3. Nous considérons un actif $S_1(t)$ et un facteur $S_2(t)$. Nous supposons que $S(t) = \begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{bmatrix}$ est un processus de diffusion, dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique multidimensionnelle :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS(t) & = & \begin{bmatrix} \mu_1 S_1 \\ \mu_2 S_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 S_1 & \sigma_{12} S_2 \\ 0 & \sigma_2 S_2 \end{bmatrix} dW(t) \\ S(t_0) & = & \begin{bmatrix} S_1^0 \\ S_2^0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

   où $W(t) = \begin{bmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{bmatrix}$ est un processus de Wiener de dimension 2 avec $\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$. Nous supposons que l'option $C(t, S_1)$ dépend uniquement du prix de l'actif S_1. Soit $\mathbf{P}$ un portefeuille constitué de α_1 actifs S_1 et α_2 options C. Calculez la différentielle stochastique de la valeur du portefeuille. Quelle est la condition nécessaire pour que le portefeuille soit localement sans risque ? Commentez ce résultat.

1.4 Une autre démonstration des modèles de Black et Scholes [1973], Black [1976] et Garman et Kohlhagen [1983]

Nous considérons que les hypothèses générales du modèle de Black et Scholes sont vérifiées. Le taux d'intérêt sans risque, noté r, est constant. Nous rappelons que la variable d'état du modèle est le prix de l'actif $S(t)$ et que $S(t)$ est un processus de diffusion, dont la dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS(t) & = & \mu S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dW(t) \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array} \right.$$

1. Donnez la définition d'une option européenne d'achat.

2. Soit C la valeur de la prime d'une option européenne d'échéance T, de prix d'exercice K et dont le sous-jacent est l'actif S. Quelle est l'équation fondamentale que doit satisfaire la prime C ? Avons-nous une représentation de Feynman-Kac ?

3. On suppose que le prix du risque est constant, c'est-à-dire que nous avons

$$\lambda(t) = \lambda$$

Montrez alors qu'il existe une mesure de probabilité, que nous notons $\mathbb{P}'$, telle que nous avons

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS(t) & = & (\mu - \lambda\sigma) S(t)\ dt + \sigma S(t)\ dW'(t) \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array} \right.$$

avec $W'(t)$ un processus de Wiener.

4. Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration. En déduire, en appliquant le théorème de Feynman-Kac, que la solution de l'équation fondamentale est

$$C(t_0, S_0) = \exp[-r(T - t_0)] \cdot E'[\max(0, S(T) - K)|\, \mathcal{F}_{t_0}] \tag{1}$$

5. Montrez qu'il existe un taux d'actualisation i qui dépend du prix du risque tel que le prix actualisé de l'actif sous-jacent $\tilde{S}(t) = e^{-i(t-t_0)}S(t)$ soit une martingale sous $\mathbb{P}'$.

6. Montrez que

$$\tilde{S}(T)\Big|\, \mathcal{F}_{t_0} = S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 (T - t_0) + \sigma [W'(T) - W'(t_0)]\right)$$

En déduire que $\tilde{S}(T)\Big|\, \mathcal{F}_{t_0}$ suit une loi log-normale dont vous préciserez les paramètres $\mu_1 = E'\left[\ln \tilde{S}(T)\Big|\, \mathcal{F}_{t_0}\right]$ et $\mu_2 = \mathrm{var}'\left[\ln \tilde{S}(T)\Big|\, \mathcal{F}_{t_0}\right]$.

7. Soit la maturité de l'option $\tau = T - t_0$. A partir de la représentation (1) et de la définition de la variable aléatoire $\tilde{S}(t)$, montrez que

$$C(t_0, S_0) = S_0 e^{(i-r)\tau} E'[\varepsilon(T)\, \iota(\varepsilon(T), \mathcal{E})] - K e^{-r\tau} \Pr{}'\{\varepsilon(T) \in \mathcal{E}\}$$

avec

$$\varepsilon(T) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 (T - t_0) + \sigma [W'(T) - W'(t_0)]\right)$$

et

$$\mathcal{E} = \left\{ x |\, x \geq \frac{K}{S_0} e^{-i\tau} \right\}$$

La fonction $\iota(x, \mathcal{E})$ est définie de la façon suivante

$$\iota(x, \mathcal{E}) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in \mathcal{E} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathcal{E} \end{array} \right.$$

8. Nous rappelons que

$$\Pr\{\mathrm{LN}(\mu_1, \mu_2) \leq a\} = \Phi\left(\frac{\ln a - \mu_1}{\sqrt{\mu_2}}\right)$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite. En déduire que

$$\Pr'\{\varepsilon(T) \in \mathcal{E}\} = \Phi(d_2)$$

avec

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + i\tau\right] - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

9. En utilisant le théorème de Girsanov, montrez que $\mathbb{P}^\star$ défini par

$$\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}'} = \varepsilon(T)$$

satisfait le théorème de Radon-Nikodym et que $W^*(t) = W'(t) - \sigma(t - t_0)$ est un processus de Wiener sour $\mathbb{P}^\star$. En déduire que, sous $\mathbb{P}^\star$, nous avons

$$\varepsilon(T) = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2 (T - t_0) + \sigma [W^\star(T) - W^\star(t_0)]\right)$$

Remarquez alors que

$$E'[\varepsilon(T)\,\iota(\varepsilon(T), \mathcal{E})] = \Pr^\star\{\varepsilon(T) \in \mathcal{E}\} = \Phi(d_1)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + i\tau\right] + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

10. Quelle valeur de i correspond au modèle de Black et Scholes ? En déduire l'expression du prix du risque dans ce modèle.

11. Quelle valeur de i correspond au modèle de Garman et Kohlhagen ? En déduire l'expression du prix du risque dans ce modèle.

12. Supposons que l'actif distribue un dividende continu proportionnel à la valeur du sous-jacent. Nous avons

$$b(t, S) = \delta S(t)$$

Montrez que le prix du risque est

$$\lambda(t) = \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}$$

En déduire que

$$i = r - \delta$$

Interprétez ce résultat.

13. Montrez que dans le modèle de Black, "tout se passe comme si δ était égal au taux d'intéret sans risque". Interprétez ce résultat dans le cas d'une option sur un indice.

2 Annexes

2.1 Théorème de représentation de Feynman-Kac

Considérons la variable d'état x définie par

$$dx = \mu(t, x)\ dt + \sigma(t, x)\ dW$$

et $\mathcal{A}_t v$ le générateur infinitésimal de la diffusion

$$\mathcal{A}_t v = \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu(t, x)\frac{\partial v}{\partial x}$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Les fonctions $\mu(t, x)$, $\sigma(t, x)$, $k(t, x)$ et $g(t, x)$ sont lipschitziennes, bornées sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

2. La fonction $f(x)$ est une fonction continue et de classe C^2.

3. Les fonctions g et f sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $K \geq 0$ et $\xi \geq 0$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lll} |g(x)| & \leq & K\exp(\xi x^2) \\ |f(x)| & \leq & K\exp(\xi x^2) \end{array} \right.$$

et si $v\left(t,x\right)$ est une fonction à croissance polynomiale, alors il existe une solution unique au problème suivant de Cauchy.

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t}+kv &= \mathcal{A}_t v+g \quad \forall\left(t,x\right)\in\left[0,T\right]\times\mathbb{R} \\ v\left(T,x\right) &= f\left(x\right) \qquad \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Cette solution est donnée par la formule suivante

$$v\left(t,x\right)=E\left[f\left(x_T\right)\exp\left(-\int_t^T k\left(\theta,x_\theta\right)\,d\theta\right)+\int_t^T g\left(s,x_s\right)\exp\left(-\int_t^s k\left(\theta,x_\theta\right)\,d\theta\right)\,ds\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

2.2 Théorème de Girsanov

Soient W un processus de Wiener et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité. Si le processus $\phi\left(t\right)$ vérifie la condition suivante

$$E\left[\exp\frac{1}{2}\int_{t_0}^t\phi^2\left(s\right)\,ds\right]<\infty$$

alors W' défini par $W'\left(t\right)=W\left(t\right)-\int_{t_0}^t\phi\left(t\right)\,ds$ est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}'$. Le changement de mesure est donné par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}}=\exp\left[\int_{t_0}^t\phi\left(s\right)\,dW(s)-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t\phi^2\left(s\right)\,ds\right]$$

2.3 Fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite