1 Examen.

1.1 Prime d'une option d'achat dans le modèle de Cox, Ross et Rubinstein

On considère une option à 60 jours sur un actif ne distribuant pas de dividendes de nominal 100 francs, et dont le prix d'exercice est 95 francs. Le taux d'intérêt (continu) du marché monétaire est 5% et la volatilité historique de l'actif est estimée à 30%/an.

1. Calculez la valeur de la prime de l'option **européenne** d'achat à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein en supposant trois possibilités d'arbitrage. Nous rappelons que nous avons

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right), \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{\exp\left(r\frac{\tau}{n}\right) - d}{u - d}$$

2. Quelle est la valeur de la prime de l'option **américaine** correspondante ? Utilisez pour cela la technique dite de "remontée de l'arbre".

1.2 Valorisation des actifs contingents et Probabilité neutre au risque

1. Qu'est-ce qu'un marché viable ? Qu'est-ce qu'un marché complet ?

2. Pourquoi pouvons-nous valoriser les actifs contingents si le marché est viable **et** complet ?

3. On suppose que les hypothèses du modèle de Black et Scholes sont vérifiées. Nous rappelons que la dynamique du prix du sous-jacent est un processus de diffusion, donnée par la différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dS_t &= \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t \\ S(t_0) &= S_0 \end{cases}$$

   Trouvez la dynamique du processus $S(t)$ sous les nouvelles mesures de probabilité, données par le théorème de Girsanov avec $\phi(t) = -\frac{\mu}{\sigma}$, $\phi(t) = \frac{r-\mu}{\sigma}$ et $\phi(t) = \frac{r+\mu}{\sigma}$. Calculez l'espérance mathématique conditionnelle $E\left[\left.\frac{dS(t)}{S(t)}\right|\mathcal{F}_t\right]$ pour chacune des nouvelles mesures de probabilité. Remarquez alors qu'une seule des dynamiques correspond à un processus neutre au risque. Commentez.

4. En utilisant notament les résultats de la question précédente, pourquoi l'expression "probabilité neutre au risque" est-elle préférable à celle de "probabilité corrigée du risque" ?

1.3 Mathématiques stochastiques

1. Définition de la différentielle stochastique d'un processus aléatoire (de diffusion).

2. Définition du lemme d'Ito.

3. Soit $W(t)$ un processus de Wiener. En utilisant le lemme d'Ito, caractérisez la différentielle stochastique du processus $Y(t) = W(t)^2$. Calculez $E[dY(t)|\mathcal{F}_t]$ et $\mathrm{var}[dY(t)|\mathcal{F}_t]$.

4. Soit $X(t)$ le processus de diffusion dont la différentielle stochastique est

$$\left\{\begin{array}{rcl} dX(t) & = & \exp(-t)\,dt + t\,dW(t) \\ X(0) & = & 5 \end{array}\right. \tag{1}$$

   Nous supposons que les conditions d'existence et d'unicité du processus sont vérifiées. Donnez la solution de l'équation différentielle stochastique (1). Calculez $E[X(t)|\mathcal{F}_{t_0}]$ et $\mathrm{var}[X(t)|\mathcal{F}_{t_0}]$. Caractérisez le comportement de ce processus lorsque t tend vers $+\infty$.

1.4 La prise en compte d'un dividende dans le modèle de Black et Scholes

On considère que les hypothèses générales du modèle de Black et Scholes sont vérifiées. Le taux d'intérêt sans risque, noté r, est constant. Nous rappelons que la variable d'état du modèle est le prix de l'actif S_t. Nous rappelons que la dynamique de S_t est un processus de diffusion, donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} dS_t & = & \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array}\right.$$

Cependant, nous considérons que **l'actif distribue un dividende** continu proportionnel à la valeur du sous-jacent. Nous avons :

$$b(t,S) = \delta S(t)$$

1. Donnez la définition d'une option européenne d'achat.

2. Soit C la valeur de la prime d'une option européenne d'échéance T, de prix d'exercice K et dont le sous-jacent est l'actif S_t. Quelle est l'équation fondamentale que doit satisfaire la prime C ?

3. Montrez que la prix du risque est

$$\lambda(t) = \frac{\mu - r + \delta}{\sigma}$$

4. Montrez alors qu'il existe une mesure de probabilité, que nous notons $\mathbb{P}'$, telle que nous avons

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dS_t & = & (r-\delta)\, S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t' \\ S(t_0) & = & S_0 \end{array} \right.$$

avec W_t' un processus de Wiener.

5. Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration. En déduire, en appliquant le théorème de Feynman-Kac, que la solution de l'équation fondamentale est

$$C(t_0, S_0) = \exp\left[-r(T-t_0)\right] \cdot E'\left[\max\left(0, S(T) - K\right) \mid \mathcal{F}_{t_0}\right]$$

6. Soit le processus $Y(t) = \ln S(t)$. En utilisant le lemme d'Ito, montrez que $Y(T)$ est une variable aléatoire gaussienne. En déduire la loi de probabilité de $S(T)$. Calculez $E'\left[\ln S(t) \mid \mathcal{F}_{t_0}\right]$ et $\mathrm{var}'\left[\ln S(t) \mid \mathcal{F}_{t_0}\right]$.

7. Soient la maturité de l'option $\tau = T - t_0$. En déduire que la prime d'une option d'achat est

$$C(t_0, S_0) = S_0 \exp(-\delta\tau)\, \Phi(d_1) - K \exp(-r\tau)\, \Phi(d_2)$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\frac{S_0}{K} + (r-\delta)\,\tau\right] + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

8. Pourquoi pouvons-nous considérer que le modèle d'évaluation des options de change de Garman et Kohlagen est un cas particulier du modèle précédent ?

2 Annexes

2.1 Calcul de $E\left[\max\left(0, X - x^\star\right)\right]$ avec X une variable aléatoire log-normale

Soit X une variable aléatoire log-normale avec $\mu_1 = E[\ln X]$ et $\mu_2 = \mathrm{var}[\ln X]$. Nous avons

$$E\left[\max\left(0, X - x^\star\right)\right] = \exp\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2\right) \Phi\left(\frac{\mu_1 + \mu_2 - \ln x^\star}{\sqrt{\mu_2}}\right) - x^\star \Phi\left(\frac{\mu_1 - \ln x^\star}{\sqrt{\mu_2}}\right)$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite.

2.2 Théorème de représentation de Feynman-Kac

Considérons la variable d'état x définie par

$$dx = \mu(t,x)\ dt + \sigma(t,x)\ dW$$

et $\mathcal{A}_t v$ le générateur infinitésimal de la diffusion

$$\mathcal{A}_t v = \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Les fonctions $\mu(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $k(t,x)$ et $g(t,x)$ sont lipschitziennes, bornées sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.
2. La fonction $f(x)$ est une fonction continue et de classe C^2.
3. Les fonctions g et f sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $K \geq 0$ et $\xi \geq 0$ tel que

$$\left\{\begin{array}{lll} |g(x)| & \leq & K\exp(\xi x^2) \\ |f(x)| & \leq & K\exp(\xi x^2) \end{array}\right.$$

et si $v(t,x)$ est une fonction à croissance polynomiale, alors il existe une solution unique au problème suivant de Cauchy.

$$\left\{\begin{array}{lll} -\frac{\partial v}{\partial t} + kv & = & \mathcal{A}_t v + g \quad \forall (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R} \\ v(T,x) & = & f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Cette solution est donnée par la formule suivante

$$v(t,x) = E_t\left[f(x_T)\exp\left(-\int_t^T k(\theta,x_\theta)\ d\theta\right) + \int_t^T g(s,x_s)\exp\left(-\int_t^s k(\theta,x_\theta)\ d\theta\right)\ ds\right]$$

2.3 Théorème de Girsanov

Soient W un processus de Wiener et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité. Si le processus $\phi(t)$ vérifie la condition suivante

$$E\left[\exp\frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(t)\ ds\right] < \infty$$

alors W' défini par $W'(t) = W(t) - \int_0^t \phi(t)\ ds$ est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}'$. Le changement de mesure est donné par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}} = \exp\left[\int_0^t \phi(t)\ dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \phi^2(t)\ ds\right]$$