Examen de Gestion des Risques Financiers

Thierry Roncalli

4 janvier 2012

Merci de rédiger entièrement vos réponses.

1 Les réglementations Bâle II et Bâle III

1. Quelles sont les principales différences entre l'Accord Bâle I et l'Accord Bâle II ?
2. Quelles sont les modifications apportées par la nouvelle réglementation Bâle III ?
3. À quoi correspondent les trois Piliers dans le dispositif prudentiel ?

2 Le risque de marché

1. Définissez précisément le périmètre des risques qui donnent lieu à une exigence de fonds propres (on fera la distinction en particulier entre les risques du trading book et ceux du banking book).
2. Comment est calculée l'exigence de fonds propres dans la méthode dite des modèles internes ?
3. Pourquoi a-t-on besoin de calculer deux mesures de Value-at-Risk dans la méthode dite des modèles internes ?

3 Le risque de crédit

1. Comment est défini le défaut dans Bâle II ?
2. Expliquez la méthode SA pour calculer l'exigence de fonds propres au titre du risque de crédit.
3. Définissez les différents paramètres de la méthode IRB.

4 Le risque de contrepartie sur opérations de marché

1. Définissez la notion de risque de contrepartie sur opérations de marché. Donnez deux exemples.
2. Comment est calculée l'exigence de fonds propres pour ce type de risque ?
3. Décrivez les trois méthodes pour calculer l'exposition au défaut.

5 Le risque opérationnel

1. Comment Bâle II définit le risque opérationnel ? Donnez des exemples de risque opérationnel.
2. Quelles différences faites-vous entre des risques dit "high frequency / low severity" et "low frequency / high severity" ? Donnez quelques exemples.
3. Quel est le formalisme mathématique de la méthode LDA ?

6 Valeur en risque d'un portefeuille d'actions avec une couverture optionnelle

On considère un portefeuille d'actions composé de 2 titres A, 4 titres B et 2 titres C. La valeur actuelle de ces titres est respectivement 100, 50 et 50 euros. On cherche à calculer la valeur en risque du portefeuille pour une période de détention de 3 mois et un seuil de confiance de 99%.

1. En utilisant l'historique des prix des titres A, B et C des 260 derniers jours de trading, on estime que les volatilités annuelles $\hat{\sigma}_A$, $\hat{\sigma}_B$ et $\hat{\sigma}_C$ sont respectivement égales à 20%, 20% et 40%, et que ces titres ne sont pas corrélés à l'exception des titres A et C qui présentent une corrélation de 50%. En négligeant l'effet moyenne, calculez la VaR gaussienne du portefeuille.
2. Comment calcule-t-on la VaR historique ? En utilisant les chocs historiques des 260 derniers jours de trading, les 5 pires scénarios des 260 PnLs simulés à un jour du portefeuille sont $-15{,}99$, $-14{,}33$, $-12{,}90$, $-12{,}55$ et $-12{,}53$. Calculez la VaR historique du portefeuille.
3. Le gérant du portefeuille décide d'acheter n options de vente (put) 3 mois sur l'action C de prix d'exercice égal à 45. La valeur initiale du delta de l'option est égale à -25%. Combien d'options doit acheter le gérant pour couvrir 50% du risque sur le titre C. Calculez la valeur en risque gaussienne de ce nouveau portefeuille.
4. Le gérant du portefeuille estime qu'en achetant 12 options de vente sur l'action C, il minimise la valeur en risque du portefeuille. Quel est son raisonnement ? Pensez-vous que son raisonnement soit justifié ? Calculez la valeur en risque gaussienne de ce nouveau portefeuille.

7 Produits exotiques et gestion des risques

1. Définissez les notions de *mark-to-market* et *mark-to-model*. Pourquoi le backtesting de la VaR d'un portefeuille de dérivés exotiques pose-t-il un problème ?
2. Qu'appelle-t-on le risque de modèle ?
3. Quelles sont les différentes façons pour calculer la VaR d'un portefeuille de dérivés exotiques ?
4. On considère la vente d'une option exotique sur un sous-jacent dont le prix actuel est 100. A cette date t, la valeur de l'option est égale à 6,78 euros.
   (a) A la date $t+1$, la valeur du sous-jacent devient 97 alors que la volatilité implicite n'a pas bougé. Le trader constate un PnL égal à 1,37 euros. Pourquoi le PnL du trader est positif ? Pouvez-vous expliquer le PnL par les sensibilités sachant que le delta Δ_t est égal à 49%, que le gamma Γ_t vaut 2% et que le véga[1] υ_t est estimé à 40% ?
   (b) A la date $t+2$, la valeur du sous-jacent devient 100 alors que la volatilité implicite passe de 20% à 22%. Le trader constate un PnL négatif de $-2{,}37$ euros. Pourquoi le PnL du trader est négatif ? Pouvez-vous expliquer le PnL par les sensibilités sachant que le delta Δ_{t+1} est égal à 43%, que le gamma Γ_{t+1} vaut 2% et que le véga υ_{t+1} est estimé à 38% ?
   (c) Quelles conclusions faites-vous en terme de risque de modèle ?

8 Calcul de l'exigence de fonds propres d'une opération OTC au titre du risque de contrepartie

1. Le tableau suivant donne les valeurs actuelles des mark-to-market des 7 contrats OTC entre les banques A et B :

	Actions			Taux		Change	
	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_7$
A	10	-5	6	17	-5	-5	1
B	-11	6	-3	-12	9	5	1

1. Celui-ci est mesuré en points de volatilité.

On lit ce tableau de la façon suivante : la banque A a déclaré un mark-to-market de 10 pour le contrat $\mathcal{C}_1$ alors que la banque B pense avoir un mark-to-market de -11 pour le même contrat.

(a) Expliquez pourquoi il y a des incohérences pour certains mark-to-market.

(b) Calculez l'exposition au défaut de la banque A.

(c) Même question s'il existe un contrat de compensation global.

(d) Même question s'il existe un contrat de compensation ne portant que sur le marché des actions.

2. On note $e(t)$ l'exposition au défaut d'un contrat OTC de maturité T. La date actuelle est fixée à $t = 0$. On suppose que l'exposition au défaut est[2] $e(t) = N\sigma\sqrt{t}U$ avec $0 \leq U \leq 1$, $\Pr\{U \leq u\} = u^{\gamma}$ et $\gamma > 0$.

   (a) Calculez l'exposition future potentielle $\mathrm{PFE}_{\alpha}(0; t)$, l'exposition attendue $\mathrm{EE}(0; t)$ et l'exposition positive attendue effective $\mathrm{EEPE}(0; h)$.

   (b) La banque gère le risque de contrepartie avec un modèle interne et le risque de crédit avec la méthode IRB simple. On considère que le risque de contrepartie porte sur un produit financier OTC de notionnel 3 millions d'euros, de maturité 1 an et dont l'exposition au défaut est donnée à la question précédente (avec $\sigma = 20\%$ et $\gamma = 2$).

      i. Calculez l'exposition au défaut EAD sachant que la banque utilise la valeur réglementaire pour le paramètre α.

      ii. Calculez le capital réglementaire[3] correspondant au risque de crédit du produit OTC sachant que la probabilité de défaut 1 an de la contrepartie est estimée à 1%.

9 Valorisation d'un CDS

1. On considère un CDS 6M sur une contrepartie X de maturité 3 ans et de notionnel 1 million d'euros. Le spread actuel du CDS est égal à 200 pb. Donnez le diagramme des flux du CDS en supposant que la jambe de protection est payée à la maturité et que le taux de recouvrement est fixe et égal à 40%. Quel est le PnL du vendeur A de la protection si la contrepartie X ne fait pas défaut ? Quel est le PnL de l'acheteur B de la protection si la contrepartie X fait défaut dans 2 ans et 2 mois ?

2. Sept mois plus tard, le spread de la contrepartie X a augmenté et vaut maintenant 1 000 pb. L'acheteur B de la protection retourne sa pose dans le marché avec C. Combien l'acheteur B a-t-il gagné ou perdu d'argent dans cette opération ? Estimez la nouvelle probabilité de défaut annuelle de la contrepartie X.

10 Variations autour de la notion de contribution en risque

1. On considère que la perte d'un portefeuille de crédits a pour expression :

$$L = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$$

   où x_i est l'exposition au défaut et ε_i est la perte aléatoire unitaire de la créance i. On note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et τ_i le temps de défaut de la créance i. On suppose que la maturité des créances est égale à 1 an et on considère que la mesure de risque de crédit $\mathcal{R}$ est l'*unexpected loss* (ou UL).

   (a) Comment ε_i est-il modélisé dans le modèle Bâle II ?

   (b) Si on suppose que la perte en cas de défaut LGD_i ne peut pas être nulle, calculez la probabilité que ε_i soit égal à zéro si $\tau_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$.

2. N et σ sont le notionnel du contrat OTC et la volatilité du sous-jacent du contrat.

3. On prendra une valeur de 75% pour le paramètre LGD et 20% pour le corrélation de défaut. On utilisera aussi l'approximation $\Phi(-1) \simeq 0{,}15$.

(c) On considère un portefeuille dont les pertes en cas de défaut LGD_i ne sont pas aléatoires et sont égales ($\mathrm{LGD}_i = \mathrm{LGD}$) et dont les temps de défaut sont exponentiels $\tau_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$.

i. Quelle est la loi de probabilité du vecteur aléatoire ε si les temps de défaut sont indépendants ?

ii. Quelle est la loi de probabilité de ε si la copule des temps de défaut est Normale de corrélation uniforme ρ ?

iii. Quelle est la loi de probabilité de ε si la copule des temps de défaut est la borne supérieure de Fréchet ?

2. On suppose que $\varepsilon \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

(a) Calculez la mesure de risque $\mathcal{R}$ du portefeuille au seuil de confiance α.

(b) Déduisez-en le risque marginal de chaque créance :

$$\mathrm{MR}_i = \frac{\partial\,\mathcal{R}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial\, x_i}$$

ainsi que la contribution en risque de chaque créance. Exprimez alors le risque marginal MR_i comme une espérance conditionnelle de l'aléa ε_i.

(c) Est-ce que cette mesure de risque vérifie le principe d'Euler ?

(d) On se place dans le modèle Bâle II. On a donc :

$$\varepsilon_i = \mathrm{LGD}_i \times 1\{\tau_i \leq 1\}$$

avec $\mathrm{LGD}_i \perp \tau_i$. Montrez que la contribution en risque dans le cas où la distribution de ε est approchée par une distribution gaussienne satisfait la relation suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{RC}_i \quad \propto \quad & x_i^2\sigma^2(\mathrm{LGD}_i)\,\mathrm{PD}_i + x_i^2\mathbb{E}^2[\mathrm{LGD}_i](\mathrm{PD}_i - \mathbf{C}(\mathrm{PD}_i, \mathrm{PD}_i; \rho)) + \\ & \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \mathbb{E}[\mathrm{LGD}_i]\,\mathbb{E}[\mathrm{LGD}_j](\mathbf{C}(\mathrm{PD}_i, \mathrm{PD}_j; \rho) - \mathrm{PD}_i\,\mathrm{PD}_j)\end{aligned}$$

avec $\mathbf{C}(u_1, u_2; \rho)$ la copule gaussienne de paramètre ρ. Commentez ce résultat.

11 Maximum de vraisemblance d'un modèle de perte en cas de défaut

1. Quelles différences faites vous entre le taux de recouvrement et la perte en cas de défaut ?
2. On considère une banque qui octroie en moyenne 250 000 crédits par an. Le montant moyen d'un crédit est égal à 50 000 euros. On estime que la probabilité de défaut moyenne est égale à 1% et que le taux de recouvrement moyen est égal à 65%. Le coût total annuel du service contentieux est égal à 12,5 millions d'euros. Quelle est la perte en cas de défaut moyenne ?
3. On suppose que la distribution de la perte en cas de défaut LGD est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x) &= \Pr\{\mathrm{LGD} \leq x\} \\ &= x^{\gamma}\end{aligned}$$

(a) Quelle est la condition sur le paramètre γ pour que $\mathbf{F}$ soit une distribution de probabilité ? Calculez la densité de LGD.

(b) On dispose d'un échantillon historique $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de pertes en cas de défaut annuelles et moyennes pour une classe de risque $\mathcal{C}$.

i. Calculez l'espérance mathématique $\mathbb{E}[\text{LGD}]$. Déduisez-en l'expression de l'estimateur $\hat{\gamma}_{\text{MM}}$ des moments[4].

ii. Écrivez la fonction de log-vraisemblance. Déduisez-en l'expression de l'estimateur $\hat{\gamma}_{\text{ML}}$ du maximum de vraisemblance.

iii. On suppose que $x_i = 50\%$. Calculez les valeurs prises par $\hat{\gamma}_{\text{MM}}$ et $\hat{\gamma}_{\text{ML}}$. Commentez ces résultats.

(c) On considère maintenant deux classes de risque $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On note $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ l'échantillon historique de pertes bivariées en cas de défaut annuelles et moyennes des classes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On suppose que la dépendance entre les pertes en cas de défaut annuelles et moyennes des deux classes de risque est donnée par la fonction copule de Gumbel-Barnet :

$$\mathbf{C}(u_1, u_2) = u_1 u_2 e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2}$$

avec θ un paramètre.

i. Montrez que la densité de la fonction copule est :

$$c(u_1, u_2; \theta) = \left(1 - \theta - \theta \ln(u_1 u_2) + \theta^2 \ln u_1 \ln u_2\right) e^{-\theta \ln u_1 \ln u_2}$$

ii. Calculez la densité bivariée du vecteur aléatoire $(\text{LGD}_1, \text{LGD}_2)$ où LGD_j est la perte en cas de défaut annuelle et moyenne de la classe de risque $\mathcal{C}_j$.

iii. Déduisez-en la log-vraisemblance de l'échantillon historique des pertes en cas de défaut bivariées.

iv. On note $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$ et $\hat{\theta}$ les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres γ_1 (paramètre γ de la classe $\mathcal{C}_1$), γ_2 (paramètre γ de la classe $\mathcal{C}_2$) et θ (paramètre de la dépendance entre les LGD des classes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$). Pourquoi $\hat{\gamma}_1$ et $\hat{\gamma}_2$ ne coïncident pas avec l'estimateur unidimensionnel $\hat{\gamma}_{\text{ML}}$ de la question (3.b.ii) sauf si $\hat{\theta} = 0$? Illustrez avec un exemple.

4. En ne considérant que le premier moment.