

haute valeur ajoutée. En gestion des risques, cela signifie très concrètement de développer des outils statistiques d'aide à la décision (score, système expert) ou des indicateurs de risque synthétiques, accroissant encore la sophistication.

La sophistication de la gestion des risques génère elle-même des risques

Cette sophistication a donc une justification et une légitimité claires mais elle pose un certain nombre de problèmes qu'il ne faut pas sous-estimer.

En premier lieu, la complexité est évidemment plus difficile à maîtriser. L'utilisation des méthodes de quantification du risque génère des nouveaux risques : risque opérationnel de mauvaise implémentation d'un outil ou d'un indicateur de risque, de mauvaise compréhension, de calibration défectueuse, etc. On peut penser par exemple à la méfiance qu'on peut avoir vis-à-vis d'un mark-to-model quand on sait que certains paramètres du modèle sont connus avec une précision très relative (paramètre de corrélation par exemple dans un pricer de produits multi sous-jacents ou dans un pricer de dérivés de crédit).

Un risque apparaît également lorsque l'existence d'un outil de risque sophistiqué induit une confiance excessive et conduit les risk managers à abdiquer leur esprit critique ou les enseignements de leur expérience. Il est désormais acquis qu'un outil comme la Value-at-Risk est certes indispensable pour suivre les risques de marché mais ne suffit pas pour se sentir « confortable ». En outre, on oublie parfois la réalité économique dans laquelle ces outils sont utilisés. Si on prend l'exemple du suivi des dérivés sur inflation, il est symptomatique que les ingénieurs en charge de construire des modèles de pricing soient d'abord des mathématiciens avant d'être des économistes et pour qui l'inflation est d'abord un « processus stochastique » avant d'être une variable macro-économique.

La sophistication de la réglementation pourrait paradoxalement générer aussi des risques pour la stabilité des systèmes financiers. En effet, toute réglementation suscite des comportements de contournement de la part des acteurs qui y sont soumis, notamment quand cette réglementation est très « prescriptive » comme celle que le Comité de Bâle est en train de mettre en place sur le risque de crédit. On constate parallèlement une propagation des dérivés de crédit vers des sphères moins réglementées et moins compétentes telles que les hedge funds et les gestionnaires d'actifs, voire les directions financières des grands corporates. Entre Warren Buffet qui assimile les dérivés de crédit à une « arme de destruction massive » et Alan Greenspan qui met au crédit de ces mêmes produits la résistance (i.e. la « résilience ») des systèmes financiers ces dernières années, il y a une opposition totale que seule l'expérience future permettra de départager.

Crise de la gestion du risque ou crise de la mesure du risque ?

Le *risk management* a fait l'objet d'une attaque sans précédent lors de la crise 2007-2008 des crédits immobiliers à risque aux Etats-Unis (ou crise des subprimes). La mise en place de Bâle II n'a pas permis d'éviter la catastrophe. Certains auteurs ont même eu des propos très durs envers cette réforme en considérant celle-ci comme inefficace. D'autres auteurs en ont profité pour critiquer les modèles VaR. On peut donc penser que la crise des subprimes est une crise de la mesure de risque (*risk measurement*). Ceci est partiellement vrai, on a sûrement manqué de prudence pour estimer certains paramètres, les hypothèses de probabilité de défaut étaient certainement sous-estimées et la référence à une VaR avec un intervalle de confiance de 99% et une période de détention de 10 jours était inadaptée pour de nombreux produits structurés de crédit. Rappelons toutefois qu'un modèle de risque est par nature une simplification de la réalité. Comme le disait George Box, « tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles ». Cela ne veut pas dire qu'il faut abandonner les modèles VaR et tous les outils de mesure de risque qui ont été développés ces dix dernières années. Il faut certainement les adapter et les compléter. Mais il serait simpliste et naïf de penser que la cause de la crise des subprimes réside uniquement dans la mauvaise évaluation des risques.

En fait, la crise des subprimes est avant tout une crise de la gestion des risques prise dans sa globalité. Avant de pouvoir les mesurer, il convient dans un premier temps de les identifier. Force est de constater que la plupart des établissements financiers n'ont pas perçu le risque qu'ils prenaient en investissant massivement sur des produits structurés adossés aux crédits immobiliers. La bulle spéculative du marché immobilier américain aurait dû se traduire par des programmes de scénarios de crise rigoureux. Et c'est certainement à ce niveau que l'on observe la plus grosse faiblesse dans l'art de gérer les risques. Bien que ces scénarios de crise (stress-testing) soient exigés par les autorités de régulation, ils ne donnent pas encore lieu à une exigence en fonds propres. Ces scénarios de crise sont encore très peu développés dans les établissements financiers et souvent mal faits. Et en général, ils sont très peu intégrés à la gestion quotidienne des portefeuilles, contrairement aux mesures VaR. D'autre part, les mesures de stress-testing font l'objet de peu de considération de la part des dirigeants. Si le risque des subprimes avait pu être mesuré par la VaR, il aurait été beaucoup mieux géré. Malheureusement, on ne pouvait appréhender le risque de la bulle spéculative immobilière que par le biais du stress-testing.

Qu'y a-t-il de nouveau dans cette crise ?

La crise des subprimes a révélé un fait important ; aujourd'hui, on ne peut pas se permettre qu'une grande banque occidentale fasse faillite. En

Ce risque de contrepartie sur opérations de marché est bien un risque de crédit même si la perte correspond au prix de marché du produit dérivé.

Certains risques sont à la frontière entre les risques de crédit et de marché et le risque opérationnel. C'est par exemple le cas du risque de modèle dans le cadre de la valorisation de produits exotiques, qui est considéré comme un risque de marché ou un risque opérationnel selon les institutions financières.

La mesure de risque

Sachant la valeur d'un portefeuille à un instant donné, le risque est une variation négative de ce portefeuille dans le futur. Le risque ne se caractérise donc pas par une perte absolue, mais par une perte relative. En effet, lorsque la banque fait une opération à une date donnée, elle est capable de calculer la valeur de marché de cette opération et donc la marge commerciale qu'elle réalise. Le risque est donc que cette marge commerciale (potentielle) se dégrade dans le temps. L'objectif est bien d'immuniser la marge commerciale, et donc de réduire la variabilité de la valeur de marché de l'opération.

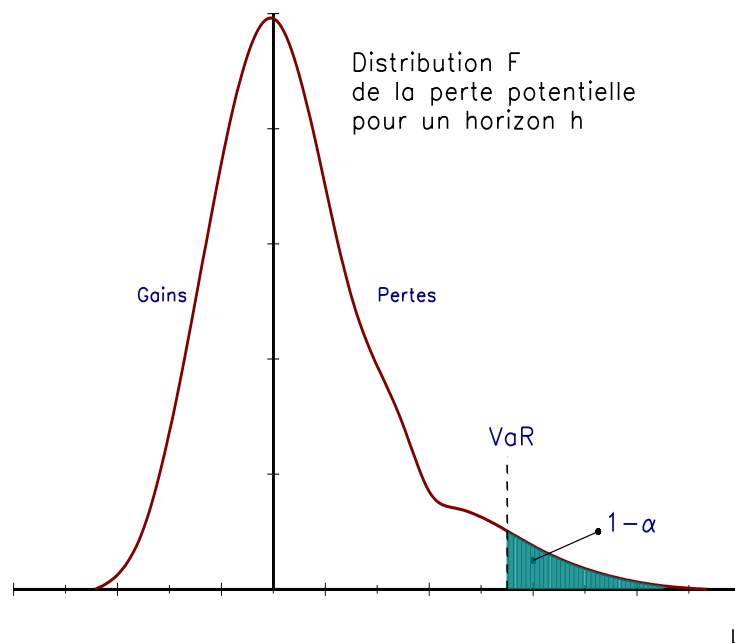
Pendant très longtemps, la mesure naturelle du risque était la volatilité (mesure statistique de l'écart-type). Par exemple, dans le modèle de sélection de portefeuille de Markowitz, l'agent maximise son espérance de gain pour un niveau donné de volatilité. Cette vision de la mesure statistique du risque a beaucoup évolué depuis le début des années quatre-vingt-dix. La mesure actuellement la plus répandue est la valeur en risque. D'un point de vue statistique, la VaR n'est rien d'autre que le quantile de la perte potentielle pour un horizon h donné et un seuil de confiance α donné. Dans un monde gaussien, la volatilité et la mesure quantile sont parfaitement cohérentes, puisque nous pouvons exprimer l'une en fonction de l'autre. Dans un monde non gaussien, cette relation n'est plus vérifiée et il n'y a plus de cohérence entre ces deux mesures de risque.

Notons L la variable aléatoire représentant la perte potentielle du portefeuille. Soit \mathbf{F} la distribution de probabilité de L . Nous avons :

$$\text{VaR} = \mathbf{F}^{-1}(\alpha)$$

Deux éléments sont donc déterminants pour calculer la valeur en risque : la distribution de probabilité \mathbf{F} et le seuil de confiance α . Nous pouvons assimiler le seuil de confiance à un indicateur de tolérance pour le risque. Une couverture à 99% est beaucoup plus exigeante et donc beaucoup plus coûteuse qu'une couverture à 90%. Caractériser la distribution de probabilité exige aussi de définir l'horizon h . Une couverture à un jour n'est pas la même qu'une couverture à 10 jours ou une couverture à 1 an. C'est la combinaison de ces termes (seuil de confiance \times horizon) qui mesure le degré de la couverture. Souvent, le degré de couverture est exprimé en temps de retour, une notion beaucoup plus pertinente pour un *risk mana-*

Graphique 1. Représentation graphique de la valeur en risque



ger. Le temps de retour \check{t} est la durée moyenne entre deux dépassements de la valeur en risque. Nous verrons qu'il est égal à $h / (1 - \alpha)$. Posons par exemple h égal à 1 jour. Nous obtenons les temps de retour suivants :

Rating implicite	Réglementaire (marché)	BBB	A	AA	AAA
α	99%	99,75%	99,9%	99,95%	99,97%
\check{t}	100 jours	400 jours	4 ans	8 ans	13 ans

Le seuil de confiance peut être une donnée externe, lorsque celui-ci est défini par la réglementation. Il peut être aussi une donnée interne, lorsque celui-ci est défini par l'établissement financier. Dans ce cas, il mesure la tolérance de la banque vis-à-vis du risque qu'elle prend, et on peut l'interpréter comme l'objectif de rating de la banque. L'idée sous-jacente est que les actionnaires d'une banque notée AAA auront une exigence de couverture plus élevée que ceux d'une banque notée BBB.

Remarque 2. Deux temps de retour égaux ne représentent pas forcément la même gravité en terme de risque. Il faut aussi tenir compte de la liquidité et des conséquences. Par exemple, pour des risques qui mettent en péril la survie de la banque, on exigera des temps de retour extrêmement élevés.

Remarque 3. Lorsque l'on entend parler de gestion du risque décennal, cela revient à considérer une valeur en risque journalière pour un seuil de confiance $\alpha = 99,96\%$.

Il existe d'autres mesures de risque \mathcal{R} que la VaR. Avant l'introduction de celle-ci, la mesure de risque universelle était la volatilité définie par :

$$\mathcal{R} = \sigma(L) = \sqrt{\int (x - \mathbb{E}[L])^2 d\mathbf{F}(x)}$$

Une autre mesure très utilisée est la perte exceptionnelle (*unexpected loss* ou UL) :

$$\mathcal{R} = \text{VaR}(\alpha) - \mathbb{E}[L] = \mathbf{F}^{-1}(\alpha) - \mathbb{E}[L]$$

C'est la différence entre la valeur en risque et la perte moyenne (*expected loss* ou EL). L'idée sous-jacente est la suivante. La charge en capital (*capital charge*) est le montant de capital (ou de fonds propres) immobilisé pour assurer une opération risquée. Cette charge en capital affecte directement le bilan de la banque. Lorsque les marges commerciales intègrent la perte moyenne ou lorsque les provisions couvrent la perte moyenne (comme par exemple dans le cas des provisions statistiques), cette dernière est déjà comptabilisée dans le compte de résultat. Il n'est donc pas nécessaire qu'elle affecte aussi le bilan. On définit le regret espéré par :

$$\mathcal{R} = \mathbb{E}[L \mid L \geq H]$$

avec H un seuil donné, qui représente le montant de la perte tolérable. Cette mesure de risque est donc la moyenne des pertes non supportables par la banque. Lorsque le seuil H est endogène et égal à la valeur en risque, on obtient la VaR conditionnelle CVAR (ou *expected shortfall*) :

$$\mathcal{R} = \mathbb{E}[L \mid L \geq F^{-1}(\alpha)]$$

C'est donc l'espérance de la perte au-delà de la VaR. Cette mesure de risque est un cas particulier des mesures LPM (lower partial moment) définies par :

$$\mathcal{R} = \mathbb{E}[\max(0, L - H)^m]$$

Pour $m = 1$, on obtient la mesure de regret espéré. Remarquons aussi que si H est égal à zéro et $m = 2$, \mathcal{R} est la semi-variance, c'est-à-dire la variance des pertes (sans prendre en compte les gains).

Artzner *et al.* (1999) définissent une mesure de risque cohérente \mathcal{R} si elle satisfait les 4 propriétés suivantes :

1. sous-additivité : $\mathcal{R}(L_1 + L_2) \leq \mathcal{R}(L_1) + \mathcal{R}(L_2)$;
2. homogénéité : $\mathcal{R}(\lambda L) = \lambda \mathcal{R}(L)$ si $\lambda \geq 0$;
3. monotonie : si $F_1(x) \leq F_2(x)$, alors $\mathcal{R}(L_1) \geq \mathcal{R}(L_2)$;
4. invariance par translation : $\mathcal{R}(L + m) = \mathcal{R}(L) - m$.

La première propriété implique que la mesure de risque de la somme de deux portefeuilles est plus petite que la somme des mesures de risques des deux portefeuilles. Ce phénomène est appelé effet de diversification. En agrégeant deux portefeuilles, il n'y a donc pas de création supplémentaire de risque. La deuxième propriété indique que si on multiplie l'exposition du portefeuille par λ , alors la mesure de risque est aussi multipliée par λ . Cette propriété ignore les problèmes de liquidité. La troisième propriété traduit l'ordre stochastique des distributions de pertes : si la perte aléatoire du portefeuille 1 domine la perte aléatoire du portefeuille 2, alors la mesure de risque du portefeuille 1 est plus grande que celle du portefeuille 2. Enfin, la dernière propriété indique tout simplement que l'addition au portefeuille initial d'un montant sûr m rémunéré au taux sans risque diminue la mesure de risque de m . En particulier, nous avons $\mathcal{R}(L + \mathcal{R}(L)) = 0$. Pour couvrir le risque d'un portefeuille, il faut immobiliser des fonds propres égaux à la mesure de risque.

On peut montrer que la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne respecte pas la propriété de sous-additivité. Pour cela, considérons une créance de 100 euros qui présente une probabilité annuelle de défaut de 0,8% et un taux de recouvrement nul. La VaR annuelle à 99% est donc égale à 0, puisque nous avons :

$$\begin{aligned}\Pr\{L \leq 0\} &= 99,2\% \\ \Pr\{L \leq 100\} &= 100\%\end{aligned}$$

Considérons maintenant un portefeuille de deux créances :

	$L_1 = 0$	$L_1 = 100$	
$L_2 = 0$	98,5%	0,7%	99,2%
$L_2 = 100$	0,7%	0,1%	0,8%
	99,2%	0,8%	100,0%

La distribution de probabilité de $L_1 + L_2$ est donc :

$$\begin{aligned}\Pr\{L_1 + L_2 \leq 0\} &= 98,5\% \\ \Pr\{L_1 + L_2 \leq 100\} &= 99,9\% \\ \Pr\{L_1 + L_2 \leq 200\} &= 100\%\end{aligned}$$

La VaR annuelle du portefeuille à 99% est donc égale à 100 euros. Nous avons donc $\mathcal{R}(L_1 + L_2) = 100 > \mathcal{R}(L_1) + \mathcal{R}(L_2) = 0$.

La VaR a été très critiquée en tant que mesure de risque du fait qu'elle ne satisfait pas cette propriété de sous-additivité. Et nombreux sont les professionnels et académiques qui ont proposé d'utiliser la mesure expected shortfall à la place de la VaR. En fait, c'est un faux débat. Tout d'abord, la VaR ne respecte pas la propriété de sous-additivité uniquement dans certains cas, par exemple lorsque les fonctions de distribution des facteurs de risque ne sont pas continues et lorsque les probabilités sont principalement localisées dans les quantiles extrêmes. Ensuite, les banques

n'ont pas les compétences encore suffisantes pour employer une mesure de risque plus complexe que la VaR. Aujourd'hui, il est plus important de faire la promotion du stress testing que celle de l'expected shortfall.

L'optimisation du couple rentabilité/risque

Il est difficile de finir ce paragraphe consacré au risque sans évoquer la rentabilité. Le but d'une banque n'est pas de prendre le moins de risque possible, mais d'atteindre une rentabilité maximale pour un risque donné. La théorie financière nous enseigne que seul le risque est rémunéré. La banque doit donc procéder à un arbitrage entre risque et rentabilité. La mesure de risque permet de calculer les fonds propres nécessaires pour assurer chaque opération financière. Elle permet donc de dimensionner les risques encourus par rapport au capital de la banque. Elle est par conséquent indispensable pour calculer des mesures de performance. Au niveau global, la mesure de performance la plus utilisée est le rendement des fonds propres (*Return on Equity* ou ROE). À des niveaux beaucoup plus fins (jusqu'au niveau transactionnel), les banques utilisent des mesures de performance ajustée du risque (*risk-adjusted performance measure* ou RAPM), comme le rapport du rendement espéré sur le capital en risque. Il est donc important de considérer la mesure des risques non pas uniquement comme un outil réglementaire, mais aussi comme un outil stratégique de décision pour la banque (Augros et Quérue, 2000) :

« [...] la gestion d'une banque consiste en une **gestion globale et coordonnée**, sous contraintes internes et externes, **de la rentabilité et des risques** liés aux activités de l'établissement ».

Il convient d'intégrer le coût des fonds propres immobilisés dans les choix d'investissement. Considérons le ratio de Sharpe. Prenons une institution financière qui désire investir 100 MEUR dans un OPCVM. Elle a le choix entre deux fonds A et B dont les caractéristiques sont les suivantes⁹ :

Fonds	μ	σ	s
A	10%	20%	0,25
B	7%	4%	0,50

Cet établissement financier peut préférer investir dans le fonds B, puisqu'il présente un ratio de Sharpe supérieur à celui du fonds A. Comment est modifié ce raisonnement si on tient compte du coût des fonds propres ?

On suppose que :

- le fonds A est très liquide et nécessite une exigence en fonds propres de 5%, c'est-à-dire 5 MEUR ;

⁹ μ est l'espérance de rendement annuel, σ est la volatilité annuelle, s est le ratio de Sharpe calculé en supposant un taux sans risque égal à 5%.

variations potentielles de la valeur du portefeuille dans le futur proche. Cela suppose implicitement que le futur se comporte comme le passé : nous supposons donc que la variation de la valeur du portefeuille est **stationnaire**. Nous comprenons pourquoi l'approche valeur en risque n'est pertinente que dans des **conditions normales de marché**. De part sa construction même, la VaR n'a pas vocation à prendre en compte des risques extrêmes ou des situations qui n'ont pas existé dans le passé. Cela relève d'autres méthodes basées sur le stress-testing présentées dans la prochaine section. Mais tout d'abord, nous détaillons les trois approches dans les paragraphes qui suivent.

2.1.1. La VaR analytique

Le cas général

Dans cette approche, nous supposons que $\text{PnL} \sim \mathcal{N}(\mu_{\text{PnL}}, \sigma_{\text{PnL}})$. Nous avons $\Pr\{\text{PnL} \leq -\text{VaR}\} = 1 - \alpha$ ou encore :

$$\begin{aligned} \Pr\left\{\frac{\text{PnL} - \mu_{\text{PnL}}}{\sigma_{\text{PnL}}} \leq \frac{-\text{VaR} - \mu_{\text{PnL}}}{\sigma_{\text{PnL}}}\right\} &= 1 - \alpha \\ \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{-\text{VaR} - \mu_{\text{PnL}}}{\sigma_{\text{PnL}}}\right) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{\text{VaR} + \mu_{\text{PnL}}}{\sigma_{\text{PnL}}} &= -\Phi^{-1}(1 - \alpha) \\ \text{VaR} &= -\mu_{\text{PnL}} + \Phi^{-1}(\alpha) \times \sigma_{\text{PnL}} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 99\%$, cette formule devient :

$$\text{VaR}(99\%) = -\mu_{\text{PnL}} + 2,33 \times \sigma_{\text{PnL}}$$

et pour $\alpha = 95\%$, nous avons :

$$\text{VaR}(95\%) = -\mu_{\text{PnL}} + 1,65 \times \sigma_{\text{PnL}}$$

La VaR est donc une fonction décroissante de l'espérance de PnL et une fonction croissante de la volatilité du PnL. En pratique, nous préférons utiliser la formule suivante $\text{VaR} = \Phi^{-1}(\alpha) \times \sigma_{\text{PnL}}$ (en posant $\mu_{\text{PnL}} = 0$) car il est très difficile de prévoir l'espérance du PnL futur.

Considérons une position longue de 1 million d'euros sur le marché des actions. Nous supposons que la volatilité annuelle est égale à 35%. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1Y}(99\%) &= 2,33 \times 0,35 \times 1\,000\,000 \\ &= 815\,500 \text{ euros} \end{aligned}$$

Cela veut dire qu'il y a une probabilité de 1% de perdre plus de 815 500 euros sur cette pose actions si nous la détenons pendant un an. Si nous voulons utiliser une période de détention différente, nous utilisons la règle de la racine carrée pour convertir la volatilité pour une fréquence donnée f_1 en une volatilité pour une autre fréquence f_2 : $\sigma_{f_2} = \sqrt{f_2/f_1} \sigma_{f_1}$. Nous obtenons ainsi pour les VaRs 1 mois et 1 jour les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{1M}(99\%) &= \frac{815\,500}{\sqrt{12}} = 235\,414 \text{ euros} \\ \text{VaR}_{1J}(99\%) &= \frac{815\,500}{\sqrt{260}} = 50\,575 \text{ euros} \end{aligned}$$

Nous avons donc une probabilité de 1% de perdre plus de 50 575 euros sur une journée.

Les modèles factoriels de risque

Nous supposons que la valeur du portefeuille dépend de m facteurs de risque F_1, \dots, F_m . Nous avons :

$$P(t+h; \theta) = g(F_1(t+h), \dots, F_m(t+h); \theta)$$

g est appelée la fonction de valorisation (*pricing function* en anglais). Nous notons \mathbf{H}_t la distribution multidimensionnelle du vecteur des facteurs $F_1(t), \dots, F_m(t)$. L'expression du PnL est donc :

$$\text{PnL} = g(F_1(t+h), \dots, F_m(t+h); \theta) - P(t; \theta)$$

Supposons que le portefeuille θ soit **linéaire** par rapport aux facteurs de risque :

$$\text{PnL} = P(t+h; \theta) - P(t; \theta) = -P(t; \theta) + \sum_{i=1}^m \beta_i F_i(t+h)$$

Si le vecteur des facteurs de risque est **gaussien** $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ et stationnaire, nous en déduisons que le PnL est une variable aléatoire gaussienne :

$$\text{PnL} \sim \mathcal{N}\left(\beta^\top \mu - P(t; \theta), \beta^\top \Sigma \beta\right)$$

L'expression de la valeur en risque est donc :

$$\text{VaR}(\alpha) = -\left(\beta^\top \mu - P(t; \theta)\right) + \Phi^{-1}(\alpha) \times \sqrt{\beta^\top \Sigma \beta}$$

En général, nous ne connaissons pas β , μ et Σ . Dans la pratique, nous estimons les différents paramètres μ et Σ à partir d'un historique des facteurs et β est le vecteur des sensibilités du portefeuille θ aux facteurs de risque.

Remarque 10. Avant de développer dans le paragraphe suivant des éléments de réflexion sur la pertinence de cette méthode et sur le périmètre de validité, nous pouvons noter tout de suite que cette méthode repose sur trois hypothèses : l'indépendance temporelle des variations de la valeur du portefeuille, la normalité des facteurs et la relation linéaire entre les facteurs et la valeur du portefeuille. Ces trois hypothèses simplifient le calcul de la VaR puisque les quantiles d'une combinaison linéaire de facteurs gaussiens sont liés de façon linéaire aux quantiles de la loi normale à une dimension. La seule difficulté de cette méthode est l'estimation de la matrice de variance-covariance.

L'exemple d'un portefeuille d'actions

Nous considérons un portefeuille $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ constitué de n actions. Nous notons $P_i(t)$ le prix l'actif i à la date t . $R_i(t; h)$ est le rendement de cet actif entre les dates t et $t + h$. La valeur du portefeuille à la date t est donc :

$$P(t; \theta) = \sum_{i=1}^n \theta_i P_i(t)$$

Nous supposons que les facteurs de risque sont les rendements des actifs. À la date t , la valeur du portefeuille $P(t + h)$ est aléatoire et nous avons :

$$\begin{aligned} P(t + h; \theta) &= \sum_{i=1}^n \theta_i P_i(t + h) \\ &= \sum_{i=1}^n \theta_i P_i(t) (1 + R_i(t; h)) \\ &= \sum_{i=1}^n W_i(t) (1 + R_i(t; h)) \end{aligned}$$

avec $W_i(t) = \theta_i P_i(t)$ la richesse investie dans l'actif i . Le PnL entre les dates t et $t + h$ est donc :

$$\text{PnL} = P(t + h; \theta) - P(t; \theta) = \sum_{i=1}^n W_i(t) R_i(t; h) = W^\top \mathbf{R}(t; h)$$

où $\mathbf{R}(t; h)$ est le vecteur aléatoire des rendements et W est le vecteur des richesses. Si les facteurs de risque sont gaussiens $\mathbf{R}(t; h) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, nous en déduisons que $\text{PnL} \sim \mathcal{N}(W^\top \mu, \sqrt{W^\top \Sigma W})$. La valeur en risque au seuil de confiance α est donc :

$$\text{VaR}(\alpha) = -W^\top \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \times \sqrt{W^\top \Sigma W}$$

Une autre expression de la valeur en risque est :

$$\text{VaR}(\alpha) = P(t; \theta) \left(-w^\top \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \times \sqrt{w^\top \Sigma w} \right)$$

avec w le vecteur des poids $w_i = W_i(t) / P(t; \theta)$.

Exemple 1. *Considérons un portefeuille linéaire composé de trois actifs A, B et C dont les rendements journaliers sont en moyenne égaux à 50 pb, 30 pb et 20 pb et les volatilités journalières sont égales à 2%, 3% et 1%. La matrice de corrélation entre les rendements des trois actifs est choisie égale à :*

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0,5 & 1 & & \\ 0,25 & 0,6 & 1 & \\ & & & \end{bmatrix}$$

La composition du portefeuille est deux titres A (position longue), un titre B (position courte) et un titre C (position longue). Les prix actuels des titres sont respectivement de 244 euros, 135 euros et 315 euros. Nous avons :

$$\begin{aligned} \text{VaR}(99\%) &= 2,3263 \times \sqrt{82,1176} - 2,665 \\ &= 18,42 \end{aligned}$$

La valeur en risque journalière de ce portefeuille est donc égale à 18,42 euros pour un seuil de confiance de 99%.

L'exemple d'un portefeuille obligataire sans risque de crédit

Considérons dans un premier temps un portefeuille θ composé d'obligations souveraines exposées à la même structure par terme. On peut décrire ce portefeuille par un ensemble de n coupons C_i de maturité T_i . Notons $B(t, T)$ le prix à la date t du zéro coupon de maturité T . Nous avons $B(t, T) = \exp(-(T-t) \times R(t, T))$ avec $R(t, T)$ le taux zéro coupon. La valeur du portefeuille à la date t est égale à

$$P(t; \theta) = \sum_{i=1}^n C_i \times B(t, T_i)$$

Nous remarquons que :

$$D(t, T) = \lim_{\Delta R(t, T) \rightarrow 0} - \frac{\Delta B(t, T)}{\Delta R(t, T)} \bigg/ B(t, T) = - \frac{\partial_R B(t, T)}{B(t, T)} = T - t$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} P(t+h; \theta) - P(t; \theta) &= \sum_{i=1}^n C_i \times \Delta B(t, T_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i \times \Delta R(T_i) \end{aligned}$$

avec :

$$\beta_i = -C_i \times D(t, T_i) \times B(t, T_i)$$

β_i est l'exposition du PnL au facteur $\Delta R(T_i) = R(t+h, T_i) - R(t, T_i)$. Si nous supposons que les variations de taux zéro coupon suivent une

le plus simple est celui développé par Merton (1976). On suppose que le prix du sous-jacent est un processus de diffusion avec saut :

$$dS(t) = (\mu - \lambda \bar{k}) S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) + kS(t) dN(t)$$

où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ . Merton montre alors que le prix de l'option d'achat est une somme pondérée de prix Black et Scholes²⁹. Ce modèle initial a donné lieu à de nombreuses extensions³⁰. Dans la pratique, ces modèles sont peu utilisés en gestion, ils sont surtout employés dans les simulateurs de couverture pour dimensionner les risques.

Le risque de dividende

La prise en compte des dividendes a deux effets :

- ils modifient la dynamique du sous-jacent (au moment de la tombée du dividende D , l'action baisse exactement de D);
- ils influencent le PnL de la couverture.

Le premier effet est proche d'un risque de saut. Le second effet est plus complexe. Dans le cas où le delta de l'option est positif, le trader touche les dividendes. Le prix de l'option est donc une fonction décroissante des dividendes perçus. Le problème est que ces dividendes ne sont pas connus au moment de la vente de l'option. L'incertitude des dividendes futurs induit donc un risque dont il convient de tenir compte.

Le risque de corrélation

Considérons une option sur spread $(S_1(T) - S_2(T) - K)^+$ dans le modèle Black-Scholes. Nous supposons que la dynamique de l'actif i est un mouvement brownien géométrique $dS_i(t) = \mu_i S_i(t) dt + \sigma_i S_i(t) dW_i(t)$ avec $\mathbb{E}[W_1(t)W_2(t)] = \rho t$. Nous pouvons montrer que le prix de cette option est :

$$C_0 = \int_{\mathbb{R}} \text{BS} \left(S^*, K^*, \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}, T, r - \frac{1}{2} \rho^2 \sigma_2^2, r \right) d\Phi(x_1)$$

avec $S^* = -S_2(0) \exp(\rho \sigma_2 \sqrt{t} x_1)$, $K^* = K - g_1(x_1)$ et :

$$g_1(x_1) = S_1(0) \exp \left(\left(r - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) t + \sigma_1 \sqrt{t} x_1 \right)$$

$\text{BS}(S_0, K, \Sigma, T, b, r)$ est la formule de Black et Scholes d'une option européenne d'achat de maturité T et de prix d'exercice K en supposant que S_0 , Σ , b et r sont respectivement le prix actuel du sous-jacent, la volatilité

²⁹R.C. Merton, « Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous », *Journal of Financial Economics*, 3, 1976, p. 125-144.

³⁰R. Cont et P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman and Hall, 2004.

2. La contribution en risque RC_i est le produit de la VaR marginale par le poids :

$$RC_i(x) = x_i \times mVaR_i(x)$$

3. La VaR incrémentale est la différence entre la VaR calculée avec le portefeuille original et la VaR calculée avec le portefeuille sans l'exposition à l'actif i :

$$IVaR_i(x) = VaR(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - VaR(w_1, \dots, 0, \dots, x_n)$$

Les VaRs marginales et incrémentales sont des mesures de sensibilité de la VaR. Elles peuvent donc prendre des valeurs positives ou négatives. Si la VaR est une mesure de risque convexe, nous avons une propriété très intéressante :

$$VaR(x) = \sum_{i=1}^n x_i \times \frac{\partial VaR(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n RC_i(x)$$

On dit dans ce cas que la VaR vérifie le principe d'Euler. Ce principe permet de décomposer parfaitement la mesure de risque et de connaître quelle est la part de risque imputable à l'actif i .

2.5.2. Application à la VaR analytique

Nous considérons que la VaR est égale à $VaR(x) = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^\top \Sigma x}$. Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial VaR(x)}{\partial x} &= \Phi^{-1}(\alpha) \frac{2\Sigma x}{2\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\ &= \Phi^{-1}(\alpha) \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \end{aligned}$$

L'expression de la VaR marginale est donc :

$$mVaR_i(x) = \Phi^{-1}(\alpha) \frac{(\Sigma x)_i}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

où $(\Sigma x)_i$ est le i -ième élément du vecteur Σx . Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \times mVaR_i(x) &= x^\top \frac{\partial VaR(x)}{\partial x} \\ &= x^\top \Phi^{-1}(\alpha) \frac{\Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\ &= \Phi^{-1}(\alpha) \frac{x^\top \Sigma x}{\sqrt{x^\top \Sigma x}} \\ &= \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^\top \Sigma x} \\ &= VaR(x) \end{aligned}$$

La VaR analytique vérifie donc le principe d'Euler, c'est donc une mesure de risque convexe. Nous pouvons aussi montrer qu'il existe une relation entre la contribution en risque et le bêta du portefeuille. Notons β_i le bêta du i -ième actif défini par :

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(R_i(t; h), R(t; h))}{\sigma^2(R(t; h))} = \frac{(\Sigma x)_i}{x^\top \Sigma x}$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{VaR}(x)}{\partial x} &= \Phi^{-1}(\alpha) \times \sqrt{x^\top \Sigma x} \times \beta \\ &= \text{VaR}(x) \times \beta \end{aligned}$$

ou encore :

$$\text{RC}_i^*(x) = \frac{\text{RC}_i(x)}{\text{VaR}(x)} = x_i \times \beta_i$$

Le ratio $\text{RC}_i^*(x)$ est la contribution en risque relative. Elle est égale au poids de l'actif i multiplié par son bêta.

Nous considérons le cas d'un portefeuille d'actions en supposant que les facteurs de risque sont les rendements des actifs. Nous avons montré précédemment (voir page 63) que l'expression de la VaR analytique est $\text{VaR}(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha) P(t; \theta) \sqrt{w^\top \Sigma w}$ avec w le vecteur de poids - $w_i = \theta_i P_i(t) / \sum_{i=1}^n \theta_i P_i(t)$. Nous pouvons reformuler cette relation de la façon suivante :

$$\frac{\text{VaR}(\alpha)}{P(t; \theta)} = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{w^\top \Sigma w}$$

Le rapport $\text{VaR}(\alpha) / P(t; \theta)$ est la VaR relative exprimée en pourcentage de la valeur du portefeuille. Sous cette forme, nous retrouvons une expression analogue à celle que nous avons utilisée dans ce paragraphe. Notons que nous pourrions aussi avoir :

$$\text{VaR}(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{W^\top \Sigma W}$$

avec $W_i = \theta_i P_i(t)$. Dans ce cas, nous identifions x_i à l'exposition W_i et non plus au poids w_i .

Nous considérons 3 actifs. Les volatilités annuelles des rendements des actifs sont $\sigma_1 = 20\%$ et $\sigma_2 = \sigma_3 = 30\%$, et les corrélations sont égales à $\rho_{1,2} = 50\%$ et $\rho_{1,3} = \rho_{2,3} = -50\%$. Nous calculons la VaR 1 mois au seuil de confiance de 99%. Pour le portefeuille P_1 dont la composition est $w_1 = 50\%$, $w_2 = 40\%$ et $w_3 = 10\%$, nous obtenons une VaR mensuelle égale à 11,8%. Nous reportons sur le tableau 14 les valeurs des VaRs marginales et incrémentales ainsi que les contributions en risque. Nous indiquons aussi les coefficients de bêta et les contributions en risque correspondantes $\text{RC}_i^{(\beta)} = w_i \times \beta_i \times \text{VaR}(\alpha)$. Nous remarquons l'effet diversifiant du troisième actif, puisqu'il présente une VaR marginale négative.

Nous vérifions que la somme des contributions en risque est bien égale à la VaR, mais pas la somme des VaRs incrémentales. Dans cet exemple, nous avons $\sum_{i=1}^3 \text{IVaR}_i < \text{VaR}$. Pour le portefeuille P_2 dont la composition est $w_1 = 20\%$, $w_2 = 20\%$ et $w_3 = 60\%$, nous obtenons une VaR égale à 10,0% et le tableau 14. Ce sont maintenant les deux premiers actifs qui présentent une VaR marginale négative. Ceci se comprend parfaitement puisque ce portefeuille est très concentré dans le troisième actif. Avec cet exemple, on comprend que les effets de diversification ne s'analysent pas sans référence à un portefeuille donné : un actif est diversifiant toujours par rapport à un portefeuille, et non en absolu.

Tableau 13. Contribution en risque du portefeuille P_1

Actif	w_i	mVaR _{<i>i</i>}	RC _{<i>i</i>}	IVaR _{<i>i</i>}	β_i	RC _{<i>i</i>} ^(β)
1	0,500	0,111	0,056	0,045	0,945	0,056
2	0,400	0,178	0,071	0,058	1,515	0,071
3	0,100	-0,092	-0,009	-0,010	-0,782	-0,009
			0,118			0,118

Tableau 14. Contribution en risque du portefeuille P_2

Actif	w_i	mVaR _{<i>i</i>}	RC _{<i>i</i>}	IVaR _{<i>i</i>}	β_i	RC _{<i>i</i>} ^(β)
1	0,200	-0,018	-0,004	-0,007	-0,182	-0,004
2	0,200	-0,014	-0,003	-0,010	-0,136	-0,003
3	0,600	0,177	0,106	0,041	1,773	0,106
			0,100			0,100

Remarque 20. Nous verrons dans la troisième partie de ce livre comment nous pouvons calculer les VaRs marginales et les contributions en risque dans le cas des méthodes historique ou de Monte Carlo.

2.5.3. Décomposition factorielle

Dans les paragraphes ci-dessus, nous définissons les quantités mVaR_{*i*}(x) et RC_{*i*}(x) par rapport à l'exposition ou au poids x_i . x_i fait généralement référence à l'actif. Dans le cas de la VaR action précédente, x_i représente aussi la quantité du i -ième facteur, c'est-à-dire le rendement de l'actif i . Et RC_{*i*}(x) représente aussi la contribution en risque du i -ième facteur. Néanmoins, nous obtenons facilement ce résultat parce que nous avons une correspondance parfaite entre l'actif i et le facteur i . Mais, ce n'est pas tout le temps le cas.

Nous notons mVaR(\mathcal{A}_i) et RC(\mathcal{A}_i) la VaR marginale et la contribution en risque de l'actif i . Supposons que les rendements des actifs suivent un modèle linéaire factoriel :

$$R_i(t) = A\mathcal{F}(t) + \varepsilon_i(t)$$

où $\mathcal{F}(t) = (\mathcal{F}_1(t), \dots, \mathcal{F}_m(t))$ est le vecteur des m facteurs de risque et $\varepsilon_i(t)$ est le facteur de risque idiosyncratique indépendant de $\mathcal{F}(t)$. A est la matrice de sensibilité des facteurs et elle est de dimension $n \times m$. Soient Ω et D les matrices de covariance respectives de \mathcal{F}_t et ε_t . Nous avons :

$$\Sigma = A\Omega A^\top + D$$

Comme nous avons $\text{VaR}(x) = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^\top \Sigma x}$, nous en déduisons que :

$$\text{VaR}(x) = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{x^\top (A\Omega A^\top + D) x}$$

Notons y_j l'exposition (implicite) du portefeuille au facteur \mathcal{F}_j . Comme $\text{mVaR}(\mathcal{A}_i) = \Phi^{-1}(\alpha) (\Sigma x)_i / \sqrt{x^\top \Sigma x}$, la VaR marginale du facteur \mathcal{F}_j est³¹ :

$$\mathcal{MR}(\mathcal{F}_j) = \Phi^{-1}(\alpha) \frac{(A^\top \Sigma x)_j}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

C'est donc une fonction pondérée des VaRs marginales des différents actifs. L'expression de la contribution en risque est un peu plus compliquée puisqu'elle fait intervenir la matrice A^+ qui est l'inverse de Moore-Penrose de la matrice A :

$$\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j) = (A^+ x)_j \times \Phi^{-1}(\alpha) \times \frac{(A^\top \Sigma x)_j}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}$$

Exemple 5. Nous considérons un portefeuille composé de 4 actifs. Les expositions individuelles sont respectivement 250, 125, 200 et 300 euros. Nous supposons qu'il y a trois facteurs de risque. La matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} 1,2 & 0,9 & 0 & \\ 1,3 & 0,3 & 0 & \\ 1,4 & 0 & 0 & \\ 1,0 & 0 & 0,5 & \end{pmatrix}$$

La matrice de covariance Ω des facteurs est diagonale avec $\sigma(\mathcal{F}_1) = 20\%$, $\sigma(\mathcal{F}_2) = 15\%$ et $\sigma(\mathcal{F}_3) = 10\%$. La matrice de covariance D des risques idiosyncratiques est elle aussi diagonale avec $\sigma(\varepsilon_1) = \sigma(\varepsilon_3) = 10\%$ et $\sigma(\varepsilon_2) = \sigma(\varepsilon_4) = 15\%$. La VaR 1 mois à 99% est égale à 148,13 euros soit 16,9% de la valeur du portefeuille. Les résultats sont présentés dans le tableau 15. C'est le troisième actif qui a la plus grosse contribution avec 44,94 euros ce qui représente 30,3% de la VaR du portefeuille. Celui qui a la plus faible contribution est le second actif avec 22,38 euros (soit 15,1% en relatif). Les contributions en risque des facteurs sont beaucoup

³¹Pour obtenir ce résultat, nous utilisons la règle de composition suivante :

$$\frac{\partial \text{VaR}(x)}{\partial y} = \frac{\partial x^\top}{\partial y} \frac{\partial \text{VaR}(x)}{\partial x}$$

$L(\Delta t)$ de la façon suivante³⁴ $L(\Delta t) = \min_t R(t; \Delta t)$ alors que dans le cas d'une position courte, nous avons $L(\Delta t) = \max_t R(t; \Delta t)$. Sur le graphique 31, nous présentons l'estimation non paramétrique de la fonction de perte en fonction de Δt pour les indices S&P 500 (S&P) et MSCI Emerging Markets (EM). Les stress historiques³⁵ sont donnés dans le tableau 16 pour les deux indices précédents ainsi que pour les indices Eurostoxx 50 (ES50) et Topix (TPX). La période Δt est mesurée en jours de trading. On peut donc considérer que $\Delta t = 5$ (resp. $\Delta t = 20$ et $\Delta t = 60$) donne les stress hebdomadaires (resp. mensuels et trimestriels). Ainsi, le stress historique journalier pour une position longue est $-9,0\%$ pour le S&P 500, $-7,9\%$ pour l'indice Eurostoxx 50, etc. En pratique, l'estimation de ces stress historiques permet de formuler des propositions de stress mono-factoriels. Par exemple, sur le tableau 17, nous fournissons des propositions de stress pour les classes d'actifs Actions Pays Développés et Actions Pays Emergents. Ce qui est très important, c'est la cohérence de la grille des stress entre les différents marchés. Par exemple, nous remarquons qu'historiquement le stress du MSCI EM n'est pas plus fort que le stress du S&P 500 pour une position longue ($-7,3\%$ contre $-9,0\%$). Pourtant, investir dans des pays émergents est considéré plus risqué que d'investir dans un pays développé. C'est pourquoi nous avons choisi de fixer le stress à -10% pour les indices Actions Pays Développés et -15% pour les indices Actions Pays Emergents. Remarquons aussi que nous avons décidé d'avoir des stress non symétriques entre les positions longue et courte (au moins pour les maturités courtes). Pour autant, nous pouvons nous poser la question si ces stress sont valables pour n'importe quel indice de pays développés ou émergents. Par exemple, doit-on fixer les stress de l'indice belge BEL 20 au niveau de ceux des indices S&P 500, Eurostoxx 50 et Topix ? La réponse est négative, puisque l'indice BEL 20 est composé seulement de 20 actions et il est beaucoup moins diversifié que les trois autres ? En particulier, plus de 50% de la capitalisation boursière du BEL 20 est concentré sur seulement 5 titres. Un stress inférieur à -10% est donc plus approprié.

Tableau 16. Stress historiques (en %)

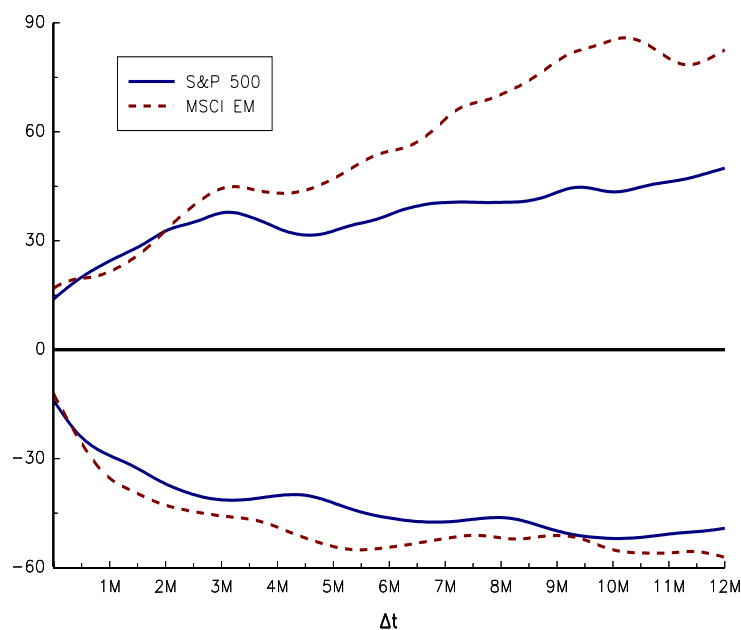
Δt	Stress ↓				Stress ↑			
	S&P	ES50	TPX	EM	S&P	ES50	TPX	EM
1	-9,0	-7,9	-9,5	-7,3	11,6	11,0	13,7	8,8
5	-18,3	-22,2	-19,8	-19,6	18,0	18,2	16,5	23,5
20	-28,2	-26,1	-33,8	-34,6	23,5	23,2	20,1	20,7
60	-42,2	-35,6	-40,2	-44,9	39,4	40,2	30,0	45,3

³⁴Cette fonction de perte est connue sous le terme *drawdown* en gestion d'actifs.

³⁵Afin d'harmoniser les résultats, nous considérons un historique de données de janvier 1995 à juin 2008.

Tableau 17. Proposition de stress mono-factoriels (en %)

Δt	Stress ↓		Stress ↑	
	DEV	EM	DEV	EM
1	-10	-15	15	20
5	-20	-25	20	25
20	-30	-35	30	35
60	-40	-45	40	45

Graphique 31. Estimation non-paramétrique de la fonction de perte (en %)

Dans les années 2000, le FMI a conduit des exercices de stress tests dans le cadre d'un programme d'évaluation du secteur financier (« Financial Sector Assessment Program » ou FSAP) afin d'analyser la résistance des banques à des crises économiques et financières. Les résultats pour la France sont présentés dans De Bandt et Oung (2004). Parmi ces stress tests, on note des exemples de chocs mono-factoriels :

- F1 Aplatissement de la courbe des taux d'intérêt à l'occasion d'une remontée des taux : hausse des taux d'intérêt au jour le jour de 150 pb, hausse des taux d'intérêt à dix ans de 50 pb, avec interpolation pour les maturités intermédiaires.
- F3 Augmentation parallèle de 300 pb de l'ensemble de la courbe des taux d'intérêt. Stress limité au secteur des assurances.
- F5 Baisse de 30 % de l'ensemble des marchés boursiers.

2.2.1. Les pondérations en fonction du risque

Définition 2. *Un actif pondéré en fonction du risque (risk weight asset ou RWA) est la valeur de l'actif risqué affectée d'un coefficient de pondération qui dépend de la nature du risque de l'actif. Cet actif pondéré en fonction du risque est aussi appelé plus simplement le risque pondéré.*

Dans la version de 1988, la matrice de pondération standard comprenait 4 pondérations (0%, 20%, 50% et 100%) avec un découpage assez grossier (distinction OCDE et non OCDE). La nouvelle matrice de pondération est basée sur un découpage des notations externes. Le système de référence utilisé par le Comité de Bâle est le système de notation de Standard & Poor's. Le tableau suivant présente une synthèse de la nouvelle matrice de pondération :

Notation		AAA	A+	BBB+	BB+	CCC+	NR
		à AA-	à A-	à BBB-	à B-	à C	
Souverains		0%	20%	50%	100%	150%	100%
Banques	1	20%	50%	100%	100%	150%	100%
	2	20%	50%	50%	100%	150%	50%
	2 CT	20%	20%	20%	50%	150%	20%
Entreprises				BBB+ à BB-		B+ à C	
		20%	50%	100%		150%	100%

On remarque un découpage des créances en trois catégories selon la nature de l'émetteur. On distingue donc les créances des emprunteurs souverains, celles des banques et celles des entreprises. Pour chacune de ces catégories, on définit des pondérations en fonction du rating de l'émetteur de la créance (NR correspond aux émetteurs non notés). C'est donc un système de pondération à deux dimensions basé sur la nature de la contrepartie et la notation de cette contrepartie.

En fait, le système de découpage est beaucoup plus fin et comporte 16 catégories d'expositions :

- expositions sur les administrations centrales ou les banques centrales ;
- expositions sur les administrations régionales ou locales ;
- expositions sur les entités du secteur public ;
- expositions sur les banques multilatérales de développement ;
- expositions sur les organisations internationales ;
- expositions sur les établissements ;
- expositions sur les entreprises ;
- expositions sur la clientèle de détail ;
- expositions sous la forme de prêts immobiliers consentis pour l'acquisition ou l'aménagement d'un logement garantis par une hypothèque de premier rang ou une sûreté d'effet équivalent ;
- etc.

Nous voyons donc que le risque souverain concerne par exemple plusieurs catégories d'expositions. Dans les paragraphes suivants, nous passons en revue les différentes catégories.

La catégorie des créances sur les emprunteurs souverains (sovereign risk)

Le risque souverain correspond aux créances sur les emprunteurs souverains et leurs banques centrales nationales. Les notations du tableau sont celles de l'agence de rating Standard & Poor's. Bien sûr, d'autres agences de notation peuvent être utilisées (Moody's ou Fitch par exemple). On peut aussi utiliser les scores de risque pays (*country risk rating*) publiés par les organismes de crédit à l'exportation (*Export Credit Agencies* ou ECA) qui utilisent la méthodologie 1999 de l'OCDE. Cette méthodologie comprend huit catégories de risque et nous avons la correspondance suivante :

Note S&P	AAA à AA-	A+ à A-	BBB+ à BBB-	BB+ à B-	CCC+ à C	NR
Note ECA	0 et 1	2	3	4 à 6	7	
Pondération	0%	20%	50%	100%	150%	100%

Dans le cas de la notation Coface, nous avons :

Notation Coface	10-9	8	7-4	3-1
Pondération	20%	50%	100%	150%

Notons aussi que la pondération est de 0% pour la Banque des Règlements Internationaux (BIS), le Fonds Monétaire International (IMF), la Banque Centrale Européenne (ECB), la Communauté Européenne (EC) et certaines banques multilatérales de développement (Banque européenne d'investissement, Banque internationale pour la reconstruction et le développement, etc.).

Pour les créances sur les organismes publics hors administration centrale, le Comité de Bâle propose aux autorités de contrôle nationales de choisir l'option 1 ou 2 concernant les créances sur les banques. La Commission Bancaire a constitué deux listes des entités du secteur public. La première liste constituée d'entités assimilées à des administrations centrales (CDC, CNRS, CROUSS, ONF par exemple) est pondérée à 0%. Dans la seconde liste, on trouve des entités assimilées à des établissements pondérés à 20% (comme l'agence d'urbanisme, les chambres d'agriculture, les ports autonomes).

La catégorie des créances sur les banques (banking risk)

Pour les banques, les autorités réglementaires ont le choix entre deux options¹. Dans la première option, la pondération dépend de la notation du pays et non de la banque. Par exemple, la pondération de 20% est applicable aux banques dont le siège social est dans un État noté AAA

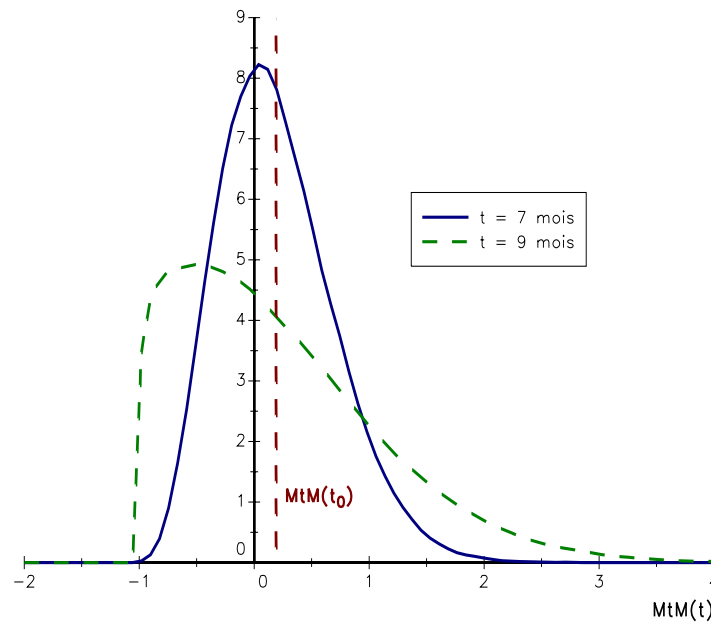
¹C'est l'option 1 qui a été choisie au niveau européen avec quelques modifications. Par exemple, les créances de moins de trois mois sur les banques sont pondérées à 20%.

Supposons que la contrepartie ne fasse pas défaut au bout de 6 mois et notons t_0 la date actuelle. La valeur du sous-jacent est de 107,85 et le mark-to-market $MtM(t_0)$ vaut 1 900 euros. Nous pouvons décomposer le mark-to-market à date t en deux composantes :

$$MtM(t) = MtM(t_0) + MtM(t_0; t)$$

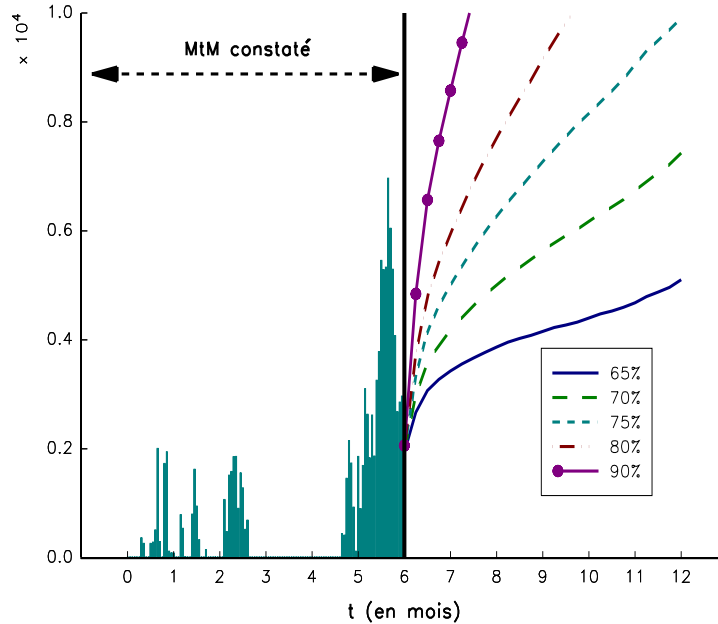
où $MtM(t_0; t)$ est le mark-to-market entre les dates t_0 et t . Par construction, $MtM(t_0; t)$ est aléatoire et dépend des facteurs de risque. Dans notre exemple, si nous considérons que le facteur de risque est la valeur future du sous-jacent $S(t)$, nous pouvons en déduire la distribution de $MtM(t)$. Sur le graphique 13, nous représentons la densité de $MtM(t)$ pour t égal à 7 et 9 mois. Nous vérifions que la borne inférieure du mark-to-market de cette pose optionnelle est $-10\,450$ euros²⁵. Plus l'instant de défaut est éloigné, plus il y a d'incertitude sur la valeur future du mark-to-market. Sur le graphique 14, nous avons représenté les quantiles de la distribution de $MtM(t)$.

Graphique 13. Densité de $MtM(t)$ (exprimé en dizaine de milliers de dollars)



²⁵ Au pire, nous perdons la prime, c'est-à-dire $N \times C_0$.

Graphique 14. Quantile du mark-to-market futur



5.2.2. La notion d'exposition future potentielle

Nous introduisons les définitions suivantes²⁶ :

- L'exposition courante (*current exposure*) est la valeur de marché positive :

$$CE(t_0) = \max(\text{MtM}(t_0), 0)$$

- La distribution de l'exposition au défaut $e(t)$ pour la date future t est notée $\mathbf{F}_{[t_0, t]}$.
- L'exposition future potentielle (*potential future exposure*) est le quantile de la distribution $\mathbf{F}_{[t_0, t]}$ pour un seuil de confiance α donné :

$$\text{PFE}_\alpha(t_0; t) = \mathbf{F}_{[t_0, t]}^{-1}(\alpha)$$

- L'exposition maximale (*peak exposure*) est le maximum des expositions futures potentielles :

$$\text{PE}_\alpha(t_0) = \sup_t \text{PFE}_\alpha(t_0; t)$$

Cette quantité est aussi connue sous le nom d'exposition future potentielle maximale (*maximum potential future exposure* ou MPFE).

²⁶Ces définitions proviennent du texte Bâle II. On les trouve aussi dans l'article de Canabarro et Duffie (2003).

- L'exposition attendue (*expected exposure*) est la moyenne de l'exposition au défaut pour une date t donnée :

$$EE(t_0; t) = \mathbb{E}[e(t)] = \int x d\mathbf{F}_{[t_0, t]}(x)$$

- L'exposition positive attendue (*expected positive exposure*) est la moyenne pondérée dans le temps des expositions attendues :

$$EPE(t_0; h) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} e(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} EE(t_0, t) dt$$

- L'exposition attendue effective (*effective expected exposure*) est l'exposition maximale attendue jusqu'à la date t :

$$EEE(t_0; t) = \sup_{\theta \leq t} EE(t_0; \theta) = \max(EEE(t_0; t^-), EE(t_0; t))$$

- L'exposition positive attendue effective (*effective expected positive exposure*) est la moyenne pondérée dans le temps des expositions attendues :

$$EEPE(t_0; h) = \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} EEE(t_0; t) dt$$

On calcule les quantités $EPE(t_0, h)$ et $EEPE(t_0, h)$ pour une période donnée $[t_0, t_0 + h]$, par exemple un an. On peut définir l'exposition au défaut comme une mesure absolue :

$$e(t) = \max(\text{MtM}(t), 0)$$

ou comme une mesure relative :

$$e(t) = \max(\text{MtM}(t_0; t), 0)$$

Si $e(t)$ est l'exposition au défaut absolue, nous avons $EE(t_0; t_0) = CE(t_0)$, $PFE_\alpha(t_0; t_0) = CE(t_0)$, etc., alors que ces mesures sont égales à zéro dans le cas de l'exposition relative.

Remarque 41. *Selon l'objectif visé, nous pouvons définir l'exposition au défaut comme l'exposition positive attendue ou l'exposition positive attendue effective (dans le cas d'une analyse rentabilité risque), ou l'exposition maximale (dans le cas du calcul de fonds propres), etc.*

Le calcul des quantités précédentes nécessitent de définir la distribution des facteurs de risque pour en déduire la distribution du mark-to-market et celle de $e(t)$. Deux approches sont utilisées en pratique. On peut employer la distribution risque neutre ou la distribution historique. Reprenons notre exemple. Dans le cas de la distribution risque-neutre, le sous-jacent $S(t)$ est un mouvement brownien géométrique :

$$dS(t) = rS(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

avec r le taux sans-risque et σ la volatilité implicite. Les graphiques 13 et 14 ont été obtenus avec cette distribution en posant donc $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $t_0 = 0,5$ et $S(t_0) = 107,85$. Nous pouvons aussi spécifier une distribution historique. Dans ce cas, le choix de la distribution est vaste, par exemple nous pouvons considérer que $S(t)$ est un processus brownien géométrique :

$$dS(t) = \hat{\mu}S(t) dt + \hat{\sigma}S(t) dW(t)$$

avec $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ le rendement moyen et la volatilité historique du sous-jacent.

Nous avons représenté les différentes mesures (relatives) de risque de contrepartie²⁷ de l'exemple précédent sur le graphique 15. Nous avons construit les distributions $\mathbf{F}_{[t_0, t]}$ en utilisant la distribution risque-neutre. Nous remarquons que les profils d'exposition sont croissants à cause de l'effet de diffusion des facteurs de marché. C'est généralement le cas des produits optionnels et des forwards. Dans ce cas, nous vérifions que $PE_\alpha(t_0) = PFE_\alpha(t_0; T)$ et $EEE(t_0; t) = EE(t_0; t)$. Dans le cas d'un swap de taux, les profils d'exposition sont en forme de cloche. Ceci s'explique par le fait que l'effet de diffusion des facteurs de marché se combine avec l'effet d'amortissement des flux du swap. Le graphique 16 présente les mesures de risques de contrepartie dans le cas d'un swap avec un amortissement continu. On considère généralement que l'exposition future potentielle maximale est atteinte au bout d'un tiers de la maturité.

5.2.3. La réglementation prudentielle

Il existe trois méthodes pour calculer l'exposition au défaut pour le risque de contrepartie :

1. la méthode standard ;
2. la méthode de l'exposition courante ;
3. la méthode des modèles internes.

Dans l'approche standard, l'exposition au défaut est proportionnelle au maximum entre la valeur de marché actuelle du portefeuille de transactions avec une contrepartie et la somme des valeurs absolues des positions en risque multipliées par les facteurs de conversion en équivalent-crédit. Dans la méthode de l'exposition courante, nous avons :

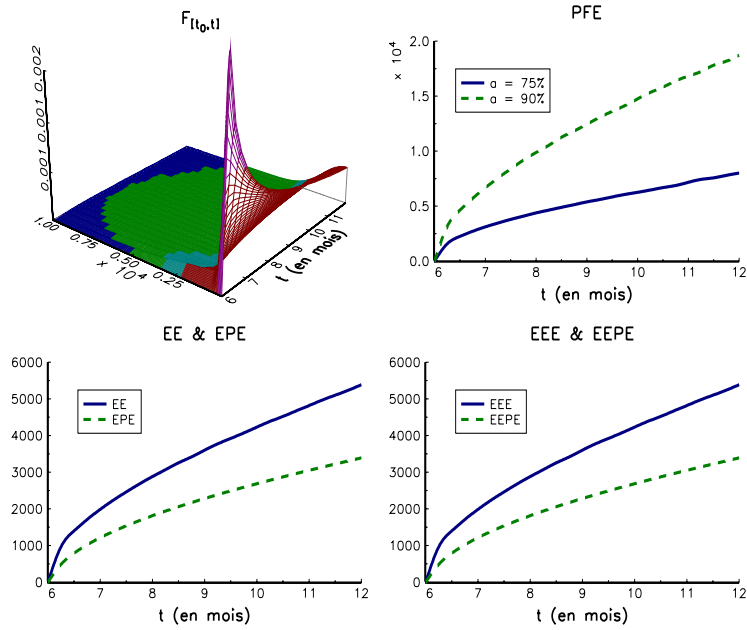
$$EAD = CE(t_0) + A$$

avec A un Add-on. Pour une transaction, le Add-on est le produit du notionnel par un facteur Add-on. Nous reportons dans le tableau 14 les valeurs proposées par le Comité de Bâle. Si la banque utilise un modèle interne, l'exposition au défaut à la date t_0 est égale à :

$$EAD = \alpha \times EEPE(t_0)$$

²⁷Nous fixons $h = t - t_0$.

Graphique 15. Profil d'exposition de la pose optionnelle



Graphique 16. Profil d'exposition d'un swap de taux

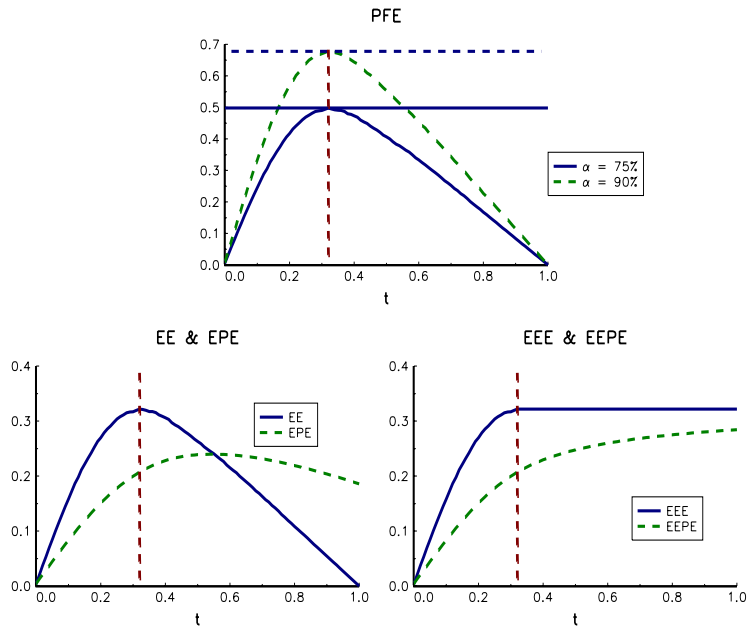


Tableau 14. Valeur Bâle II des facteurs Add-on

Maturité résiduelle	Change			Métaux	
	Taux	et or	Actions	précieux	MP
inférieure à 1 an	0,0%	1,0%	8,0%	7,0%	10,0%
entre 1 et 5 ans	0,5%	5,0%	8,0%	7,0%	12,0%
supérieure à 5 ans	1,5%	7,5%	10,0%	8,0%	15,0%

en considérant une période d'un an pour calculer l'exposition positive attendue effective. Le Comité de Bâle a fixé la valeur de α à 1,4. Sous certaines conditions, la banque peut estimer le coefficient α . Rappelons que la perte dans le cas du risque de contrepartie est :

$$L = \text{EAD}(\tau) \times \text{LGD} \times 1\{\tau \leq T\}$$

Notons LEE l'exposition équivalente (*loan equivalent exposure*) telle que le capital nécessaire pour couvrir la perte L soit égale au capital pour couvrir la perte $\text{LEE} \times \text{LGD} \times 1\{\tau \leq T\}$:

$$K(\text{LEE} \times \text{LGD} \times 1\{\tau \leq T\}) = K(L)$$

Le coefficient α est alors le rapport entre LEE et EEPE :

$$\alpha = \frac{\text{LEE}}{\text{EEPE}} \quad (2.1)$$

Notons que le Comité de Bâle a choisi la mesure EEPE comme point d'ancrage de la méthode interne, mais que pendant très longtemps, le point d'ancrage utilisé par l'industrie et l'ISDA a été l'exposition positive attendue²⁸. Dans ce cas, le coefficient α est défini de la façon suivante :

$$\alpha = \frac{\text{LEE}}{\text{EPE}} \quad (2.2)$$

D'ailleurs, même si c'est la mesure EEPE qui est utilisée pour calculer l'exposition au défaut, les estimations internes du coefficient α devront être faites en considérant l'expression (2.2) et non l'expression (2.1).

5.2.4. La prise en compte du risque de corrélation défavorable

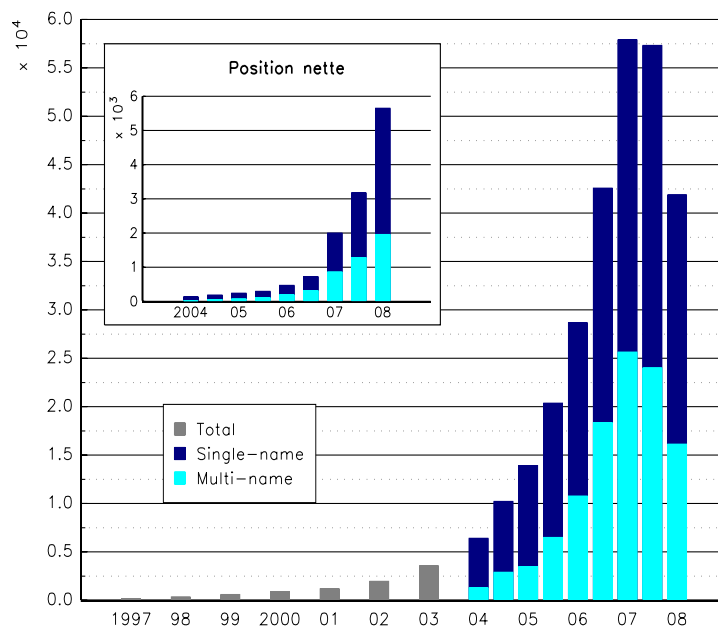
Ce risque, plus connu sous le terme anglais *wrong way risk* est le risque d'une corrélation positive entre la probabilité de défaut de la contrepartie et les facteurs de risques de marché. Pour montrer l'impact de ce risque, nous supposons que le mark-to-market est une fonction linéaire d'un facteur brownien :

$$\text{MtM}(t) = \mu + \sigma W(t)$$

²⁸Voir par exemple la présentation « ISDA Counterparty Risk – Notes on α » de Juan Grana disponible sur le site web de l'ISDA ; <http://www.isda.org/c.and.a/pdf/Counterparty-Risk-Notes-on-Alpha-021704.pdf>.

d'asset management représentent respectivement 13% et 7% des utilisateurs en 2003. Nous n'avons pas de chiffres plus récents. Néanmoins, on peut imaginer que la part de la gestion d'actifs a dû fortement augmenter notamment à cause de la prolifération des fonds crédits et des fonds monétaires dynamiques à partir de 2005¹¹.

Graphique 6. *Évolution du marché des dérivés de crédit (en milliards de dollars)*



Source : BBA et BIS.

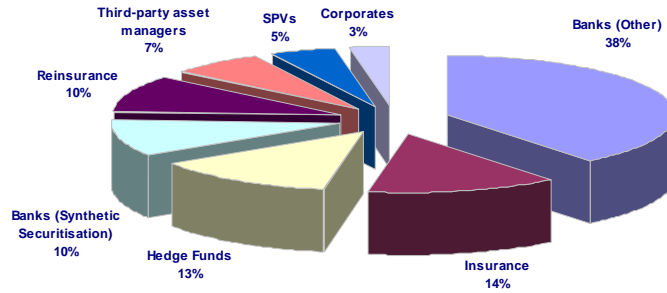
3.2.1. Les credit default swaps

Un CDS est une assurance contre la défaillance d'une entreprise. C'est un produit proche de ceux qu'il est possible de trouver sur le marché des dérivés de taux d'intérêt. L'acheteur de la protection paye une jambe fixe (*fixed leg* ou *premium leg*) de façon périodique et reçoit de la part du vendeur de la protection une jambe variable (*floating leg* ou *protection leg*) en cas de défaillance. La jambe fixe est exprimée comme une marge s sur le notionnel N . Soient t_1, \dots, t_M les dates de paiement de la jambe fixe. Si nous supposons que la marge n'est pas payée après le défaut¹², la

¹¹ Contrairement à ce que l'on pourrait penser, les sociétés de gestion sont principalement vendeuses de protection, afin de capter les primes (stratégies de carry).

¹² Afin de ne pas alourdir les formules, nous ne traitons pas le cas du coupon couru.

Graphique 7. Répartition des utilisateurs de dérivés de crédit



Source : Risk (2003).

valeur actualisée aléatoire de la jambe fixe est :

$$J_F(t) = \sum_{t_m \geq t} s \times N \times (t_m - t_{m-1}) \times \mathbf{1}\{\tau > t_m\} \times e^{-\int_t^{t_m} r(s) ds}$$

Notons T la maturité du CDS. La valeur actualisée aléatoire de la jambe variable est :

$$J_V(t) = (1 - R) \times N \times \mathbf{1}\{\tau \leq T\} \times e^{-\int_t^\tau r(s) ds}$$

dans le cas où la jambe variable est payée au moment du défaut τ . Si nous faisons les hypothèses habituelles (le taux de recouvrement R est constant et le temps de défaut est indépendant des taux d'intérêt), la valeur de marché du CDS du point de vue du vendeur de la protection est¹³ :

$$\begin{aligned} P(t) &= \mathbb{E}[J_F(t) - J_V(t)] \\ &= \sum_{t_m \geq t} s \times N \times (t_m - t_{m-1}) \times \mathbf{S}(t, t_m) \times B(t, t_m) - \\ &\quad (1 - R) \times N \times \int_t^T B(t, \theta) f(t, \theta) d\theta \end{aligned}$$

La cotation des CDS se fait généralement en marge à la monnaie (exprimée en points de base), c'est-à-dire la marge qui correspond à une valeur de marché nulle :

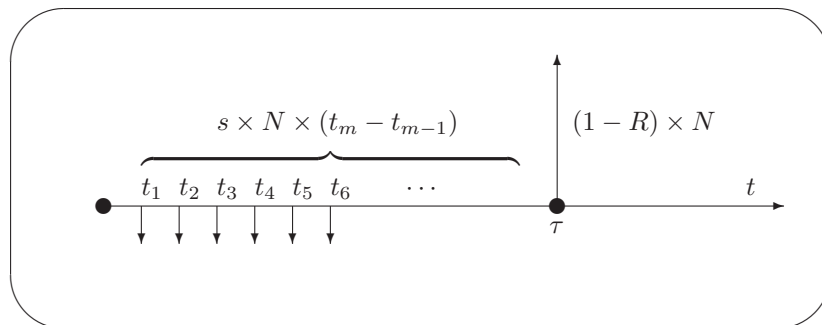
$$s = \frac{(1 - R) \times \int_t^T B(t, \theta) f(t, \theta) d\theta}{\sum_{t_m \geq t} (t_m - t_{m-1}) \times \mathbf{S}(t, t_m) \times B(t, t_m)}$$

¹³Nous avons supposé que la jambe fixe n'est pas payée après le défaut et que la jambe variable est payée au moment du défaut. Sur les marchés, d'autres définitions contractuelles du payoff sont possibles (paiement de la jambe variable à la maturité, paiement du flux couru de la jambe variable, etc.).

Cette marge à la monnaie est aussi appelée le spread du CDS. Dans le cas où la probabilité de défaillance est nulle, le calcul montre que le spread est nul. En revanche, si la défaillance est proche, le calcul montre que la marge à la monnaie est infinie. Nous en déduisons que $0 \leq s < +\infty$. De plus, la marge est ordonnée par rapport à la dominance stochastique de la fonction de survie. La marge d'un CDS est donc une mesure (indirecte) du risque de crédit.

Exemple 30. *Considérons un CDS 3M de maturité 5 ans de notional 1 million d'euros. Le spread de ce CDS est égal à 100 pb et le taux de recouvrement est fixé à 50%. Cela veut dire que la prime trimestrielle $s \times N \times (t_m - t_{m-1})$ est égale à 2 500 euros, ce qui fait une prime annuelle de 10 000 euros. Si l'entreprise ne fait pas défaut dans les 5 ans, l'acheteur de la protection paye donc 50 000 euros au vendeur de la protection. Si maintenant l'entreprise fait défaut au bout de 3 ans et 2 mois, l'acheteur de la protection payera 2 500 euros pendant 12 trimestres soit un total de 30 000 euros. Au moment du défaut, il recevra la prime de défaut égale à 500 000 euros. Le schéma des flux ressemble donc à celui présenté sur le graphique 8.*

Graphique 8. Flux d'un CDS



Remarque 81. *Si les taux d'intérêt sont nuls, et si le temps de défaut est exponentiel de hasard λ , nous avons dans le cas continu :*

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{(1 - R) \times \lambda \int_t^T e^{-\lambda(\theta-t)} d\theta}{\int_t^T e^{-\lambda(\theta-t)} d\theta} \\
 &= \lambda \times (1 - R)
 \end{aligned}$$

Dans The Lehman Brothers Guide to Exotic Credit Derivatives, il est indiqué que « this relationship is known as the credit triangle because it is a relationship between three variables where knowledge of any two is sufficient to calculate the third. It basically states that the spread paid per small time interval exactly compensates the investor for the risk of default per small time interval ».

dy's porte sur 58 prêts bancaires américains aux entreprises. En utilisant les prix du marché secondaire un mois après le défaut, le taux de recouvrement moyen est égal à 71%, ce qui est relativement élevé. La distribution est particulière, puisqu'elle n'est pas symétrique (la médiane vaut 77%). Le taux de recouvrement le plus faible est 15% alors que le plus élevé atteint 98%. Pour les mêmes emprunteurs, Moody's compare ces résultats avec ceux concernant les obligations. Les résultats sont les suivants⁸ :

Type de créance	Recouvrement moyen
prêts bancaires	71%
obligations (Sr. Sec.)	57%
obligations (Sr. Uns.)	46%
obligations (Sub.)	34%

On vérifie que la valeur du recouvrement dépend fortement du type de créance.

Remarque 90. *L'estimation de ces taux de recouvrement dépend de la méthode employée. En utilisant une autre méthodologie de calcul et une autre base de données (Loan Pricing Corporation ou LPC), Moody's obtient des résultats sensiblement différents.*

Tableau 9. Taux de recouvrement annuel

Année	Prêts	Obligations					Total
	Sr. Sec.	Sr. Sec.	Sr. Uns.	Sr. Sub.	Sub.	Jr. Sub.	
1995	75,44	62,02	47,60	34,30	41,54		43,28
1996	88,23	47,58	62,75	43,75	22,60		41,54
1997	78,75	75,50	56,10	44,73	35,96	30,58	49,39
1998	51,40	46,82	41,63	44,99	18,19	62,00	39,25
1999	75,82	43,00	38,04	28,01	35,64		34,33
2000	68,32	39,23	23,81	20,75	31,86	15,50	25,18
2001	64,87	37,98	21,45	19,82	15,94	47,00	22,21
2002	58,80	48,37	29,69	21,36	24,51		29,95
2003	73,43	63,46	41,87	37,18	12,31		40,72
2004	87,74	73,25	52,09	42,33	94,00		58,50
2005	83,78	71,93	54,88	26,06	51,25		55,97
2006	83,60	74,63	55,02	41,41	56,11		55,02
2007	68,63	80,54	53,25	54,47			54,69
2008	63,38	57,98	33,80	23,02	23,56		34,83

Source : Moody's (2009).

Cette étude est actualisée chaque année par Moody's. Nous reportons sur le tableau 9 les statistiques 2009. On remarque que le taux de recouvre-

⁸On utilise les abréviations suivantes : Sr. pour senior, Jr. pour junior, Sec. pour secured, Uns. pour unsecured et Sub. pour subordinated.

modèle de la copule gaussienne avec une matrice de corrélation constante $C_I(\rho)$. Dans le cas où les défauts sont indépendants ($\rho = 0$), il y a une très faible probabilité que la tranche senior soit touchée et une très forte probabilité que la tranche junior soit sollicitée. La probabilité que la tranche senior soit touchée va augmenter avec le niveau de corrélation (alors que c'est le contraire pour la tranche equity). Nous en déduisons que le spread de la tranche equity est une fonction décroissante de la corrélation et que celui de la tranche senior est une fonction croissante de la corrélation¹⁹. Comme la perte moyenne (ou le spread) du portefeuille est constante, cela implique que la somme des spreads de l'ensemble des tranches ne dépend pas du niveau de corrélation. Le trading de corrélation consiste à utiliser ces différentes relations afin de détecter les tranches qui sont sous-évaluées et celles qui sont sur-évaluées.

Connaissant le spread d'une tranche, il est donc possible d'inverser la fonction de valorisation pour obtenir la corrélation implicite $\rho_{[A,D]}$. Généralement, on observe que cette corrélation n'est pas constante et qu'elle dépend des points d'attachement et de détachement. Ce phénomène est appelé le skew de corrélation (par analogie au smile et au skew de la volatilité implicite du modèle Black-Scholes). En pratique, cette corrélation implicite est transformée en corrélation de base ρ_K pour des tranches equity (qui attache donc à $A = 0$ et qui détache au strike $D = K$). Sur le graphique 13, nous reportons la corrélation de base de l'indice European iTraxx pour la maturité 5 ans à la date du 14 juin 2005. Nous vérifions que celle-ci n'est pas constante.

3.4. Le traitement prudentiel des dérivés de crédit

Nous avons vu dans la première partie que le Comité de Bâle autorise l'utilisation de certains dérivés de crédit comme technique de réduction de risque sous certaines conditions. La protection doit être directe, explicite, irrévocable et inconditionnelle. Cela concerne les CDS qui sont traités comme des garanties, et les F2D, les S2D et les couvertures par tranche qui relèvent du traitement prudentiel relatif à la titrisation.

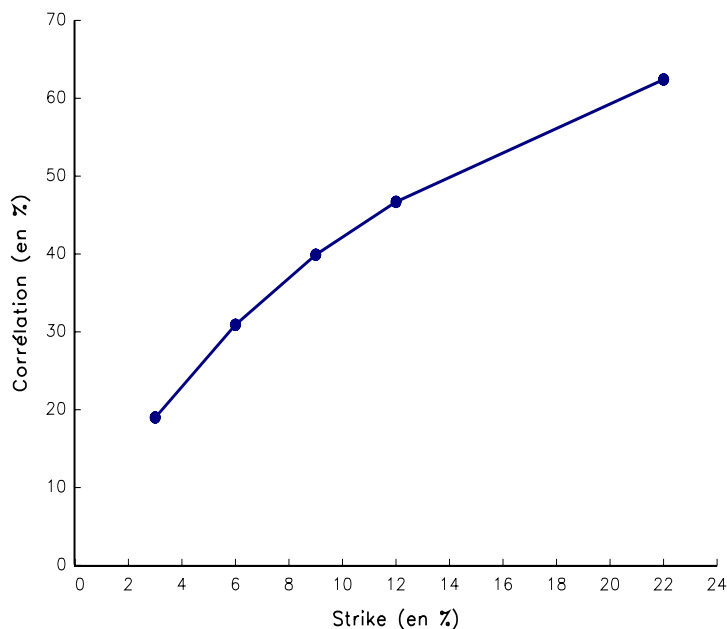
3.4.1. L'approche standard

Les pondérations des expositions de titrisation sont les suivantes :

Pondération	20%	50%	100%	350%	Déduction
Notation LT	AAA/AA-	A+/A-	BBB+/BBB-	BB+/BB-	Autre
Notation CT	A-1/P-1	A-2/P-2	A-3/P-3		Autre

On remarque une asymétrie entre les expositions qui ont une notation au moins égale à BB- ou A-3/P-3 et les autres (celles qui ont une notation

¹⁹On peut voir les tranches junior, mezzanine et senior respectivement comme des F2D, S2D et LTD, ce qui confirme le comportement du spread en fonction de la corrélation.

Graphique 13. *Corrélation de base ITraxx 5 ans (14 juin 2005)*

inférieure ou qui ne sont pas notées). Dans ce dernier cas, la banque doit déduire l'exposition de ses fonds propres réglementaires (50% pour le ratio *tier one* et 50% pour le ratio *tier two*).

3.4.2. L'approche IRB

On distingue trois approches : la première est basée sur les notations (*Ratings-Based Approach* ou RBA), la deuxième est la formule réglementaire (*Supervisory Formula* ou SF) alors que la troisième utilise les évaluations internes (*Internal Assessment Approach* ou IAA).

La première approche est un système de pondération beaucoup plus fin que celui de l'approche standard. Outre qu'ils dépendent de la notation (externe ou induite), les coefficients de pondération sont aussi fonction de la granularité du portefeuille d'adossement. La granularité est mesurée par l'indice d'Herfindahl N :

$$N = \frac{\left(\sum_{i=1}^I \text{EAD}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^I \text{EAD}_i^2}$$

et le système de pondération est différent si $N \geq 6$ et si $N < 6$. Par exemple, si la tranche est notée AA et si $N < 6$, la pondération est de 25% alors qu'elle est égale à 8% ou 15% si $N \geq 6$ (en fonction d'autres critères). La formule réglementaire correspond à une formule mathématique com-

2.3. Modélisation stochastique

Nous supposons dans cette section que nous disposons d'un modèle statistique pour prévoir la perte en cas de défaut, au moins sa moyenne et son écart-type. Pour cela, nous pouvons utiliser LossCalc ou un modèle économétrique moins sophistiqué ou encore des tables de paramètres. Ces tables de paramètres peuvent par exemple nous fournir des valeurs de μ_{LGD} et σ_{LGD} par pays/industrie (ou zone géographique/industrie).

Nous cherchons maintenant à modéliser la variable aléatoire LGD dont le support est $[0, 1]$. Une première idée est de considérer LGD comme une variable certaine et de la poser égale à sa moyenne μ_{LGD} . Dans ce cas, nous ne prenons pas en compte l'incertitude sur la perte en cas de défaut. C'est souvent le cas pour la valorisation des dérivés de crédit (pour des raisons d'existence d'un portefeuille de couverture). C'est aussi parfois le cas pour calculer des mesures de risque de crédit.

2.3.1. Avec une distribution Bêta

En général, nous utilisons une distribution Bêta pour modéliser la perte en cas de défaut. C'est une distribution à support $[0, 1]$ qui dépend de deux paramètres positifs a et b . L'expression de la densité est :

$$f(x) = \frac{x^{a-1} (1-x)^{b-1}}{\mathbf{B}(a, b)}$$

avec $\mathbf{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$. La moyenne et la variance sont égales à :

$$\mu(X) = \frac{a}{a+b}$$

et :

$$\sigma^2(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

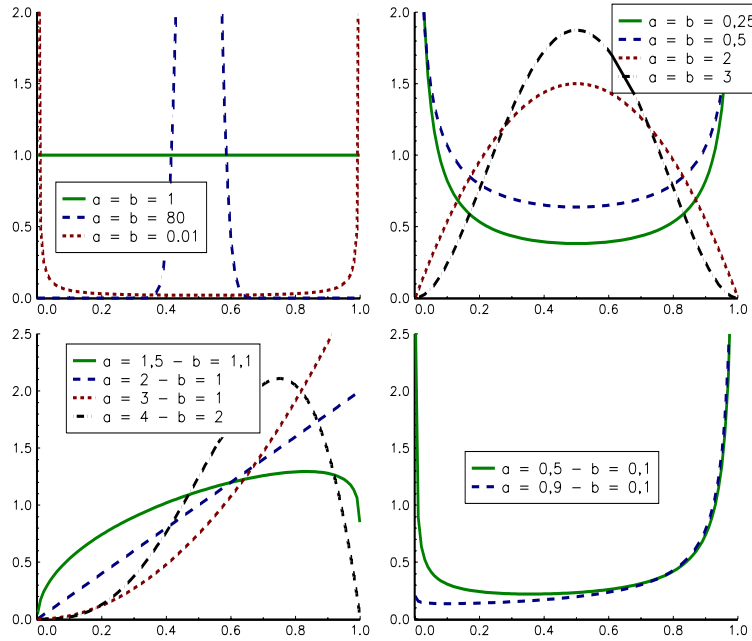
Lorsque a et b sont plus grands que 1, la distribution admet un mode égal à $(a-1)/(a+b-2)$. Cette distribution est très flexible et permet de modéliser plusieurs formes de distribution (voir le graphique 10) :

- si $a = 1$ et $b = 1$, nous obtenons la distribution uniforme ;
- si $a = b$, nous avons une distribution symétrique au point $1/2$; si les paramètres sont supérieurs à 1, la courbe est en cloche alors qu'elle a la forme d'un U si les paramètres sont inférieurs à 1 ; les cas limites sont les distributions Dirac et Bernoulli ;
- si $a > b$, la courbe est asymétrique à droite (la distribution présente alors un coefficient de skewness négatif) ;
- etc.

À partir des formules de la moyenne et de la variance, nous pouvons calibrer les paramètres a et b à partir de la moyenne et de la volatilité de la perte en cas de défaut :

$$a = \frac{\mu_{\text{LGD}}^2 (1 - \mu_{\text{LGD}})}{\sigma_{\text{LGD}}^2} - \mu_{\text{LGD}} \quad (7.3)$$

Graphique 10. Quelques exemples de densité de la distribution $\mathcal{B}(a, b)$



et :

$$b = \frac{\mu_{\text{LGD}}(1 - \mu_{\text{LGD}})^2}{\sigma_{\text{LGD}}^2} - (1 - \mu_{\text{LGD}}) \quad (7.4)$$

Cette méthode d'estimation est appelée la méthode des moments (MM).

Exemple 34. *Considérons l'échantillon de pertes en cas de défaut suivant : 68%, 90%, 22%, 45%, 17%, 25%, 89%, 65%, 75%, 56%, 87%, 92% et 46%. Nous obtenons $\mu_{\text{LGD}} = 59,8\%$ et $\sigma_{\text{LGD}} = 27,0\%$. En utilisant la méthode précédente des moments, les paramètres a et b de la distribution Bêta sont égaux à 1,37 et 0,93, alors qu'ils valent 1,84 et 1,25 dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance. Notons que les distributions calibrées implicites sont légèrement différentes (voir le graphique 11).*

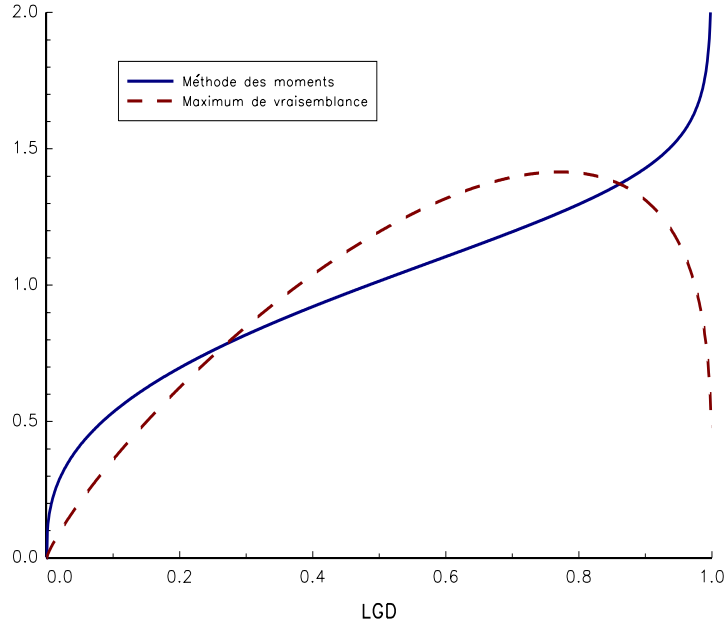
Remarque 91. *Il est possible de calibrer la distribution Bêta à condition de respecter des contraintes sur μ_{LGD} et σ_{LGD} . En reprenant les expressions (7.3) et (7.4) et en imposant $a > 0$ et $b > 0$, nous obtenons la condition suivante :*

$$\sigma_{\text{LGD}} < \sqrt{\mu_{\text{LGD}}(1 - \mu_{\text{LGD}})}$$

Cette condition est assez peu restrictive. En effet, considérons une variable aléatoire générale X sur $[0, 1]$. Comme nous avons $\mathbb{E}[X^2] \leq \mathbb{E}[X]$, nous en déduisons que

$$\sigma[X] \leq \sigma^+(\mathbb{E}[X]) = \sqrt{\mathbb{E}[X](1 - \mathbb{E}[X])}$$

Graphique 11. Calibration de la distribution Bêta



La distribution Bêta n'impose donc pas plus de contraintes que la contrainte générale précédente (même si la limite ne peut être atteinte¹¹). Notons cependant que l'écart-type ne peut être fixé à un niveau trop élevé. Par exemple, il n'existe pas de variable aléatoire sur $[0, 1]$ telle que $\mu = 50\%$ et $\sigma > 50\%$, ou $\mu = 10\%$ et $\sigma > 30\%$, etc. (voir le graphique 12).

Nous avons représenté sur le graphique 13 les distributions calibrées pour différentes valeurs de μ_{LGD} et $\sigma_{\text{LGD}} = 20\%$. Nous remarquons que nous obtenons des distributions en \mathbf{U} . Pour obtenir des distributions concaves (c'est-à-dire en \mathbf{U} inversé), il faut que l'écart-type σ_{LGD} soit plus petit (voir par exemple le graphique 14).

Remarque 92. Les graphiques précédents peuvent nous faire penser que la distribution Bêta impose d'avoir des volatilités relativement faibles si nous voulons obtenir une densité concave. En fait, ceci n'est pas une restriction imposée par la distribution Bêta mais c'est une contrainte due au support $[0, 1]$ de la variable aléatoire. En effet, nous pouvons montrer que de toute façon l'écart-type est borné par la valeur $\sqrt{1/12} \simeq 28,86\%$ (qui est l'écart-type de la variable aléatoire uniforme) lorsqu'une distribution sur $[0, 1]$ est concave et admet un seul mode.

¹¹La limite correspond à une distribution de Bernoulli de paramètre $p = \mu$.

1. en France, l'actionnaire principal était bien souvent public et il faut reconnaître que l'État n'a jamais été très exigeant en termes de ROE;
2. le secteur mutualiste (les banques coopératives et les caisses d'épargne) était très décentralisé et disposait de fonds propres abondants aux contraintes de rémunération faible.

De fait, seuls les réseaux comme Paribas, le CCF ou la Société Générale avaient un intérêt immédiat à développer la méthodologie Raroc. Par ailleurs, avec la montée des risques sur les PME, l'approche Raroc s'est avérée d'autant plus intéressante que les risques et les volumes sont importants sur le marché des entreprises. Paribas (grand corporate) et Crédit Lyonnais (PME) furent les pionniers en 1995, suivis par la Société Générale et la BNP. La réglementation a aussi contribué à diffuser la méthodologie Raroc (préconisations du Conseil National du Crédit en septembre 1995 en matière de provisionnement ex-ante, de mise en place d'outils de mesure des risques et de tarification du crédit). Ainsi, le règlement 97-02 encourage fortement la mise en place d'outils de type Raroc et la publication du Livre Blanc de la Commission Bancaire en novembre 1998 confirme cette volonté.

3.1. Définitions

Le Raroc exprime le taux de rendement des fonds propres économiques. C'est donc le ratio entre la marge nette prévisionnelle après déduction des pertes moyennes anticipées et les fonds propres nécessaires pour couvrir un pourcentage des pertes exceptionnelles. Les différents types de Raroc qui existent se différencient principalement par la date et le périmètre des calculs :

- Raroc à l'origine
le calcul se fait à l'octroi d'un crédit et prend en compte tous les éléments jusqu'à la fin de l'opération. C'est probablement le plus pertinent en termes de décision de crédit.
- Raroc résiduel
le calcul prend en compte immédiatement les changements des caractéristiques des clients (notation), des crédits (remboursement anticipé partiel, etc.) et des garanties. Mais sa volatilité trop importante d'un jour sur l'autre en fonction des événements de la vie d'un crédit (frais de dossier, commission flat, amortissement, etc.) ne permet pas d'adopter une stratégie client.
- Raroc annuel
le calcul ne prend en compte que les éléments contenus dans une année civile. Il correspond à l'exercice budgétaire et donne la possibilité d'adopter une stratégie, de fixer des objectifs et de pouvoir mesurer les résultats à la fin de la période.
- Raroc complet
le calcul prend en compte, à une date donnée, tous les éléments des

engagements en cours, de la date d'origine à la date d'échéance de chaque concours. Plus stable et plus exhaustif (adjonction des marges hors crédit ou *side business* : flux, services, conseils, etc.), il permet d'adopter une stratégie pour un client, un portefeuille ou une activité. Le choix parmi ces différents Raroc se fait principalement en fonction de l'utilisateur final et de ses attentes.

Concernant le provisionnement et les fonds propres économiques, il convient également de définir les différents types de pertes auxquels nous allons être confrontés :

- la perte moyenne (ou le coût du risque) est définie comme la perte statistique moyenne quasi certaine sur un portefeuille diversifié et pour un cycle économique complet ;
- la perte maximale est une perte supplémentaire qui ne peut être dépassée que dans un pourcentage faible de cas représentant le seuil de tolérance ;
- la perte exceptionnelle a une probabilité d'occurrence quasi nulle, mais elle peut être très importante et donc ne pas être couverte par les fonds propres économiques. On l'appelle également le risque de ruine.

Le risque de crédit se définit comme le risque de perte auquel une banque est exposée en cas de détérioration ou de défaillance de la contrepartie. Il résulte de la combinaison de trois facteurs (modèle dit CER) :

- le risque de contrepartie est caractérisé par la probabilité de défaillance du client. Cette dernière est relative à principalement deux facteurs que sont la qualité du débiteur (classe de risque ou notation) et la maturité du crédit ;
- le risque d'exposition est l'évaluation du montant des engagements au jour de la défaillance. Ce montant dépend du type d'engagement accordé (facilité de caisse, prêt à moyen terme, caution, opérations de marchés, etc.), du niveau prévisionnel moyen d'utilisation, de la forme juridique de l'engagement (confirmé ou non, etc.), de la durée de l'engagement et de sa forme d'amortissement (linéaire, dégressif, in fine, etc.). Chaque type de crédit est ensuite affecté d'un coefficient de correspondance (pondération) défini par rapport à une ligne de caisse qui représente le risque d'exposition maximal. De même, à chaque catégorie de crédit correspondent des caractéristiques en termes d'exposition (durée, amortissement) et de garantie. Ainsi, l'escompte bénéficie d'une garantie implicite forte liée à l'estimation de la valeur des effets remis, tandis que celle du crédit-bail est associée à une estimation de la valeur de revente du bien financé ;
- le risque de récupération est, après coûts de récupération et de portage, la valeur attendue de la réalisation des garanties (sûretés réelles et personnelles) et de la liquidation des actifs non gagés de la contrepartie.

- (b) On considère deux pertes L_1 et L_2 de même distribution \mathbf{F} . Construire une distribution jointe de (L_1, L_2) qui ne vérifie pas la propriété de sous-additivité.
5. On spécifie L de la façon suivante :

$$L = \sum_{i=1}^n x_i \times L_i$$

avec L_i la perte unitaire du i -ième actif. On utilise la valeur en risque comme mesure de risque.

- (a) Donnez l'expression de la valeur en risque marginale.
 (b) Calculez le risque marginal lorsque :

$$(L_1, \dots, L_n) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

Le risque opérationnel

1. On considère un échantillon de pertes unitaires $\{L_1, \dots, L_n\}$. On suppose que ces pertes peuvent être modélisées de deux façons : (i) $L_i \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$ et (ii) L_i suit une distribution de Pareto $\mathcal{P}(\theta; x_-)$ définie par $\Pr\{L \leq x\} = 1 - \left(\frac{x}{x_-}\right)^{-\theta}$ avec $x \geq x_-$ et $\theta > 1$.
- (a) On se place dans le cas (i). Calculez les estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ du maximum de vraisemblance. Calculez les deux premiers moments de L_i et déduisez-en une méthode généralisée des moments pour estimer les paramètres μ et σ .
- (b) On se place dans le cas (ii). Calculez l'estimateur $\hat{\theta}$ du maximum de vraisemblance. Calculez les deux premiers moments de L_i et déduisez-en une méthode généralisée des moments pour estimer le paramètre θ .
- (c) On suppose que les pertes $\{L_1, \dots, L_n\}$ ont été collectées au delà d'un seuil H . Calculez l'estimateur $\hat{\theta}$ du maximum de vraisemblance dans le cas de la distribution (ii). Calculez les deux premiers moments conditionnels de L_i dans le cas de la distribution (i).
- (d) Proposez deux tests d'adéquation de la queue de distribution.
2. On considère un échantillon de T nombres de pertes $\{N_1, \dots, N_T\}$. On suppose que le nombre annuel de pertes suit une distribution de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
- (a) Calculez l'estimateur $\hat{\lambda}$ du maximum de vraisemblance si la fréquence de mesure des pertes est annuelle.
- (b) Même question si les pertes N_1, \dots, N_T sont des mesures trimestrielles.

- (b) Calculez l'exposition au défaut de la banque A (resp. de la banque B).
- (c) Même question s'il existe un contrat de compensation global.
- (d) Même question s'il existe un contrat de compensation ne portant que sur le marché des actions.
2. On note $e(t)$ l'exposition au défaut d'un contrat OTC de maturité T . La date actuelle est fixée à $t = 0$.
- (a) Définissez les notions d'exposition future potentielle $\text{PFE}_\alpha(0; t)$, d'exposition maximale $\text{PE}_\alpha(0)$, d'exposition attendue $\text{EE}(0; t)$, d'exposition positive attendue $\text{EPE}(0; h)$, d'exposition attendue effective $\text{EEE}(0; h)$ et d'exposition positive attendue effective $\text{EEPE}(0; h)$.
- (b) Calculez ces différentes quantités lorsque l'exposition au défaut est respectivement :
- $e(t) = \sigma\sqrt{t}\varepsilon$ avec $\varepsilon \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$;
 - $e(t) = \exp(\sigma\sqrt{t}\varepsilon)$ avec $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$;
 - $e(t) = \sigma(t^3 - \frac{7}{3}Tt^2 + \frac{4}{3}T^2t)\varepsilon$ avec $\varepsilon \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.
- (c) Commentez ces résultats.
3. Dans cet exercice, on cherche à mesurer l'impact d'un contrat de compensation sur l'exposition au défaut d'une banque.
- (a) On considère un premier contrat OTC \mathcal{C}_1 entre la banque A et la banque B . Le mark-to-market $\text{MtM}_1(t)$ de la banque A pour le contrat \mathcal{C}_1 évolue de la façon suivante :

$$\text{MtM}_1(t) = x_1 + \sigma_1 W_1(t)$$

avec $W_1(t)$ un mouvement brownien. Calculez la moyenne de l'exposition au défaut de la banque A .

- (b) Le risque de contrepartie de la banque A vis-à-vis de la banque B porte maintenant sur deux contrats, le contrat \mathcal{C}_1 précédent et le contrat \mathcal{C}_2 dont le mark-to-market est :

$$\text{MtM}_2(t) = x_2 + \sigma_2 W_2(t)$$

avec $W_2(t)$ un mouvement brownien tel que $\mathbb{E}[W_1(t)W_2(t)] = \rho t$. Calculez la moyenne de l'exposition au défaut de la banque A dans le cas où il existe un contrat de compensation global.

- (c) Commentez ces résultats.

Table des matières

Remerciements	5
Préface	7
Avant-propos	11
Introduction générale	17

Première partie Capital réglementaire et ratio international de solvabilité

Chapitre 1 – Le risque de marché	45
1. La réglementation prudentielle	46
1.1. Les normes générales	50
1.2. Les critères qualitatifs.....	50
1.3. Les critères quantitatifs.....	52
1.4. Simulations de crise.....	54
1.5. Traitement du risque spécifique	55
1.6. Dispositif prudentiel de contrôle ex post lié à l'utilisation des modèles internes.....	56
2. La valeur en risque.....	58
2.1. Définition	58

2.2.	Les aspects réglementaires du calcul de la VaR	70
2.3.	Les aspects méthodologiques	74
2.4.	Les produits exotiques	90
2.5.	Le calcul des contributions en risque	116
3.	Les programmes de stress-testing	121
3.1.	Définition	122
3.2.	Directions méthodologiques choisies par les institutions bancaires.....	124
3.3.	L'approche historique	125
3.4.	L'approche macro-économique.....	128
3.5.	La théorie des valeurs extrêmes	129
3.6.	La gestion du risque de liquidité.....	152
4.	La gestion du risque de marché dans la gestion d'actifs	155
4.1.	La gestion pour compte de tiers	155
4.2.	La gestion des risques des OPCVM.....	156
	Conclusion	160
Chapitre 2 – Le risque de crédit		161
1.	Typologie du risque de crédit	161
2.	L'approche standard.....	163
2.1.	La méthode forfaitaire du ratio Cooke	164
2.2.	L'approche standard du ratio McDonough	164
2.3.	Les procédures de réduction des risques	171
3.	L'approche IRB du deuxième document consultatif	175
3.1.	Les principes généraux.....	175
3.2.	Dérivation de la formule de calcul IRB	178
3.3.	Granularité du portefeuille	184
4.	L'approche IRB du Nouvel Accord de Bâle	201
4.1.	Les enseignements des QIS	201
4.2.	Le premier Pilier et l'exigence minimale de fonds propres.....	204
4.3.	Le deuxième Pilier et la surveillance prudentielle....	212
4.4.	Le troisième Pilier et la discipline de marché	214
5.	Le risque de contrepartie sur opérations de marché.....	214
5.1.	Définition	214
5.2.	Modélisation de l'exposition au défaut.....	218
	Conclusion	226
Chapitre 3 – Le risque opérationnel		227
1.	La définition du risque opérationnel	227
2.	Les différentes approches pour mesurer le risque opérationnel.....	230
2.1.	L'approche indicateur de base	231
2.2.	L'approche standard	232
2.3.	Les mesures AMA	233
3.	La méthode LDA	236

3.1.	Estimation de la distribution de sévérité	237
3.2.	Estimation de la distribution de fréquence	243
3.3.	Calcul de la charge en capital.....	244
3.4.	Détermination des intervalles de confiance.....	248
3.5.	Analyse de scénarios.....	251
3.6.	Stabilité et recalibration de la méthode LDA	253
	Conclusion	255

Deuxième partie

Modélisation des risques multiples

Chapitre 4 – Les fonctions copules	259
1. Représentation canonique d'une distribution de probabilité multidimensionnelle	259
1.1. Théorème de Sklar	260
1.2. Expression de la densité bidimensionnelle.....	261
1.3. Premières propriétés des fonctions copules	263
1.4. Extension au cas multidimensionnel	265
1.5. Représentation graphique d'une copule	265
2. Les classes de Fréchet	269
2.1. Définition	269
2.2. Ordre stochastique de concordance	270
3. Copules et variables aléatoires.....	274
3.1. Principaux résultats	274
3.2. Composantes singulières.....	276
3.3. Mesures de dépendance.....	280
3.4. Et la corrélation ?	282
3.5. Le tau de Kendall et le rho de Spearman	286
3.6. La dépendance de queue	289
4. Les copules paramétriques	291
4.1. Les copules Archimédiennes	292
4.2. La copule Normale	295
4.3. La copule t de Student.....	298
4.4. Comparaison des copules Normale et Student	300
4.5. Copules paramétriques bivariées avec plusieurs paramètres.....	306
5. Les copules de valeurs extrêmes.....	307
5.1. Théorie des valeurs extrêmes multiples	308
5.2. Caractérisation des domaines d'attraction	312
6. Simulation et méthodes de Monte Carlo	314
6.1. La méthode des distributions	314
6.2. La méthode des distributions conditionnelles	315
6.3. Les méthodes dites analytiques.....	318
6.4. La méthode des quantiles empiriques	320
7. Inférence statistique des copules	322

7.1.	La copule empirique de Paul Deheuvels	322
7.2.	L'identification d'une copule Archimédienne	325
7.3.	La méthode des moments	328
7.4.	La méthode du maximum de vraisemblance	330
7.5.	La méthode IFM.....	331
7.6.	L'estimateur omnibus	332
	Conclusion	335
Chapitre 5 – Aspects multidimensionnels du risque		337
1.	Agrégation des risques de marché	337
1.1.	L'effet de diversification	339
1.2.	L'influence de la dépendance.....	342
1.3.	Construire une VaR marché semi-historique	343
1.4.	L'agrégation des valeurs en risque.....	343
2.	Construction et évaluation de scénarios de crise	351
2.1.	Rappel sur le cas unidimensionnel.....	351
2.2.	Le cas bidimensionnel	353
2.3.	Le cas multidimensionnel	354
3.	Risque de modèle et risque de paramètre	356
3.1.	Risque de paramètre dans le cas de deux actifs	356
3.2.	Risque de paramètre dans le cas de plusieurs actifs.	357
3.3.	Risque de modèle	358
4.	Calcul de la charge en capital pour le risque opérationnel ..	360
4.1.	La corrélation des fréquences	361
4.2.	La corrélation des pertes agrégées.....	363
5.	Modélisation de la corrélation dans les modèles de risque de crédit.....	365
5.1.	Le modèle de la firme	365
5.2.	Le modèle CreditMetrics	369
5.3.	L'approche par intensité.....	383
5.4.	Construction de fonctions de survie multidimen- sionnelle	387
	Conclusion	392

Troisième partie

Le risque de crédit

Chapitre 6 – Le marché du risque de crédit		395
1.	Le marché des crédits bancaires.....	396
2.	Le marché des obligations risquées	397
2.1.	Description du marché obligataire.....	398
2.2.	Valorisation d'une obligation risquée	398
3.	Le marché de la titrisation et des dérivés de crédit	406
3.1.	La titrisation.....	407
3.2.	Les dérivés de crédit	408

3.3.	Les produits structurés	416
3.4.	Le traitement prudentiel des dérivés de crédit	422
	Conclusion	424
Chapitre 7 – Les paramètres		425
1.	La probabilité de défaut	425
1.1.	La fonction de survie	426
1.2.	Modélisation du défaut	432
1.3.	Générateur d'une chaîne de Markov et les ap- proches de migration de crédit	441
2.	La perte en cas de défaut	447
2.1.	Les facteurs et mesures de recouvrement	448
2.2.	Quelques statistiques	449
2.3.	Modélisation stochastique	452
3.	La dépendance des défaillances	458
3.1.	Les modèles de copule	458
3.2.	Dualité entre le modèle de copule Normale et le modèle factoriel	465
3.3.	Les modèles de contagion	470
3.4.	L'estimation des corrélations de défaut	471
3.5.	La dépendance dans les dérivés de crédit	477
	Conclusion	486
Chapitre 8 – Gestion du risque de crédit		487
1.	Calcul du capital économique	487
1.1.	La distribution de perte	488
1.2.	La mesure de risque	491
1.3.	Le risque incrémental	493
1.4.	La contribution en risque	497
2.	Gestion de portefeuille de crédits	505
2.1.	Le couple risque/rendement	506
2.2.	La frontière efficiente	509
2.3.	Les méthodes directionnelles	513
2.4.	La prise en compte des dérivés de crédit	516
3.	L'approche Raroc	516
3.1.	Définitions	517
3.2.	Les indicateurs Raroc	519
3.3.	Outil transactionnel et de gestion	522
3.4.	Les différentes utilisations	522
3.5.	Calibration des outils Raroc	523
	Conclusion	526
Conclusion générale		527
Bibliographie générale		529
Appendice : exercices et questions de cours		535