Simulations et Méthode de Monte Carlo

Thierry Roncalli

Projet à rendre sous forme papier avant le mercredi 8 Mars

6 Février 2006

1 Génération de nombres aléatoires

1. Simuler 1000 nombres aléatoires de distribution de Bernoulli de paramètre 40%.
2. En exploitant le lien entre la distribution Binomiale et la distribution de Bernoulli, simuler 1000 nombres aléatoires de distribution $\mathcal{B}(50; 40\%)$.
3. En exploitant le lien entre la distribution du chi-deux et la distribution gaussienne, simuler 100 nombres aléatoires de distribution χ^2 à 5 degrés de liberté. En déduire une méthode pour simuler 100 nombres aléatoires de distribution de Student à 5 degrés de liberté.
4. A quoi correspond la commande `cdftci` ? Utiliser cette commande pour simuler 100 nombres aléatoires de distribution de Student à 5 degrés de liberté.
5. Simuler 10000 nombres aléatoires de distribution exponentielle de paramètre λ égal à 1.

2 Distribution de perte d'un portefeuille

On considère un portefeuille de 200 créances de maturité 10 ans et de notionnel 100 euros réparties de la façon suivante : 50% appartiennent à la classe de risque $\mathcal{A}$ et 50% appartiennent à la classe de risque $\mathcal{B}$. La probabilité de défaut annuelle est 100 bp pour la classe $\mathcal{A}$ et 1000 bp pour la classe $\mathcal{B}$, et la perte en cas de défaut est fixe et égale à 50%.

1. On suppose un modèle exponentiel pour modéliser les temps de défaut. Calculer le paramètre λ pour chaque classe de risque.
2. En supposant que les temps de défaut sont indépendants, simuler 10000 simulations de la perte du portefeuille. En déduire par Monte Carlo la moyenne et l'écart-type de la perte du portefeuille. Est-ce que 10000 simulations sont suffisantes[1] ? Si non, ajuster le nombre de simulations. Calculer ensuite le quantile et l'unexpected loss au seuil de confiance de 80%, 90%, 95% et 99%.
3. Même question lorsque la perte en cas de défaut est aléatoire et suit une distribution Beta $\mathcal{B}(a, b)$. On considére deux cas :
   (a) La moyenne et l'écart-type de la perte en cas de défaut valent respectivement 50% et 10%.
   (b) La moyenne et l'écart-type de la perte en cas de défaut valent respectivement 50% et 40%.

   Qu'en déduisez-vous ?
4. En considérant une perte en cas de défaut constante et égale à 50%, calculer le quantile et l'unexpected loss au seuil de confiance de 80%, 90%, 95% et 99% en introduisant une corrélation de 50% entre les temps de défaut.

[1] On supposera que la méthode de Monte Carlo a convergé lorsque les erreurs sur la moyenne et l'écart-type sont inférieures à 10% dans 80% des cas.

3 Charge en capital pour le risque opérationnel

On suppose que la distribution de fréquence est une distribution de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et que la distribution de sévérité est une distribution log-normale $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$.

1. Calculer la charge en capital avec un seuil de confiance de 99% lorsque $\lambda = 100$, $\mu = 6$ et $\sigma = 1.5$.
2. Calculer la charge en capital avec un seuil de confiance de 99% lorsque $\lambda = 5$, $\mu = 2.6$ et $\sigma = 2.2$.

4 Copules et dépendance entre la perte en cas de défaut et le temps de défaut

On suppose que la perte en cas de défaut LGD suit une distribution uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$ et que le temps de défaut τ suit une distribution exponentielle de paramètre $\lambda = 100$ bp.

1. Simuler 1000 réalisations du vecteur aléatoire (LGD, τ) lorsque la perte en cas de défaut et le temps de défaut sont indépendants.
2. Même question lorsque la dépendance entre LGD et τ est une copule Gaussienne de paramètre ρ. On prendra respectivement ρ égal à -90%, -50%, 50% et 90%.
3. On considère un portefeuille homogène de 100 créances de maturité 5 ans et de notionnel 100 euros. On suppose que les temps de défaut sont indépendants, que les pertes en cas de défaut sont indépendantes, mais que le temps de défaut et la perte en cas de défaut d'une même créance sont corrélés avec une copule Gaussienne de paramètre ρ égal à 50%. Calculer l'unexpected loss 99% du portefeuille avec 100000 simulations.

5 Valeur en risque d'un portefeuille d'actions

On considère les données CAC.XLS fournies en cours. On suppose un portefeuille long dans les titres Total, Sanofi, Société Générale et France Telecom. Le 15/11/04, la composition du portefeuille est parfaitement homogène (chaque titre représente 25% de la valeur du portefeuille).

1. Calculer la valeur en risque journalière 99% avec la méthode historique ?
2. Même question avec une VaR Gaussienne. En déduire la contribution en risque de chaque titre ?
3. Quelles sont vos conclusions ?