

Correction de l'Examen de Stratégies Quantitatives de Gestion

Thierry Roncalli

15 Mars 2012

Références

[TR-QAM] RONCALLI T. (2010), *La Gestion d'Actifs Quantitative*, Economica.

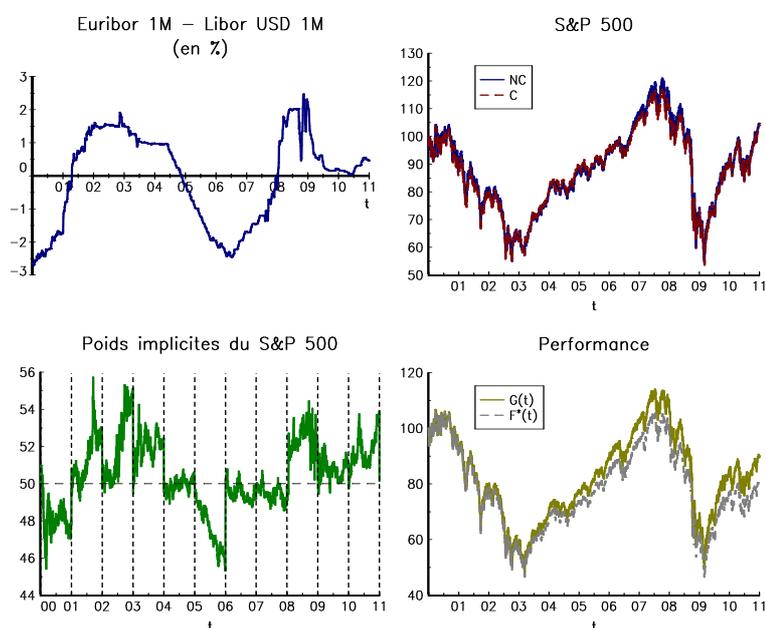
1 Construction d'un backtest

1. Voir TR-QAM, pages 627-629.
2. Voir TR-QAM, page 614.
3. On peut utiliser Reuters mais aussi Datastream ou Bloomberg.
4. On utilise la formule de couverture de change page 56 de TR-QAM. Sur le graphique 1, on a reporté la différence entre les taux Libor 1M EUR et USD. Celle-ci évolue entre -3% et $+3\%$. Sur toute la période, la moyenne est proche de zéro, ce qui explique que le track hedgé en euros du S&P 500 TR (courbe C) est très proche du track S&P 500 TR (courbe NC).
5. Il faut utiliser la méthode de rebalancement décrite dans les pages 47-50 de TR-QAM. Sur le graphique 1, on a représenté l'évolution du poids implicite de l'indice S&P 500 (celui de l'indice Eurostoxx 50 étant le complément). On note que les poids dérivent pendant l'année en cours et qu'ils sont remis à 50% tous les 1^{er} janvier. On obtient finalement la simulation $G(t)$.
6. On applique la formule page 51 de TR-QAM. La valeur nette du backtest correspond alors à la simulation $F^*(t)$ du graphique 1.
7. Le reporting correspond au tableau 1.
8. On note que la date de rebalancement a une faible influence sur la performance globale. Cela est dû au fait que les deux indices sont très fortement corrélés. Par contre, on note des différences significatives concernant les rendements annuels de la stratégie.

TAB. 1 – Statistiques (01/01/2000 – 31/12/2010)

Rendement	-2,0%	Drawdown			
Volatilité	21,2%	1D	-7,8%	Max	-57,3%
Sharpe	-0,23	1M	-29,1%	Début	24/03/00
r	2.87%	1Y	-50,6%	Fin	09/03/09
Skewness	0,21	VaR	1%	5%	
Kurtosis	9,46	1D	3,8%	2,1%	
BM	12,4%	1W	8,4%	4,7%	
	(Avr. 09)	1M	16,9%	10,0%	
WM	-15,8%	6M	27,7%	17,8%	
	(Oct. 08)	1Y	43,1%	36,5%	

FIG. 1 – Résultats de l'exercice 1



2 Budgétisation du risque, portefeuille ERC et stratégie « *risk parity* »

1. (a) La volatilité du portefeuille $\sigma(x)$ est :

$$\sigma(x) = \sqrt{x^\top \Sigma x}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} = \frac{2\Sigma x}{2\sqrt{x^\top \Sigma x}} = \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

L'expression de la volatilité marginale $\partial_{x_i} \sigma(x)$ de l'actif i ainsi que sa contribution en risque RC_i sont :

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \sigma(x) &= \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\ RC_i &= \frac{x_i \cdot (\Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \end{aligned}$$

On vérifie que la volatilité satisfait le principe de décomposition d'Euler :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n RC_i &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot (\Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\ &= x^\top \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\ &= \sqrt{x^\top \Sigma x} \\ &= \sigma(x) \end{aligned}$$

(b) Les résultats (exprimés en %) sont :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC_i	$RC_i / \sigma(x)$
1	25,00	13,64	3,41	28,60
2	25,00	19,54	4,88	40,98
3	25,00	8,73	2,18	18,32
4	25,00	5,77	1,44	12,10
$\sigma(x)$			11,92	

et :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC_i	$RC_i / \sigma(x)$
1	20,00	12,13	2,43	21,79
2	20,00	17,69	3,54	31,78
3	30,00	10,44	3,13	28,15
4	30,00	6,78	2,03	18,28
$\sigma(x)$			11,13	

On remarque que le premier portefeuille est bien équilibré en poids, mais que le risque est concentré sur les deux premiers actifs. Le deuxième portefeuille est beaucoup plus équilibré en risque.

2. (a) La contribution en risque $x_i \times \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i}$ est mesurée en euros alors que le budget de risque b_i est mesuré en %. Le budget de risque en euros est donc $b_i \times \sigma(x)$.
- (b) Si $\rho_{1,2} = 0$, on a :

$$RC_1 = \frac{x_1^2 \sigma_1^2}{\sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2}}$$

et :

$$RC_2 = \frac{x_2^2 \sigma_2^2}{\sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2}}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} x_1^2 \sigma_1^2 / b_1 = x_2^2 \sigma_2^2 / b_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

On obtient donc :

$$x_{rb} = \left(\frac{\sigma_2 \sqrt{b_1}}{\sigma_1 \sqrt{b_2} + \sigma_2 \sqrt{b_1}}, \frac{\sigma_1 \sqrt{b_2}}{\sigma_1 \sqrt{b_2} + \sigma_2 \sqrt{b_1}} \right) \quad (1)$$

Le poids de l'actif 1 est égal à 50,00%, 55,05%, 60,44%, 66,67%, 75,00%, 81,34%, 90,87% et 96,93% lorsque le budget de risque b_1 vaut respectivement 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 95%, 99% et 99,9%. On observe l'effet de convexité de la volatilité. Ainsi, si $b_1 = 99\%$, $x_1 = 90,87\%$ et $x_2 = 9,13\%$. Dans ce cas, le deuxième actif apparaît comme très diversifiant car le poids de l'actif 1 est important. Bien sûr, si $b_1 = 1\%$, on obtient $x_1 = 9,13\%$ et $x_2 = 90,87\%$, et c'est maintenant le premier actif qui apparaît comme diversifiant.

(c) On obtient les résultats suivants :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC_i	$RC_i / \sigma(x)$
1	18,38	11,29	2,08	20,00
2	13,65	15,20	2,08	20,00
3	27,49	11,33	3,11	30,00
4	40,47	7,69	3,11	30,00
$\sigma(x)$			10,38	

On remarque que la volatilité du portefeuille budgété un risque est plus faible que celle du portefeuille budgété en poids.

3. (a) Si $b_1 = b_2$, la formule (1) devient :

$$x_{\text{erc}} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)$$

- (b) Si $\rho_{i,j} = \rho$, la contribution en risque est :

$$\text{RC}_i = \frac{x_i \sigma_i \left((1 - \rho) x_i \sigma_i + \rho \left(\sum_{j=1}^n x_j \sigma_j \right) \right)}{\sigma(x)}$$

Le portefeuille ERC vérifie donc :

$$x_i \sigma_i = x_j \sigma_j$$

On obtient donc :

$$x_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1}}$$

Les poids sont donc inversement proportionnels à la volatilité et le portefeuille ERC ne dépend pas du niveau de la corrélation ρ . Ceci s'explique par le fait que la matrice de corrélation induit un modèle à un seul facteur. La sensibilité à ce facteur est la même pour tous les actifs. Pour obtenir la diversification maximale de risque, il faut donc diversifier le risque spécifique.

- (c) On obtient les résultats suivants :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC_i	$\text{RC}_i / \sigma(x)$
1	21,35	12,46	2,66	25,00
2	16,08	16,54	2,66	25,00
3	25,38	10,49	2,66	25,00
4	37,19	7,15	2,66	25,00
$\sigma(x)$			10,64	

- (d) Le portefeuille ERC est un portefeuille compris entre le portefeuille de variance minimale et le portefeuille 1/n (TR-QAM, page 132) :

$$\sigma_{\text{mv}} \leq \sigma_{\text{erc}} \leq \sigma_{1/n}$$

Il est optimal si $\rho_{i,j} = \rho$ et si tous les actifs ont le même ratio de Sharpe. Enfin, c'est le portefeuille qui présente le même montant de beta pour tous les actifs :

$$x_i \beta_i = x_j \beta_j$$

4. (a) On obtient les résultats suivants (en pbs) pour la matrice de covariance Σ annualisée :

Année	$\Sigma_{1,1}$	$\Sigma_{2,1}$	$\Sigma_{2,2}$	$\Sigma_{3,1}$	$\Sigma_{3,2}$	$\Sigma_{3,3}$
2000	31,89	-4,08	153,75	-5,27	-6,47	161,87
2001	37,86	6,47	247,73	4,78	-6,76	211,11
2002	49,57	-4,55	286,43	3,03	5,71	168,28
2003	54,24	-56,36	428,24	-13,12	63,95	184,61
2004	62,44	-27,44	191,33	25,07	-13,85	196,27
2005	70,10	28,31	94,51	38,01	28,47	278,29
2006	49,14	16,37	63,59	17,88	21,25	286,63
2007	43,21	21,93	100,18	19,41	55,28	298,11
2008	30,30	-18,35	167,53	5,50	60,05	211,34
2009	93,21	-51,68	1090,99	22,54	454,49	833,62
2010	77,02	40,01	543,83	24,79	371,52	620,33
2011	47,47	17,35	280,30	18,01	181,62	286,55
2012	35,43	34,33	462,17	25,69	221,67	327,89

- (b) On obtient les résultats (en %) du tableau suivant. Ces portefeuilles sont typiques de la gestion diversifiée traditionnelle. Ces portefeuilles sont destinés à des investisseurs dont les profils de risque sont différents. Par exemple, l'investisseur très adverse au risque préférera le portefeuille défensif (TR-QAM, page 156). On note néanmoins que la volatilité de ces portefeuilles n'est pas contrôlée. Ainsi, les portefeuilles équilibré et dynamique ont une volatilité ex-ante en 2006 plus faible que celle du portefeuille prudent en 2009! On remarque aussi que les portefeuilles diversifiés équilibré et dynamique portent mal leur nom, puisque ce sont des portefeuilles très concentrés en risque sur les actions (la contribution en risque de cette classe d'actifs est proche de 100%).

Année	Défensif			Équilibré			Dynamique		
	$\sigma(x)$	RC ₁	RC ₂	$\sigma(x)$	RC ₁	RC ₂	$\sigma(x)$	RC ₁	RC ₂
2000	5,03	78,23	21,77	6,66	15,67	84,33	9,92	0,63	99,37
2001	6,02	69,77	30,23	8,64	14,85	85,15	12,73	1,57	98,43
2002	6,46	74,29	25,71	9,04	13,77	86,23	13,56	0,68	99,32
2003	5,81	76,00	24,00	9,61	-0,57	100,57	16,07	-2,65	102,65
2004	6,23	91,60	8,40	7,05	17,60	82,40	10,78	-1,63	101,63
2005	7,60	85,60	14,40	7,44	44,48	55,52	8,51	10,14	89,86
2006	6,26	86,84	13,16	6,03	45,04	54,96	6,92	9,57	90,43
2007	6,22	80,57	19,43	6,84	34,79	65,21	8,54	7,19	92,81
2008	4,50	81,38	18,62	6,35	7,41	92,59	10,13	-1,68	101,68
2009	9,31	59,23	40,77	16,44	3,84	96,16	26,18	-0,66	100,66
2010	9,16	66,42	33,58	13,24	16,70	83,30	19,08	2,61	97,39
2011	6,87	70,33	29,67	9,52	17,88	82,12	13,67	2,50	97,50
2012	7,22	54,02	45,98	11,90	12,32	87,68	17,56	2,24	97,76

- (c) Le 2 janvier 2012, la volatilité ex-ante des trois classes d'actifs est égale à 5,95% (obligations), 21,50% (actions) et 18,11% (matières premières). Pour les corrélations, on obtient 26,83% (obligations / actions), 23,84% (obligations / matières premières) et 59,94% (actions / matières premières). En considérant ces chiffres, le portefeuille *risk parity* est le suivant :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC _{i}	RC _{i} / $\sigma(x)$
1	65,14	4,13	2,69	33,33
2	15,81	17,04	2,69	33,33
3	19,05	14,14	2,69	33,33
$\sigma(x)$			8,08	

- (d) i. La solution est la suivante :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC _{i}	RC _{i} / $\sigma(x)$
1	78,32	4,74	3,71	50,00
2	21,68	17,12	3,71	50,00
3	0,00	9,18	0,00	0,00
$\sigma(x)$			7,42	

On obtient une tracking error de 3,8%.

- ii. Pour le premier jeu de budget de risque, on a :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC _{i}	RC _{i} / $\sigma(x)$
1	76,02	4,77	3,63	50,00
2	17,38	16,69	2,90	40,00
3	6,60	10,99	0,73	10,00
$\sigma(x)$			7,25	

La solution devient pour le deuxième jeu de budget de risque :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC_i	$RC_i / \sigma(x)$
1	71,26	4,40	3,14	40,00
2	21,85	17,94	3,92	50,00
3	6,89	11,39	0,78	10,00
$\sigma(x)$			7,84	

Enfin, le troisième jeu de budget de risque donne la solution suivante :

i	x_i	$\partial_{x_i} \sigma(x)$	RC_i	$RC_i / \sigma(x)$
1	73,75	4,59	3,39	45,00
2	19,53	17,34	3,39	45,00
3	6,72	11,20	0,75	10,00
$\sigma(x)$			7,53	

La tracking error est respectivement égale à 4,2%, 3,3% et 3,7%. Le premier budget de risque ne satisfait donc pas la contrainte de tracking error de l'investisseur. Par rapport à l'allocation de l'investisseur (question 4.d.i), on note que l'on peut obtenir un portefeuille (troisième jeu de budget de risque) présentant quasiment la même volatilité avec une exposition plus importante aux classes d'actifs risqués (actifs et matières premières).

5. (a) L'indexation basée sur le risque (*risk-based indexation*) consiste à pondérer les actifs en ne tenant compte que du risque. Elle s'oppose donc à l'indexation par capitalisation boursière ou l'indexation fondamentale. Les différentes méthodes sont le portefeuille de variance minimale (MV), le portefeuille MDP/MSR, le portefeuille 1/n et le portefeuille ERC (TR-QAM, page 134).
- (b) On peut pondérer les poids des obligations en utilisant la technique de budgétisation du risque, en fixant par exemple les budgets de risque proportionnels au montant de la dette.
- (c) La méthode *risk parity* permet de construire le portefeuille le plus diversifié. C'est donc le portefeuille le moins concentré en risque (le coefficient de Gini des contributions en risque est égal à zéro, TR-QAM pages 574-577). Historiquement, les stratégies *risk parity* ont donné de bonnes performances. Une des critiques que l'on peut faire est que ce type de stratégies risque de souffrir si les taux remontent (à cause de la forte proportion obligataire).

3 Les stratégies « *tail risk hedging* »

1. Les stratégies *tail risk hedging* sont des stratégies de couverture du risque de queue, c'est-à-dire des stratégies qui permettent de modérer les pertes lorsque le marché (généralement des actions) est baissier.
2. (a) La stratégie *volatility target* est définie aux pages 589-591 de TR-QAM.
- (b) i. $\hat{\sigma}_t$ est un estimateur de la volatilité non centrée annualisée. Cet estimateur est court si $\lambda \rightarrow 0$ et s'apparente à un processus Garch.
- ii. On pose :

$$\theta = \frac{1 - \lambda}{\delta_t}$$

On a donc $\lambda = 1 - \theta\delta_t$. On en déduit que :

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \theta\delta_t) \hat{\sigma}_{t-1}^2 + \theta R_t^2$$

iii. On a :

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_t^2 &= \theta R_t^2 + (1 - \theta\delta_t)\hat{\sigma}_{t-1}^2 \\
&= \theta R_t^2 + (1 - \theta\delta_t)\theta R_{t-1}^2 + (1 - \theta\delta_t)^2\hat{\sigma}_{t-2}^2 \\
&= \theta R_t^2 + (1 - \theta\delta_t)\theta R_{t-1}^2 + (1 - \theta\delta_t)^2\theta R_{t-2}^2 + (1 - \theta\delta_t)^3\hat{\sigma}_{t-3}^2 \\
&= \frac{1}{\delta_t} \sum_{i=0}^{\infty} w_{t-i} R_{t-i}^2
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
w_{t-i} &= (1 - \theta\delta_t)^i \theta\delta_t \\
&= \lambda^i \theta\delta_t
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}
W_n &= \sum_{i=0}^{n-1} w_{t-i} \\
&= \delta_t \theta \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \\
&= \delta_t \theta \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} \\
&= 1 - \lambda^n
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 1$$

$V_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_{t-i} R_{t-i}^2$ est donc un estimateur non centré de la variance journalière. On vérifie donc que $\hat{\sigma}_t^2 = \delta_t^{-1} V_t$ est un estimateur de la variance annualisée. La fonction de poids $W_n = \sum_{i=0}^{n-1} w_{t-i}$ est représentée sur le graphique 2.

- (c) i. Le processus $\hat{\sigma}_t$ est représenté sur le graphique 3.
ii. Sur le graphique 4, la stratégie *buy and hold* est représentée en trait plein alors que la stratégie *volatility target* correspond au trait pointillé.
iii. On suppose que :

$$R_t \sim \mathcal{N}(0, h_t^2)$$

avec h_t^2 la variance conditionnelle journalière. On a donc (TR-QAM, page 380) :

$$\begin{aligned}
h_t^2 &= \delta_t \hat{\sigma}_{t-1}^2 \\
&= \delta_t (1 - \theta\delta_t)\hat{\sigma}_{t-2}^2 + \delta_t \theta R_{t-1}^2 \\
&= \lambda h_{t-1}^2 + (1 - \lambda) R_{t-1}^2
\end{aligned}$$

La log-vraisemblance de ce processus IGarch(1,1) s'écrit (TR-QAM, page 381) :

$$\ell = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln h_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{R_t^2}{h_t^2}$$

On obtient les estimations suivantes : $\hat{\lambda} = 0,9218$ (obligations), $\hat{\lambda} = 0,9098$ (actions) et $\hat{\lambda} = 0,9326$ (matières premières).

- iv. La stratégie *volatility target* a permis de réduire le drawdown, c'est donc une stratégie *tail risk hedging*.

FIG. 2 – Fonction de poids $W_n = \sum_{i=0}^{n-1} w_{t-i}$

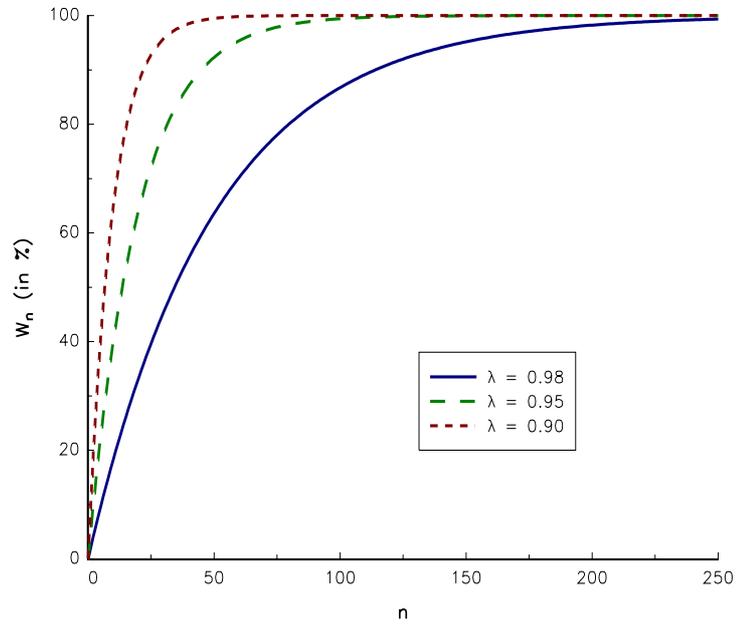


FIG. 3 – Processus $\hat{\sigma}_t$

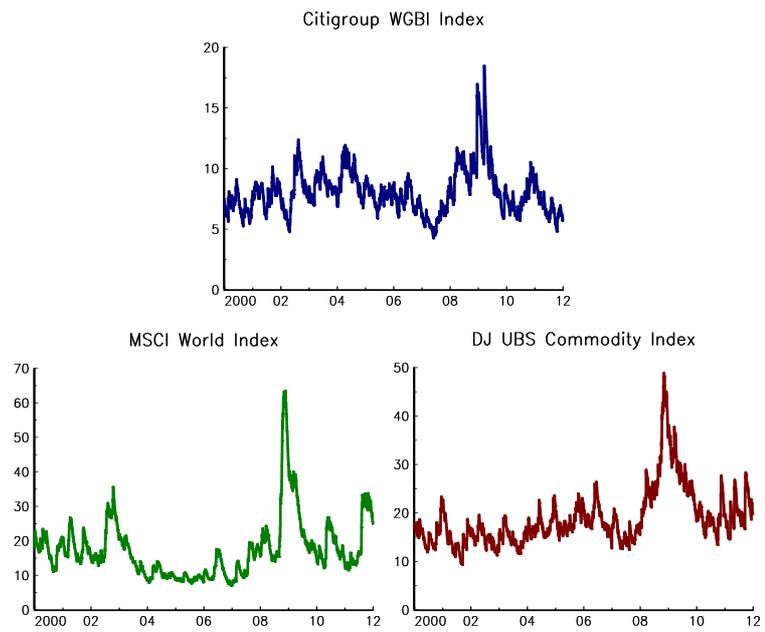
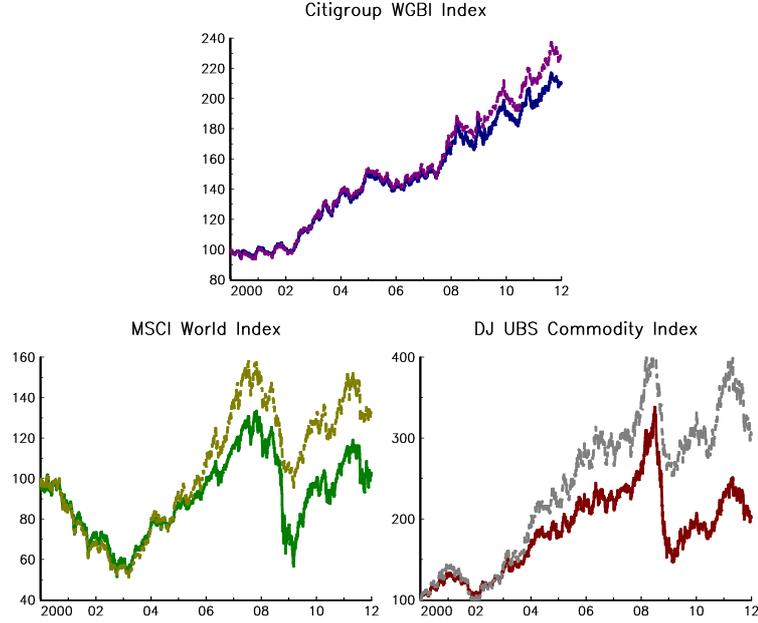


FIG. 4 – Comparaison des stratégies *volatility target* et *buy and hold*



3. (a) La stratégie *CTA* (ou *commodity trading advisor*) est définie aux pages 30 et 540 de TR-QAM.
- (b)
 - i. Le processus $\hat{\mu}_t$ est représenté sur le graphique 5.
 - ii. Les stratégies *CTA* et *buy and hold* sont représentées sur le graphique 6 (*CTA* en trait pointillé et *buy and hold* en trait plein).
 - iii. On note une forte sensibilité au paramètre λ . C'est normal puisque $\hat{\mu}_t$ est un estimateur de la tendance. Donc, en fonction de λ , la tendance estimée sera plus ou moins longue.
 - iv. C'est plus difficile d'affirmer que la stratégie *CTA* est une stratégie *tail risk hedging*. En fait, tout dépend si la baisse du marché se fait de façon brutale ou si celle-ci est plus continue. S'il existe une vraie tendance à la baisse, alors la stratégie *CTA* va la capter et permettra d'être short au bon moment.
- (c)
 - i. Soit $x_{i,t}$ le poids de l'actif i dans le portefeuille. Le programme d'optimisation s'écrit :

$$\{x_{1,t}^*, x_{2,t}^*, x_{3,t}^*\} = \arg \max \sum_{i=1}^3 x_{i,t} \cdot \hat{\mu}_{i,t}$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_{i,t}^2 \cdot \hat{\sigma}_{i,t}^2} \leq \sigma^* \\ -2 \leq x_{i,t} \leq 2 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i,t} = 1 \end{cases}$$

avec $\hat{\mu}_{i,t}$ et $\hat{\sigma}_{i,t}$ les estimateurs de tendance et de volatilité de l'actif i . σ^* est la volatilité ex-ante maximale du portefeuille.

- ii. Si la volatilité σ^* est fixé à 15%, on obtient la simulation du graphique 7.
- iii. On obtient une performance assez décevante lors de la crise de 2008. Ceci-est dû à la fréquence de rebalancement qui est trop basse. Notons que si on change la valeur de σ^* , on peut obtenir un comportement différent.

FIG. 5 – Tendance estimée $\hat{\mu}_t$

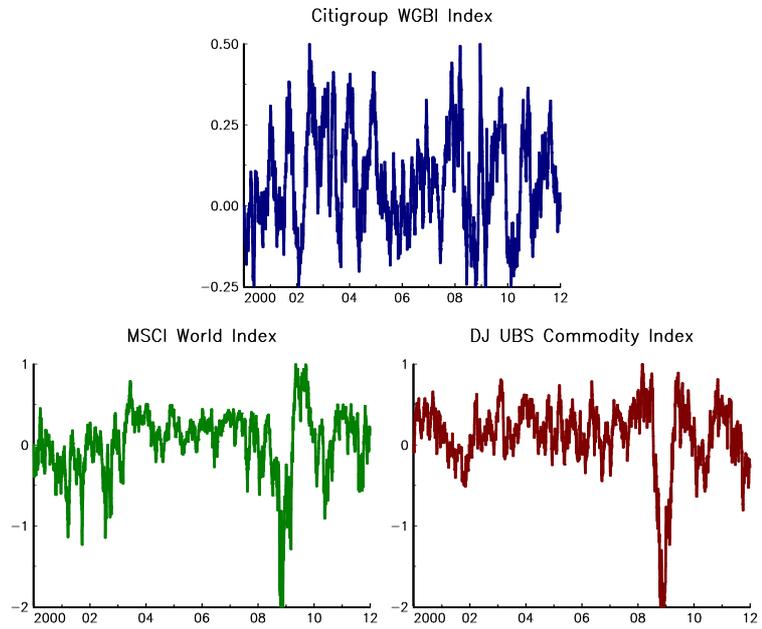


FIG. 6 – Simulation de la stratégie *CTA* uni-dimensionnelle

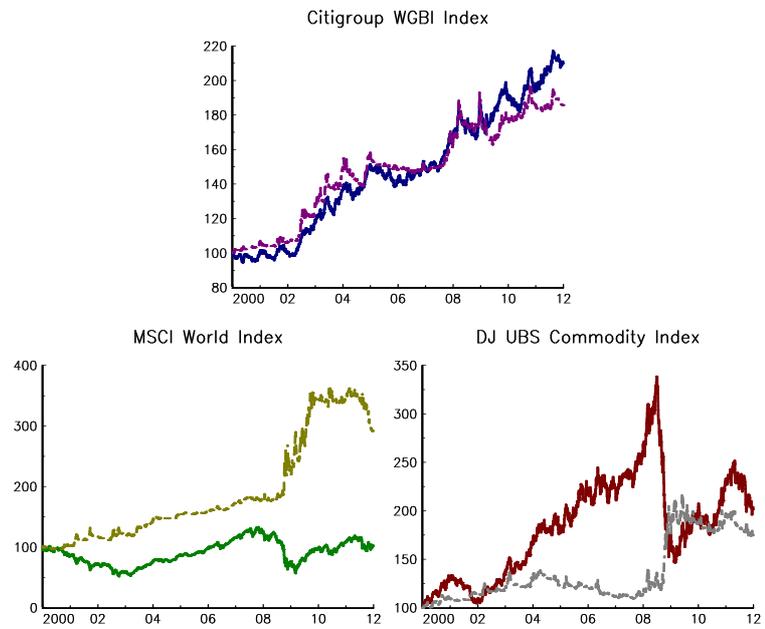
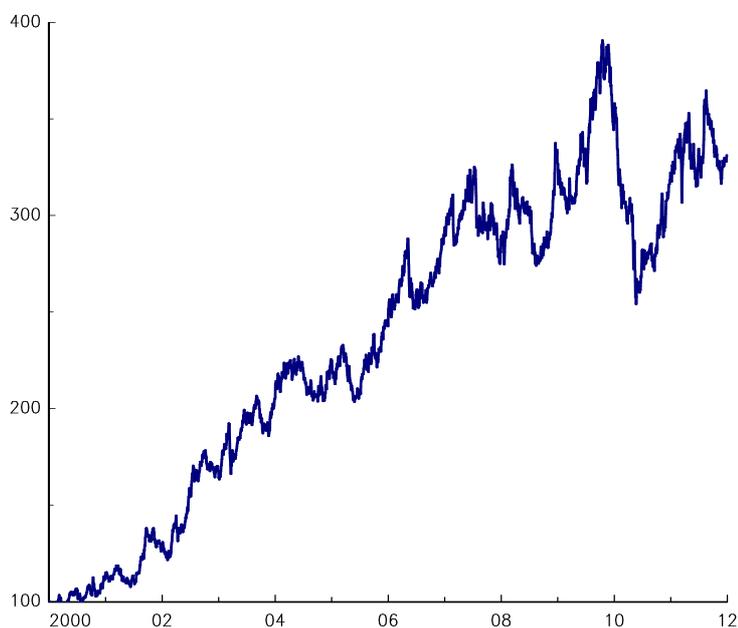


FIG. 7 – Simulation de la stratégie *CTA* multi-dimensionnelle



4. (a) La rationalité d'achat de volatilité est expliquée à la page 506 de TR-QAM. Donnez aussi l'exemple de l'indice *BXM* qui permet de réduire la volatilité et le drawdown de l'indice *S&P 500* (TR-QAM, pages 479-480).
- (b) On peut acheter de la volatilité via une position optionnelle (voir les différentes stratégies décrites dans TR-QAM, en particulier les stratégies straddle présentées aux pages 485-487) ou en utilisant les swaps de variances (TR-QAM, pages 489-507) ou en considérant les futures sur l'indice *VIX* (TR-QAM, pages 506-507).
- (c) Une position systématique acheteuse de volatilité permet de bien diversifier le portefeuille notamment en période de baisse des marchés actions, mais elle coûte énormément en portage (TR-QAM, page 498).