

Correction de l'Examen de Gestion des Risques Financiers

Thierry Roncalli

4 janvier 2012

Remarque 1 Les 5 premières questions sont traitées dans TR-GDR¹ ainsi que dans le document de correction des exercices disponible sur mon site internet². La question 1.2 sur l'Accord Bâle III a été abordée à la dernière séance de cours.

- 1 Les réglementations Bâle II et Bâle III
- 2 Le risque de marché
- 3 Le risque de crédit
- 4 Le risque de contrepartie sur opérations de marché
- 5 Le risque opérationnel
- 6 Valeur en risque d'un portefeuille d'actions avec une couverture optionnelle

1. Le PnL du portefeuille est :

$$\text{PnL}(t; t+1) = w_A R_A(t+1) + w_B R_B(t+1) + w_C R_C(t+1)$$

où w_i et $R_i(t+1)$ sont la richesse investie³ dans le titre i et son rendement entre les dates t et $t+1$. La variance du PnL du portefeuille est donc :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + w_C^2 \sigma_C^2 + \\ &\quad 2w_A w_B \rho_{A,B} \sigma_A \sigma_B + 2w_A w_C \rho_{A,C} \sigma_A \sigma_C + 2w_B w_C \rho_{B,C} \sigma_B \sigma_C \end{aligned}$$

On a $w_A = 200$, $w_B = 200$ et $w_C = 100$. La valeur actuelle du portefeuille est donc égale à 500 euros. On en déduit que la volatilité **annuelle** du PnL est :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= 200^2 \times 0,2^2 + 200^2 \times 0,2^2 + 100^2 \times 0,4^2 + \\ &\quad 2 \times 200 \times 100 \times 0,5 \times 0,2 \times 0,4 \end{aligned}$$

On obtient $\sigma = 80$. Soit h la période de détention (exprimée en années). On a :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{3M} &= \Phi^{-1}(\alpha) \times \sqrt{h} \times \sigma \\ &= \Phi^{-1}(0,99) \times \sqrt{\frac{3}{12}} \times 80 \\ &= 93,05 \text{ euros} \end{aligned}$$

La VaR 3 mois représente donc 18,61% de la valeur actuelle du portefeuille.

1. Thierry Roncalli, *La Gestion des Risques Financiers*, Economica, deuxième édition, 2009.
2. L'adresse internet est www.thierry-roncalli.com/download/gdr-correction.pdf.
3. On a $w_i = n_i \times P_i(t)$ avec n_i le nombre de titres i achetés et $P_i(t)$ le prix actuel de l'action i .

2. On a :

$$\text{PnL}(t; t+1) = 200R_A(t+1) + 200R_B(t+1) + 100R_C(t+1)$$

On utilise les données historiques pour calculer les scénarios de rendements joints (R_A, R_B, R_C) . On en déduit ensuite la distribution empirique du PnL⁴. Enfin, on calcule le quantile empirique correspondant. Avec 260 scénarios, le quantile empirique 1% est entre la deuxième et la troisième pire perte (TR-GDR, page 66) :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1D} &= -[-14,33 + (260 \times 1\% - 2) \times (-12,90 - (-14,33))] \\ &= 13,47 \end{aligned}$$

Pour obtenir la VaR trimestrielle, on utilise la règle de la racine carrée⁵ :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{3M} &= 13,47 \times \sqrt{60} \\ &= 104,35 \text{ euros} \end{aligned}$$

3. On a⁶ :

$$\begin{aligned} \text{PnL}(t; t+1) &= x_A P_A(t) R_A(t+1) + x_B P_B(t) R_B(t+1) + x_C (P_C(t+1) - P_C(t)) + \\ & n (\text{Put}_C(t+1) - \text{Put}_C(t)) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial \text{PnL}(t; t+1)}{\partial P_C(t+1)} = x_C + n \Delta_C(t)$$

où $\Delta_C(t)$ est la valeur du delta de l'option de vente. En l'absence de couverture, on a :

$$\frac{\partial \text{PnL}(t; t+1)}{\partial P_C(t+1)} = x_C = 2$$

On vérifie donc que la sensibilité du portefeuille est bien égale à 2 (c'est-à-dire le nombre de titres C dans le portefeuille). Pour couvrir 50% du risque sur le titre C (c'est-à-dire avoir une sensibilité égale à 1), le gérant doit acheter 4 options :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{PnL}(t; t+1)}{\partial P_C(t+1)} &= 2 - 4 \times 0,25 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Cela revient à construire une position synthétique acheteuse d'un titre C (et non plus de deux titres C). On a donc :

$$\text{PnL} = 200R_A + 200R_B + 50R_C$$

Le calcul numérique donne une VaR trimestrielle égale à 77,16 euros.

4. On reprend l'expression précédente du PnL. On a :

$$\begin{aligned} \text{PnL}(t; t+1) &= x_A P_A(t) R_A(t+1) + x_B P_B(t) R_B(t+1) + x_C P_C(t) R_C(t+1) + \\ & n (\text{Put}_C(t+1) - \text{Put}_C(t)) \end{aligned}$$

Si on suppose que les rendements sont gaussiens, la décomposition de Cholesky implique que :

$$\begin{aligned} R_A(t+1) &= \sigma_A \rho_{A,C} X_C + \sigma_A \sqrt{1 - \rho_{A,C}^2} X_A \\ R_B(t+1) &= \sigma_B X_B \\ R_C(t+1) &= \sigma_C X_C \end{aligned}$$

4. Dans la question précédente, on modélise le PnL annuel. Dans cette question, le PnL est journalier.

5. On suppose que trois mois correspond à 60 jours de trading.

6. On utilise la relation suivante :

$$P_i(t+1) - P_i(t) = P_i(t) R_i(t+1)$$

avec X_A , X_B et X_C trois facteurs gaussiens standardisés et indépendants. On a donc :

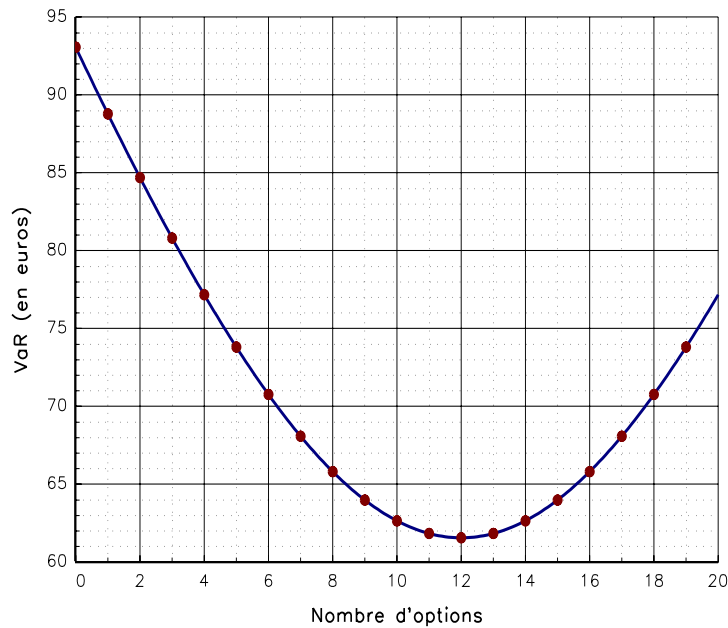
$$\begin{aligned} R_A(t+1) &= \frac{\sigma_A \rho_{A,C}}{\sigma_C} R_C(t+1) + \sigma_A \sqrt{1 - \rho_{A,C}^2} X_A \\ R_B(t+1) &= 0 \times R_C(t+1) + \sigma_B X_B \end{aligned}$$

En tenant compte des corrélations, la sensibilité du PnL au rendement du titre C est donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{PnL}(t; t+1)}{\partial R_C(t+1)} &= x_A P_A(t) \frac{\sigma_A \rho_{A,C}}{\sigma_C} + x_B P_B(t) \times 0 + x_C P_C(t) + n P_C(t) \Delta_C(t) \\ &= 2 \times 100 \times \frac{0,2 \times 0,5}{0,4} + 0 + 2 \times 50 - n \times 50 \times 0,25 \\ &= 150 - 12,5 \times n \end{aligned}$$

Si $n = 12$, la sensibilité du PnL au rendement du titre C est nulle. Le raisonnement du gérant est juste à partir du moment où l'on accepte la décomposition factorielle précédente. Dans ce cas, on obtient une VaR trimestrielle égale à 61,55 euros. À titre d'illustration, on a reporté la valeur de la VaR en fonction du nombre d'options n sur le graphique 1. On vérifie que celle-ci est minimale lorsque $n = 12$.

FIGURE 1 – VaR en fonction du nombre n d'options



7 Produits exotiques et gestion des risques

1. Le *mark-to-market* fait référence au prix de marché d'un produit financier, alors que le *mark-to-model* correspond à un prix calculé avec un modèle de valorisation (TR-GDR, pages 96-98). Sur un marché listé, le prix est donc *mark-to-market*, alors qu'il est *mark-to-model* dans un marché OTC. Par construction, les dérivés exotiques s'échangent sur un marché OTC. Il n'existe donc pas de prix *mark-to-market* pour ces produits. On utilise donc le modèle de valorisation pour calculer la valeur en risque d'un portefeuille de dérivés exotiques, mais aussi pour la procédure de backtesting. Si le modèle de valorisation n'est pas bon, la VaR ne sera pas bonne ainsi que le calcul quotidien du

PnL. La procédure de backtesting est alors fautive, puisque une non-exception peut correspondre à un mauvais calcul du PnL.

2. Le risque de modèle est l'ensemble des risques auxquels s'expose une institution financière dont la gestion des risques repose sur des modèles mathématiques (TR-GDR, page 98). Celui-ci comprend le risque opérationnel (erreurs d'implémentation, etc.), le risque de paramètre, le risque de spécification et le risque de couverture.
3. On peut calculer la VaR d'un portefeuille de dérivés exotiques en utilisant la méthode historique, les méthodes basées sur les sensibilités (VaR delta, VaR delta-gamma, etc.), la VaR Cornish-Fisher ou la méthode de Monte Carlo (TR-GDR, pages 93-95).
4. On a :

$$\text{PnL} = C(S_t, \Sigma_t) - C(S_{t+1}, \Sigma_{t+1})$$

avec S_t la valeur du sous-jacent et Σ_t la volatilité implicite à la date t .

- (a) La valeur du sous-jacent a baissé alors que la volatilité implicite est restée la même. La probabilité d'exercer l'option diminue, ce qui implique que :

$$C(S_{t+1}, \Sigma_{t+1}) \leq C(S_t, \Sigma_t)$$

On en déduit que :

$$\text{PnL} \geq 0$$

On a (TR-GDR, page 94) :

$$\begin{aligned} \text{PnL} &= C(S_t, \Sigma_t) - C(S_{t+1}, \Sigma_{t+1}) \\ &= -(C(S_{t+1}, \Sigma_{t+1}) - C(S_t, \Sigma_t)) \\ &\simeq -\Delta_t \times (S_{t+1} - S_t) - \frac{1}{2} \times \Gamma_t \times (S_{t+1} - S_t)^2 - v_t \times (\Sigma_{t+1} - \Sigma_t) \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs numériques de Δ_t , Γ_t et v_t , on obtient :

$$\begin{aligned} \text{PnL} &\simeq -0,49 \times (97 - 100) - \frac{1}{2} \times 0,02 \times (97 - 100)^2 - 40 \times 0 \\ &= 1,47 - 0,09 - 0,00 \\ &= 1,38 \end{aligned}$$

On arrive donc à expliquer le PnL par les sensibilités.

- (b) La valeur du sous-jacent a augmenté ainsi que la volatilité implicite. La probabilité d'exercer l'option augmente donc puisque $\Delta_t > 0$ et $v_t > 0$, ce qui implique que :

$$C(S_{t+2}, \Sigma_{t+2}) \geq C(S_{t+1}, \Sigma_{t+1})$$

On en déduit que :

$$\text{PnL} \leq 0$$

On a :

$$\text{PnL} \simeq -\Delta_{t+1} \times (S_{t+2} - S_{t+1}) - \frac{1}{2} \times \Gamma_{t+1} \times (S_{t+2} - S_{t+1})^2 - v_{t+1} \times (\Sigma_{t+2} - \Sigma_{t+1})$$

On obtient le résultat numérique suivant :

$$\begin{aligned} \text{PnL} &\simeq -0,43 \times (100 - 97) - \frac{1}{2} \times 0,02 \times (100 - 97)^2 - 0,38 \times (22 - 20) \\ &= -1,29 - 0,09 - 0,76 \\ &= -2,14 \end{aligned}$$

En utilisant les sensibilités, on n'explique que seulement 90% du PnL.

- (c) On voit que si la volatilité est constante, on arrive à bien expliquer le PnL par les sensibilités. Ce n'est plus le cas lorsque la volatilité bouge. Il y a manifestement un risque de modèle concernant la modélisation de la volatilité. Le pricer utilise sûrement une mauvaise dynamique pour appréhender la volatilité et sous-estime le véga de l'option (TR-GDR, pages 103-113).

8 Calcul de l'exigence de fonds propres d'une opération OTC au titre du risque de contrepartie

1. (a) Notons $MtM_A(\mathcal{C})$ et $MTM_B(\mathcal{C})$ le mark-to-market des banques A et B pour le contrat \mathcal{C} . On doit vérifier théoriquement que :

$$\begin{aligned} MtM_{A+B}(\mathcal{C}) &= MTM_A(\mathcal{C}) + MTM_B(\mathcal{C}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans le cas de contrats listés, la relation précédente est généralement vérifiée. Dans le cas de contrats OTC, il n'y a pas de prix de marché. Dans ce cas, la banque utilise un modèle pour valoriser le contrat OTC. On parle d'une valorisation en mark-to-model. La relation $MTM_{A+B}(\mathcal{C}) = 0$ (ou $MTM_{A+B}(\mathcal{C}) \simeq 0$) n'est plus forcément vérifiée pour plusieurs raisons : les deux contreparties n'utilisent pas forcément le même modèle de valorisation, les paramètres utilisés ne sont pas exactement les mêmes, les systèmes de provisionnement pour le risque de modèle (appelés aussi *réfections*) ne sont pas comparables, etc. Dans cet exemple, on obtient :

$$\begin{aligned} MTM_{A+B}(\mathcal{C}_1) &= 10 - 11 = -1 \\ MTM_{A+B}(\mathcal{C}_2) &= -5 + 6 = 1 \\ MTM_{A+B}(\mathcal{C}_3) &= 6 - 3 = 3 \\ MTM_{A+B}(\mathcal{C}_4) &= 17 - 12 = 5 \\ MTM_{A+B}(\mathcal{C}_5) &= -5 + 9 = 4 \\ MTM_{A+B}(\mathcal{C}_6) &= -5 + 5 = 0 \\ MTM_{A+B}(\mathcal{C}_7) &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Il y a donc un contrat qui vérifie exactement la relation (c'est le contrat \mathcal{C}_6). La relation est presque vérifiée pour deux autres contrats (ce sont les contrats \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2). Pour le contrat \mathcal{C}_7 , chaque contrepartie pense être gagnante et affiche un mark-to-market positif! Enfin, il y a trois contrats qui présentent de grosses différences (ce sont les contrats \mathcal{C}_3 , \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}_5).

- (b) On a (TR-GDR, pages 216-217) :

$$EAD = \sum_{i=1}^I \max(MTM(\mathcal{C}_i), 0)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} EAD_A &= 10 + 6 + 17 + 1 = 34 \\ EAD_B &= 6 + 9 + 5 + 1 = 21 \end{aligned}$$

- (c) On a (TR-GDR, page 217) :

$$EAD = \max\left(\sum_{i=1}^I MTM(\mathcal{C}_i), 0\right)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} EAD_A &= \max(10 - 5 + 6 + 17 - 5 - 5 + 1, 0) = \max(19, 0) = 19 \\ EAD_B &= \max(-11 + 6 - 3 - 12 + 9 + 5 + 1, 0) = \max(-5, 0) = 0 \end{aligned}$$

- (d) On a (TR-GDR, page 217) :

$$\begin{aligned} EAD_A &= \max(10 - 5 + 6, 0) + 17 + 1 = 29 \\ EAD_B &= \max(-11 + 6 - 3, 0) + 9 + 5 + 1 = 15 \end{aligned}$$

2. La distribution de l'exposition au défaut $e(t)$ pour la date future t est notée $\mathbf{F}_{[0,t]}$.

(a) On a (TR-GDR, pages 220-221) :

- L'exposition future potentielle (*potential future exposure*) est le quantile de la distribution $\mathbf{F}_{[0,t]}$ pour un seuil de confiance α donné :

$$\text{PFE}_\alpha(0; t) = \mathbf{F}_{[0,t]}^{-1}(\alpha)$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{[0,t]}(x) &= \Pr\{e(t) \leq x\} \\ &= \Pr\{N\sigma\sqrt{t}U \leq x\} \\ &= \Pr\left\{U \leq \frac{x}{N\sigma\sqrt{t}}\right\} \\ &= \left(\frac{x}{N\sigma\sqrt{t}}\right)^\gamma \end{aligned}$$

avec $x \in [0, N\sigma\sqrt{t}]$. On en déduit que :

$$\text{PFE}_\alpha(0; t) = N\sigma\sqrt{t}\alpha^{1/\gamma}$$

- L'exposition attendue (*expected exposure*) est la moyenne de l'exposition au défaut pour une date t donnée :

$$\text{EE}(0; t) = \mathbb{E}[e(t)] = \int x d\mathbf{F}_{[0,t]}(x)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{EE}(0; t) &= \int_0^{N\sigma\sqrt{t}} x \frac{\gamma}{(N\sigma\sqrt{t})^\gamma} x^{\gamma-1} dx \\ &= \frac{\gamma}{(N\sigma\sqrt{t})^\gamma} \left[\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right]_0^{N\sigma\sqrt{t}} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma+1} N\sigma\sqrt{t} \end{aligned}$$

- L'exposition positive attendue effective (*effective expected positive exposure*) est la moyenne pondérée dans le temps des expositions attendues :

$$\text{EEPE}(0; h) = \frac{1}{h} \int_0^h \text{EEE}(0; t) dt$$

avec :

$$\text{EEE}(0; t) = \sup_{\theta \leq t} \text{EE}(0; \theta) = \max(\text{EEE}(0; t^-), \text{EE}(0; t))$$

Comme on a :

$$\text{EEE}(0; t) = \frac{\gamma}{\gamma+1} N\sigma\sqrt{t}$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{EEPE}(0; h) &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\gamma}{\gamma+1} N\sigma\sqrt{t} dt \\ &= \frac{\gamma}{\gamma+1} N\sigma \frac{1}{h} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^h \\ &= \frac{2\gamma}{3(\gamma+1)} N\sigma\sqrt{h} \end{aligned}$$

- (b) i. L'exposition au défaut réglementaire est un multiple de l'exposition positive attendue effective (TR-GDR, pages 222-224) :

$$\begin{aligned} \text{EAD} &= \alpha \times \text{EEPE}(0; 1) \\ &= 1.4 \times \frac{4}{9} \times 3 \times 10^6 \times 0.20 \\ &= 373\,333 \text{ euros} \end{aligned}$$

- ii. On a (TR-GDR, page 207) :

$$K = \text{EAD} \times \text{E}[\text{LGD}] \times \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\text{PD}) + \sqrt{\rho(\text{PD})} \Phi^{-1}(99,9\%)}{\sqrt{1 - \rho(\text{PD})}} \right) - \text{PD} \right)$$

avec :

$$\rho(\text{PD}) = 0,12 \times \frac{1 - e^{-50 \times \text{PD}}}{1 - e^{-50}} + 0,24 \times \frac{1 - (1 - e^{-50 \times \text{PD}})}{1 - e^{-50}}$$

Dans l'énoncé, on nous demande de prendre $\rho(\text{PD}) = 20\%$. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^{-1}(\text{PD}) + \sqrt{\rho(\text{PD})} \Phi^{-1}(99,9\%)}{\sqrt{1 - \rho(\text{PD})}} &= \frac{-2,33 + \sqrt{0,20} \times 3,09}{\sqrt{1 - 0,20}} \\ &= -1,06 \end{aligned}$$

En utilisant l'approximation $-1,06 \simeq 1$ et $\Phi(-1) \simeq 0,15$, on obtient :

$$\begin{aligned} K &= 373\,333 \times 0,70 \times (0,15 - 0,01) \\ &= 36\,587 \text{ euros} \end{aligned}$$

Le capital réglementaire correspondant au risque de crédit du produit OTC est donc égal à 36 587 euros⁷.

9 Valorisation d'un CDS

1. Si on note N le notional et s le spread, la jambe fixe (ou de prime) annuelle payée par l'acheteur B de la protection est (TR-GDR, page 410) :

$$\begin{aligned} J_F &= s \times N \\ &= 0,02 \times 1\,000\,000 \\ &= 20\,000 \end{aligned}$$

Comme on considère un CDS 6M, la jambe fixe est payée tous les six mois pendant 3 ans et le montant de celle-ci est donc égale à 10 000 euros. S'il y a un défaut de paiement avant les 3 ans, l'acheteur B reçoit à la maturité la jambe de protection qui est égale à 600 000 euros :

$$\begin{aligned} J_V &= (1 - R) \times N \\ &= (1 - 0,40) \times 1\,000\,000 \\ &= 600\,000 \end{aligned}$$

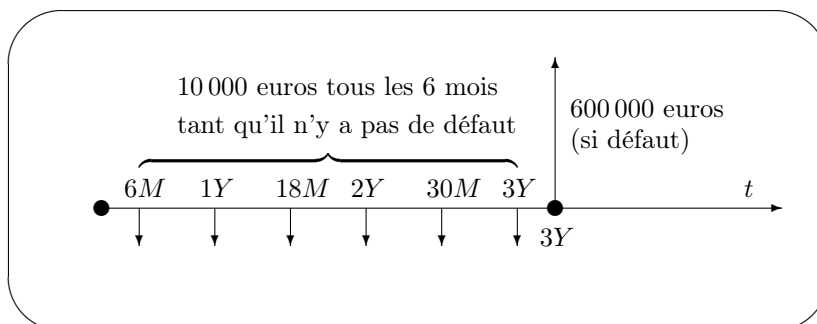
avec R le taux de recouvrement. On en déduit le diagramme des flux du graphique 2. S'il n'y a pas de défaut avant les 3 ans, l'acheteur B paye donc au vendeur A 10 000 euros pendant 6 semestres. Le PnL du vendeur A est donc égal à 60 000 euros⁸. Si la contrepartie X fait défaut dans 2 ans et 2 mois, le PnL de l'acheteur B est égal à :

$$\begin{aligned} \text{PnL}_B &= 600\,000 - 4 \times 10\,000 \\ &= 560\,000 \end{aligned}$$

7. Si on n'utilise pas les approximations de l'énoncé, on obtient $\rho(\text{PD}) = 19,28\%$ et $K = 34\,044,59$ euros.

8. On suppose que les taux d'intérêt sont nuls, il n'y a donc pas besoin d'actualiser.

FIGURE 2 – Diagramme des flux du point de vue de l'acheteur de la protection



2. Si le spread de la contrepartie X augmente sept mois plus tard et vaut 1 000 pb, alors l'acheteur B de la protection gagne de l'argent s'il retourne sa position dans le marché puisque la probabilité de défaut de X a augmenté. La nouvelle valeur de la jambe de prime semestrielle est :

$$J_F = \frac{1}{2} \times s \times N = 50\,000$$

Comme il reste encore 5 versements semestriels de la jambe de prime, le PnL de l'acheteur B est égal à (si on néglige l'effet d'actualisation) (TR-GDR, page 410) :

$$\begin{aligned} \text{PnL}_B &= 5 \times (50\,000 - 10\,000) - 10\,000 \\ &= 190\,000 \end{aligned}$$

On a la relation suivante (TR-GDR, page 411) :

$$\text{PD} \simeq \frac{s}{(1 - R)}$$

La probabilité de défaut initiale est donc :

$$\begin{aligned} \text{PD} &\simeq \frac{s}{(1 - R)} \\ &= \frac{200}{(1 - 0,40)} \\ &= 333 \text{ pb} \end{aligned}$$

La nouvelle probabilité de défaut devient :

$$\begin{aligned} \text{PD} &\simeq \frac{1\,000}{(1 - 0,40)} \\ &= 1\,667 \text{ pb} \end{aligned}$$

10 Variations autour de la notion de contribution en risque

1. (a) Dans le modèle Bâle II, l'aléa ε_i est le produit de la perte en cas de défaut LGD_i et de l'indicatrice de défaut $D_i = \mathbf{1}\{\tau_i \leq 1\}$:

$$\varepsilon_i = \text{LGD}_i \times D_i$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} \Pr\{\varepsilon_i = 0\} &= \Pr\{\text{LGD}_i \times D_i = 0\} \\ &= \Pr\{\mathbf{1}\{\tau_i \leq 1\} = 0\} \\ &= \Pr\{\tau_i > 1\} \\ &= e^{-\lambda_i} \end{aligned}$$

(c) On note \mathbf{F} la distribution de ε :

$$\mathbf{F}(e_1, \dots, e_n) = \Pr \{ \varepsilon_1 \leq e_1, \dots, \varepsilon_n \leq e_n \}$$

Lorsque la perte en cas défaut est constante, alors ε_i peut prendre deux valeurs : 0 et LGD. La fonction de répartition de ε_i est donc la suivante :

$$\mathbf{F}_i(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } e_i < 0 \\ e^{-\lambda_i} & \text{si } 0 \leq e_i < \text{LGD} \\ 1 & \text{si } e_i \geq \text{LGD} \end{cases}$$

i. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(e_1, \dots, e_n) &= \prod_{i=1}^n \Pr \{ \text{LGD} \times D_i \leq e_i \} \\ &= \prod_{i=1}^n \Pr \left\{ D_i \leq \frac{e_i}{\text{LGD}} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \Pr \left\{ D_i \leq \frac{e_i}{\text{LGD}} \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{F}_i(e_i) \end{aligned}$$

ii. On obtient :

$$\mathbf{F}(e_1, \dots, e_n) = \mathbf{C}(\mathbf{F}_1(e_1), \dots, \mathbf{F}_n(e_n); \Sigma)$$

avec \mathbf{C} la copule Normale et $\Sigma = C_n(\rho)$ la matrice de corrélation constante.

iii. On a :

$$\mathbf{F}(e_1, \dots, e_n) = \min(\mathbf{F}_1(e_1), \dots, \mathbf{F}_n(e_n))$$

2. On note \mathbf{G} la distribution de la perte aléatoire L .

(a) Comme $L = x^\top \varepsilon$ est une combinaison linéaire d'un vecteur gaussien, L est une variable aléatoire gaussienne :

$$L \sim \mathcal{N}\left(x^\top \mu, \sqrt{x^\top \Sigma x}\right)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x_1, \dots, x_n) &= \text{UL}(\alpha) \\ &= \mathbf{G}^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}[L] \\ &= x^\top \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^\top \Sigma x} - x^\top \mu \\ &= \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^\top \Sigma x} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x} = \Phi^{-1}(\alpha) \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

et :

$$\text{MR}_i = \Phi^{-1}(\alpha) \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

On sait que (TR-GDR, page 498) :

$$\frac{\partial \mathbf{G}^{-1}(\alpha)}{\partial x_i} = \mathbb{E}[\varepsilon_i \mid L = \mathbf{G}^{-1}(\alpha)]$$

On peut donc exprimer le risque marginal MR_i comme une espérance conditionnelle de ε_i :

$$\begin{aligned} MR_i &= \mathbb{E} \left[\varepsilon_i \mid L = x^\top \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^\top \Sigma x} \right] - \mathbb{E}[\varepsilon_i] \\ &= \mathbb{E} \left[\varepsilon_i - \mu_i \mid L = x^\top \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^\top \Sigma x} \right] \end{aligned}$$

Pour la contribution en risque, on obtient :

$$RC_i = \Phi^{-1}(\alpha) \frac{x_i \times (\Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

(c) Cette mesure de risque vérifie le principe d'Euler puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n RC_i &= \sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(\alpha) \frac{x_i \times (\Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\ &= \Phi^{-1}(\alpha) \frac{x^\top \Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\ &= \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^\top \Sigma x} \\ &= \mathcal{R}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

La somme des contributions en risque $\sum_{i=1}^n RC_i$ est bien égale à la mesure de risque \mathcal{R} .

(d) On a :

$$\begin{aligned} \text{var}(\varepsilon_i) &= \mathbb{E} \left[(\text{LGD}_i \times 1_{\{\tau_i \leq 1\}})^2 \right] - \mathbb{E}^2[\text{LGD}_i \times 1_{\{\tau_i \leq 1\}}] \\ &= \mathbb{E}[\text{LGD}_i^2] \mathbb{E}[D_i^2] - \mathbb{E}^2[\text{LGD}_i] \mathbb{E}[D_i] \end{aligned}$$

Comme D_i est une variable de Bernoulli de paramètre PD_i , D_i^2 est aussi une variable de Bernoulli de paramètre PD_i . On a donc :

$$\begin{aligned} \text{var}(\varepsilon_i) &= (\sigma^2(\text{LGD}_i) + \mathbb{E}^2[\text{LGD}_i]) PD_i - \mathbb{E}^2[\text{LGD}_i] PD_i^2 \\ &= \sigma^2(\text{LGD}_i) PD_i + \mathbb{E}^2[\text{LGD}_i] PD_i (1 - PD_i) \end{aligned} \quad (1)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) &= \mathbb{E}[(\text{LGD}_i D_i)(\text{LGD}_j D_j)] - \mathbb{E}[\text{LGD}_i D_i] \mathbb{E}[\text{LGD}_j D_j] \\ &= \mathbb{E}[\text{LGD}_i] \mathbb{E}[\text{LGD}_j] (\mathbb{E}[D_i D_j] - PD_i PD_j) \end{aligned}$$

avec :

$$D_i D_j = \begin{cases} 1 & \text{si } D_i = 1 \text{ et } D_j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme on a (TR-GDR, page 526) :

$$\begin{aligned} \Pr\{D_i D_j = 1\} &= \Pr\{D_i = 1 \text{ et } D_j = 1\} \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(PD_i), \Phi^{-1}(PD_j); \rho) \\ &= \mathbf{C}(PD_i, PD_j; \rho) \end{aligned}$$

avec \mathbf{C} la copule Normale de paramètre ρ , on obtient :

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mathbb{E}[\text{LGD}_i] \mathbb{E}[\text{LGD}_j] (\mathbf{C}(PD_i, PD_j; \rho) - PD_i PD_j) \quad (2)$$

On reprend la formule précédente pour la contribution en risque :

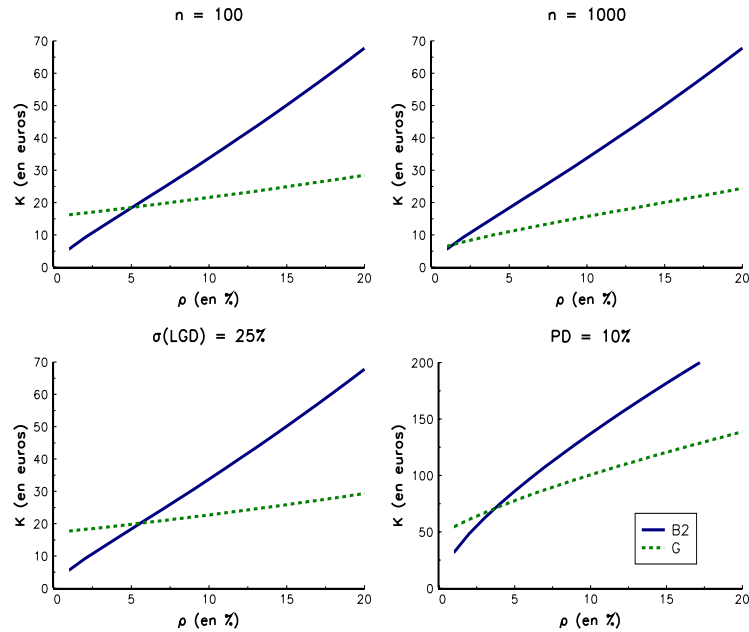
$$\begin{aligned}
\text{RC}_i &\propto x_i \times (\Sigma x)_i \\
&\propto x_i^2 (\sigma^2 (\text{LGD}_i) \text{PD}_i + \mathbb{E}^2 [\text{LGD}_i] \text{PD}_i (1 - \text{PD}_i)) + \\
&\quad \sum_{j \neq i} x_i x_j \mathbb{E} [\text{LGD}_i] \mathbb{E} [\text{LGD}_j] (\text{C} (\text{PD}_i, \text{PD}_j; \rho) - \text{PD}_i \text{PD}_j) \\
&\propto x_i^2 \sigma^2 (\text{LGD}_i) \text{PD}_i + x_i^2 \mathbb{E}^2 [\text{LGD}_i] (\text{PD}_i - \text{C} (\text{PD}_i, \text{PD}_i; \rho)) + \\
&\quad \sum_{j=1}^n x_i x_j \mathbb{E} [\text{LGD}_i] \mathbb{E} [\text{LGD}_j] (\text{C} (\text{PD}_i, \text{PD}_j; \rho) - \text{PD}_i \text{PD}_j)
\end{aligned}$$

On remarque que l'expression RC_i est très différente de celle obtenue avec le modèle Bâle II. Par exemple, la volatilité de la perte en cas de défaut affecte la contribution en risque⁹ et la contribution en risque de la créance i dépend des caractéristiques des autres créances. À titre d'illustration, on a représenté sur le graphique 3 l'exigence de fonds propres calculée avec les deux formules¹⁰ (celle de Bâle 2 et celle issue de l'approximation gaussienne) :

$$\begin{aligned}
K_i^{(\text{B2})} &= \text{EAD}_i \times \mathbb{E} [\text{LGD}_i] \times \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1} (\text{PD}_i) + \sqrt{\rho} \Phi^{-1} (99,9\%)}{\sqrt{1-\rho}} \right) - \text{PD}_i \right) \\
K_i^{(\text{G})} &= \Phi^{-1} (\alpha) \frac{x_i \times (\Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}
\end{aligned}$$

avec $x_i = \text{EAD}_i$ et Σ la matrice de covariance construite à partir des termes (1) et (2) de variance et de covariance. On remarque que l'approximation gaussienne sous-estime généralement l'exigence de fonds propres, en particulier lorsque la corrélation est supérieure à 5%.

FIGURE 3 – Comparaison de l'exigence de capital (Bâle 2 et approximation gaussienne)



9. Ceci s'explique par le fait que l'on n'a pas utilisé la propriété de granularité du portefeuille de créances.

10. Les paramètres utilisés sont $\text{EAD} = 1000$, $\mathbb{E} [\text{LGD}] = 50\%$, $\sigma^2 (\text{LGD}) = 10\%$, $\text{PD} = 1\%$ et $n = 100$.

11 Maximum de vraisemblance d'un modèle de perte en cas de défaut

1. On a (TR-GDR, page 447) :

$$\text{LGD} = 1 - R + g$$

avec g la perte due à la gestion du recouvrement. Elle correspond donc à toutes les dépenses engagées (frais d'avocat, etc.) pour recouvrer la créance. Supposons par exemple une créance de 100 euros. On recouvre 70 euros, mais ce recouvrement a coûté 10 euros. On a alors $R = 70\%$ mais $\text{LGD} = 60\%$.

2. Le montant de crédit est égal à :

$$\begin{aligned} N &= 250\,000 \times 50\,000 \\ &= 12,500 \text{ milliards d'euros} \end{aligned}$$

La perte après recouvrement est égale à :

$$\begin{aligned} L &= N \times (1 - R) \times \text{PD} \\ &= 43,75 \text{ millions d'euros} \end{aligned}$$

Comme le coût total annuel du service contentieux C est égal à 12,5 millions d'euros, on en déduit que :

$$\text{LGD} = \frac{43,75 + 12,5}{125} = 45\%$$

Ce chiffre est supérieur au 35% obtenu si on ne tenait pas compte du coût du service contentieux.

3. (a) Comme $x \in [0, 1]$, le paramètre γ doit être positif ou nul puisque $\mathbf{F}(0) = 0$, $\mathbf{F}(1) = 1$ et $f(x) = \gamma x^{\gamma-1} \geq 0$.
- (b) On dispose d'un échantillon historique $\{x_1, \dots, x_n\}$ de pertes en cas de défaut annuelles et moyennes pour une classe de risque \mathcal{C} .
- i. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{LGD}] &= \int_0^1 x \gamma x^{\gamma-1} dx \\ &= \gamma \int_0^1 x^\gamma dx \\ &= \gamma \left[\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{\gamma}{\gamma+1} \end{aligned}$$

Soit \bar{x} la moyenne empirique de l'échantillon $\{x_1, \dots, x_n\}$. L'estimateur $\hat{\gamma}_{\text{MM}}$ vérifie :

$$\frac{\hat{\gamma}_{\text{MM}}}{\hat{\gamma}_{\text{MM}} + 1} = \bar{x}$$

On en déduit que :

$$\hat{\gamma}_{\text{MM}} = \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}}$$

- ii. La fonction de log-vraisemblance a pour expression :

$$\begin{aligned} \ell &= \sum_{i=1}^n \ln f(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \ln (\gamma x_i^{\gamma-1}) \\ &= n \ln \gamma + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i \end{aligned}$$

La condition de premier ordre du maximum de vraisemblance est :

$$\frac{\partial \ell}{\partial \gamma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

L'expression de l'estimateur du maximum de vraisemblance est donc :

$$\hat{\gamma}_{\text{ML}} = -\frac{1}{(n^{-1} \sum_{i=1}^n \ln x_i)}$$

iii. Si $x_i = 50\%$, on obtient :

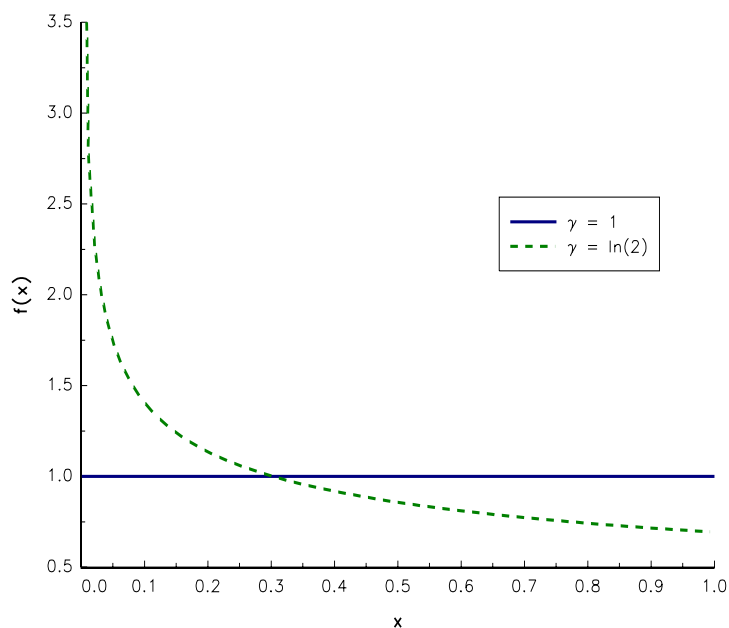
$$\hat{\gamma}_{\text{MM}} = 0,5 / (1 - 0,5) = 1,00$$

et :

$$\hat{\gamma}_{\text{ML}} = -\frac{1}{\ln 0,5} = \ln 2 = 1,44$$

Les résultats numériques des deux estimations sont très différents. À titre d'illustration, on a représenté sur le graphique 4 les fonctions de densité correspondantes.

FIGURE 4 – Comparaison des fonctions de densité



(c) i. On a :

$$\frac{\partial \mathbf{C}(u_1, u_2)}{\partial u_1} = u_2 e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2} - \theta u_2 \ln u_2 e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{C}(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} &= e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2} - \theta \ln u_1 e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2} - \theta \ln u_2 e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2} - \\ &\quad \theta e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2} + \theta^2 \ln u_1 \ln u_2 e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2} \\ &= (1 - \theta - \theta \ln(u_1 u_2) + \theta^2 \ln u_1 \ln u_2) e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2} \end{aligned}$$

ii. La densité bivariée est :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c(\mathbf{F}(x), \mathbf{F}(y)) f(x) f(y) \\ &= \gamma_1 \gamma_2 x^{\gamma_1-1} y^{\gamma_2-1} (1 - \theta - \theta(\gamma_1 \ln x + \gamma_2 \ln y) + \theta^2 \gamma_1 \gamma_2 \ln x \ln y) e^{-\theta \gamma_1 \gamma_2 \ln x \ln y} \end{aligned}$$

avec γ_1 et γ_2 les paramètres des classes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

iii. La log-vraisemblance est :

$$\begin{aligned} \ell &= n \ln \gamma_1 + n \ln \gamma_2 + (\gamma_1 - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i + (\gamma_2 - 1) \sum_{i=1}^n \ln y_i + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \ln (1 - \theta - \theta(\gamma_1 \ln x_i + \gamma_2 \ln y_i) + \theta^2 \gamma_1 \gamma_2 \ln x_i \ln y_i) - \\ &\quad \theta \gamma_1 \gamma_2 \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln y_i \end{aligned}$$

iv. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \gamma_1} &= \frac{n}{\gamma_1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i + g_1(\gamma_1, \gamma_2, \theta) \\ \frac{\partial \ell}{\partial \gamma_2} &= \frac{n}{\gamma_2} + \sum_{i=1}^n \ln y_i + g_2(\gamma_1, \gamma_2, \theta) \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta} &= - \sum_{i=1}^n \frac{1 + (\gamma_1 \ln x_i + \gamma_2 \ln y_i) - 2\theta \gamma_1 \gamma_2 \ln x_i \ln y_i}{1 - \theta - \theta(\gamma_1 \ln x_i + \gamma_2 \ln y_i) + \theta^2 \gamma_1 \gamma_2 \ln x_i \ln y_i} - \\ &\quad \gamma_1 \gamma_2 \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln y_i \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} g_1(\gamma_1, \gamma_2, \theta) &= \sum_{i=1}^n \frac{(\theta^2 \gamma_2 \ln y_i - \theta) \ln x_i}{1 - \theta - \theta(\gamma_1 \ln x_i + \gamma_2 \ln y_i) + \theta^2 \gamma_1 \gamma_2 \ln x_i \ln y_i} - \theta \gamma_2 \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln y_i \\ g_2(\gamma_1, \gamma_2, \theta) &= \sum_{i=1}^n \frac{(\theta^2 \gamma_1 \ln x_i - \theta) \ln y_i}{1 - \theta - \theta(\gamma_1 \ln x_i + \gamma_2 \ln y_i) + \theta^2 \gamma_1 \gamma_2 \ln x_i \ln y_i} - \theta \gamma_1 \sum_{i=1}^n \ln x_i \ln y_i \end{aligned}$$

Si $\hat{\theta} = 0$, alors $g_1(\gamma_1, \gamma_2, 0) = g_2(\gamma_1, \gamma_2, 0) = 0$. Dans ce cas, les estimateurs $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_2$ coïncident avec l'estimateur précédent. Si $\hat{\theta} \neq 0$, alors $g_1(\gamma_1, \gamma_2, \theta) \neq 0$ et l'estimateur multi-dimensionnel ne coïncide pas avec l'estimateur uni-dimensionnel. Ceci s'explique par le fait que l'on dispose de plus d'information avec un échantillon bivarié. Le maximum de vraisemblance va donc corriger l'estimateur $\hat{\gamma}_{\text{ML}}$ en tenant compte de la dépendance entre LGD_1 et LGD_2 . Par exemple, si on estime que la dépendance est \mathbf{C}^+ , il est normal que les estimateurs multi-dimensionnels $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_2$ soient égaux même si les estimateurs uni-dimensionnels ne le sont pas forcément.