1 Examen.

1.1 Prime d'une option sur un future

On considère une option à 85 jours sur un future de nominal 1800 francs, et dont le prix d'exercice est 1750 francs. Le taux d'intérêt (continu) du marché monétaire est 6% et la volatilité historique du future est estimée à 20%/an.

1. Calculez la valeur de la prime de l'option **européenne** d'achat à partir du modèle de Cox, Ross et Rubinstein en supposant deux possibilités d'arbitrage. Nous rappelons que nous avons

$$u = \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{\tau}{n}}\right), \quad d = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad \pi = \frac{1-d}{u-d}$$

2. Quelle est la valeur de la prime de l'option **américaine** correspondante ? Utilisez pour cela la technique dite de "remontée de l'arbre".

3. On rappelle que la prime de l'option d'achat dans le modèle de Black est donnée par la formule suivante :

$$C = F_0 e^{-r\tau}\Phi\left(d_1\right) - Ke^{-r\tau}\Phi\left(d_2\right)$$

avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\frac{F_0}{K} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$. Calculez la valeur de la prime de l'option européenne précédente.

4. A partir de la formulation, sous la probabilité neutre au risque, des primes d'option d'achat et de vente sur futures, retrouvez la relation de parité call-put. En déduire la valeur de la prime de l'option de vente dans le modèle de Black.

1.2 Valorisation d'un CAP et modèle de Ho et Lee

1. Justifiez l'utilisation de la structure par terme des coupons zéros pour valoriser les actifs contingents au taux d'intérêt. Explicitez la fonction d'actualisation $P_i^{(n)}\left(\tau\right)$.

2. Pourquoi Ho et Lee considèrent-t-ils deux fonctions perturbatrices $h\left(\tau\right)$ et $h^*\left(\tau\right)$? Présentez et expliquez les relations entre les fonctions perturbatrices et la fonction d'actualisation.

3. On considère un CAP 4 mois sur taux PIBOR portant sur un emprunt à taux variable de 100 000 francs. Le taux d'exercice est 6.5%. Définissez la notion de CAP.

4. La structure par terme des coupons zéros (de nominal 1 Franc) est la suivante : 0.995 (1 mois), 0.991 (2 mois), 0.986 (3 mois) et 0.979 (4 mois). On suppose que la probabilité neutre au risque π vaut 45 % et que le coefficient d'incertitude δ est de 0.998. Les diagrammes d'évolution de la fonction d'actualisation sont :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & & P_1^{(1)}(3) = \\ & \nearrow & \\ P_0^{(0)}(3) = 0.986 & & \\ & \searrow & \\ & & P_0^{(1)}(3) = 0.9813 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} & & & & P_2^{(2)}(2) = 0.9922 \\ & & & \nearrow & \\ & & P_1^{(1)}(2) = 0.9931 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ P_0^{(0)}(2) = 0.991 & & & & P_1^{(2)}(2) = \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & P_0^{(1)}(2) = 0.9892 & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & P_1^{(2)}(2) = \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} & & & & & & P_3^{(3)}(1) = 0.9962 \\ & & & & & \nearrow & \\ & & & & P_2^{(2)}(1) = & & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ & & P_1^{(1)}(1) = & & & & P_2^{(3)}(1) = 0.9942 \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ P_0^{(0)}(1) = 0.995 & & & & P_1^{(2)}(1) = 0.9952 & & \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & P_0^{(1)}(1) = 0.9951 & & & & P_1^{(3)}(1) = 0.9922 \\ & & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & P_0^{(2)}(1) = 0.9932 & & \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & & P_0^{(3)}(1) = 0.9902 \end{array}}$$

Trouvez les valeurs de $P_1^{(1)}(1)$, $P_2^{(2)}(1)$, $P_1^{(2)}(2)$, $P_1^{(2)}(2)$ et $P_1^{(1)}(3)$.

5. La valeur de la prime du CAP est 229 francs. L'évolution du taux PIBOR 1 mois est la suivante : 6%, 6.5%, 7% et 6.5%. A posteriori, la couverture par ce CAP est-t-elle intéressante ?

1.3 Les notions de prix du risque et de probabilité neutre au risque

1. Après avoir rappelé les hypothèses du modèle d'arbitrage à une variable d'état, définissez l'équation fondamentale de la finance.

2. On considère un modèle, dont la variable d'état est le prix d'un actif S_t. On suppose que la dynamique du prix de cet actif est donnée par la différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

Cet actif distribue un revenu continu proportionnel au prix de l'actif, c'est-à-dire que nous avons

$$b\left(S, t\right) = dS_t$$

En déduire la valeur du prix du risque. Montrer, en utilisant le théorème de Girsanov, que nous avons sous la nouvelle probabilité de mesure

$$E' \left[\left. \frac{dS_t + b\left(S, t\right) \, dt}{S_t} \right| \mathcal{F}_t \right] = r \, dt$$

Expliquez cette relation. Pourquoi pouvons-nous assimiler la nouvelle mesure de probabilité à une probabilité neutre au risque ?

3. On suppose maintenant que la dynamique du prix est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck

$$dS_t = \alpha \left(\beta - S_t\right) \, dt + \sigma \, dW_t$$

et que cet actif ne distribue pas de dividendes. Soit r le taux d'intérêt sans risque. Montrez alors que la dynamique corrigée du risque du prix de l'actif est

$$dS_t = r S_t \, dt + \sigma \, dW'_t$$

Nous supposons que le prix de l'actif est connu en t_0. En déduire, en utilisant le lemme d'Itô, que le prix actualisé de l'actif est une martingale sous la mesure de probabilité neutre au risque.

1.4 Valorisation d'une option d'achat dans un modèle monofactoriel

On considère que les hypothèses générales du modèle d'arbitrage en temps continu sont vérifiées. Le taux d'intérêt sans risque, noté r, est constant. Nous étudions un modèle monofactoriel, le facteur étant noté X_t. On suppose que la dynamique de X_t est un processus de diffusion, donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX_t & = & \mu\, dt + \sigma\, dW_t \\ X(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

Soit S_t le prix d'un actif. Nous supposons que le modèle est linéaire, c'est-à-dire que

$$S_t = \alpha X_t + \beta$$

1. Soit C la valeur de la prime d'une option d'achat dont le sous-jacent est S_t. Conformément au modèle d'arbitrage à un seul facteur, C dépend uniquement des variables X et t, c'est-à-dire que nous avons $C = C(X, t)$. Quelle est l'équation fondamentale que doit satisfaire la prime de l'option d'achat d'échéance T et de prix d'exercice K ?

2. Supposons que le prix du risque associé au facteur X soit constant. Nous avons $\lambda(X, t) = \lambda$. Montrez alors qu'il existe une mesure de probabilité, que nous notons $\mathbb{P}'$, telle nous avons

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dX_t & = & (\mu - \lambda\sigma)\, dt + \sigma\, dW_t' \\ X(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

   avec W_t' un processus de Wiener.

3. Soit $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ la filtration. En déduire, en appliquant le théorème de Feynman-Kac, que la solution de l'équation fondamentale est

$$C(t_0, X_0) = \exp\left[-r(T - t_0)\right] \cdot E'\left[\max(0, \alpha X(T) + \beta - K) \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right] \tag{1}$$

4. Montrez que sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}'$, $X(T)$ est une variable aléatoire gaussienne. Caractérisez $X(T)$ par ses deux premiers moments.

5. Soient la maturité de l'option $\tau = T - t_0$ et S_0 la valeur actuelle du prix du sous-jacent. En déduire que la prime d'une option d'achat est

$$C = \frac{\alpha\sigma\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-r\tau} \exp\left(-\frac{1}{2} d_1^2\right) - (K - d_2)\, e^{-r\tau} \Phi(d_1)$$

   avec Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite,

$$d_2 = S_0 + \alpha(\mu - \lambda\sigma)\tau$$

   et

$$d_1 = \frac{d_2}{\alpha\sigma\sqrt{\tau}}$$

Remarque sur la question 5 :
La solution de l'expression (1) peut être facilement obtenue en remarquant que

$$C\left(t_0, X_0\right) = e^{-r\tau} E' \left[\max\left(0, S\left(T\right) - K\right) \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right]$$

A partir des propriétés des variables aléatoires gaussiennes, il est alors aisé de définir $S\left(T\right)$.

1.5 Gestion des options en Delta neutre

1. Définissez le coefficient delta d'une option. Quel est son intérêt dans la gestion du risque d'un portefeuille d'options ?

2. On considère un portefeuille constitué des actifs suivants :

Actif	Nombre	Delta
Action A	10	
Action B	5	
Option d'achat (action A)	15	0.5
Option de vente (Action A)	2	-0.25
Option d'achat (Action B)	3	0.8
Option de vente (Action B)	8	-0.20

Que doit-on faire pour que ce portefeuille soit "delta-neutre" par rapport au prix de l'action A ?

2 Annexes

2.1 Théorème de représentation de Feynman-Kac

Considérons la variable d'état x définie par

$$dx = \mu\left(t, x\right)\, dt + \sigma\left(t, x\right)\, dW$$

et $\mathcal{A}_t v$ le générateur infinitésimal de la diffusion

$$\mathcal{A}_t v = \frac{1}{2}\sigma^2\left(t, x\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu\left(t, x\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

Sous les hypothèses suivantes :

1. Les fonctions $\mu\left(t, x\right)$, $\sigma(t, x)$, $k\left(t, x\right)$ et $g\left(t, x\right)$ sont lipschitziennes, bornées sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

2. La fonction $f\left(x\right)$ est une fonction continue et de classe C^2.

3. Les fonctions g et f sont à croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $K \geq 0$ et $\xi \geq 0$ tel que

$$\begin{cases} |g(x)| & \leq & K \exp(\xi x^2) \\ |f(x)| & \leq & K \exp(\xi x^2) \end{cases}$$

et si $v(t,x)$ est une fonction à croissance polynomiale, alors il existe une solution unique au problème suivant de Cauchy.

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial t} + kv & = & \mathcal{A}_t v + g & \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R} \\ v(T,x) & = & f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cette solution est donnée par la formule suivante

$$v(t,x) = E_t \left[f(x_T) \exp\left(-\int_t^T k(\theta, x_\theta)\ d\theta \right) + \int_t^T g(s, x_s) \exp\left(-\int_t^s k(\theta, x_\theta)\ d\theta \right)\ ds \right]$$

2.2 Théorème de Girsanov

Soient W un processus de Wiener et $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité. Si le processus $\phi(t)$ vérifie la condition suivante

$$E\left[\exp \frac{1}{2} \int_0^t \phi^2(t)\ ds \right] < \infty$$

alors W' défini par $W'(t) = W(t) - \int_0^t \phi(t)\ ds$ est un processus de Wiener sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}'$. Le changement de mesure est donné par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\frac{d\mathbb{P}'}{d\mathbb{P}} = \exp\left[\int_0^t \phi(t)\ dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \phi^2(t)\ ds \right]$$

2.3 Fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite