Gestion des Risques Financiers

Thierry Roncalli

6 janvier 2010

Merci de rédiger entièrement vos réponses.

1 La réglementation Bâle II

1. Quelles sont les principales différences entre l'accord originel de Bâle (ratio Cooke) et l'accord dit Bâle II ?
2. Comment est calculé le ratio McDonough ? Quelles sont les différences entre les ratios Tier One et Tier Two ?
3. Expliquez le rôle du Pilier II dans le dispositif de Bâle. Donnez des exemples d'application du Pilier II pour le risque de crédit et le risque opérationnel.

2 Le risque de marché

1. Définissez précisement le périmètre des risques qui donnent lieu à une exigence de fonds propres (on fera la distinction en particulier entre les risques du trading book et ceux du banking book).
2. Définissez la notion de Value-at-Risk.
3. Pourquoi a-t-on besoin de calculer deux mesures de Value-at-Risk dans la méthode dit des modèles internes ?
4. Définissez la notion de stress-testing. Comment celui-ci est utilisé dans la réglementation prudentielle ?

3 Le risque de crédit

1. Comment est défini le défaut dans Bâle II ?
2. Expliquez la méthode SA pour calculer l'exigence de fonds propres au titre du risque de crédit ?
3. Quelles sont les différences entre les méthodes IRB simple (FIRB) et IRB avancée (AIRB) ?
4. Qu'appelle-t-on une procédure de réduction des risques (Credit Risk Mitigation ou CRM) ? Quelles sont les différences entre l'approche globale et l'approche simple ? Quelles sont les conditions pour qu'un dérivé de crédit soit éligible comme procédure de réduction des risques ?

4 Le risque opérationnel

1. Comment Bâle II définit le risque opérationnel ? Donnez des exemples de risque opérationnel.
2. Expliquez la méthode standard (TSA) pour mesurer le risque opérationnel. Quelles sont les trois pondérations retenues ? Donner un exemple de ligne métier pour chacune des 3 pondérations. Ce système de pondérations vous semble-t-il cohérent ?
3. Quel est le formalisme mathématique de la méthode LDA ?

5 Estimation des paramètres du modèle LDA

1. On considère un échantillon de pertes unitaires $\{L_1, \ldots, L_n\}$. On suppose que ces pertes suivent une distribution de Pareto $\mathcal{P}(\theta; x^-)$ définie par $\Pr\{L \leq x\} = 1 - \left(\frac{x}{x_-}\right)^{-\theta}$ avec $x \geq x_-$ et $\theta > 1$ (x_- est une constante a priori).
   (a) Calculez la fonction de densité de la distribution de Pareto.
   (b) Déduisez-en l'estimateur $\hat{\theta}$ du maximum de vraisemblance.
   (c) On suppose que les pertes $\{L_1, \ldots, L_n\}$ ont été collectées au delà d'un seuil H. Calculez l'estimateur $\hat{\theta}$ du maximum de vraisemblance dans ce cas-là. Quel enseignement en tirez-vous sur la calibration du paramètre x_- ?
2. On considère un échantillon de T nombres de pertes $\{N_1, \ldots, N_T\}$. On suppose que le nombre de pertes suit une distribution de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
   (a) Donnez l'expression de la fonction de probabilité de la distribution de Poisson.
   (b) Calculez l'estimateur $\hat{\lambda}$ du maximum de vraisemblance si la fréquence de mesure des pertes est annuelle.

6 Le risque de contrepartie sur opérations de marché

1. Définissez la notion de risque de contrepartie sur opérations de marché. Donnez des exemples.
2. On définit la perte liée à un risque de contrepartie de façon classique :

$$L = \mathrm{EAD}(\tau) \times \mathrm{LGD} \times 1\{\tau < T\}$$

   Pourquoi l'exposition au défaut est aléatoire et correspond à la partie positive du Mark-to-Market de l'opération OTC au moment du défaut de la contrepartie ?
3. Le tableau suivant donne les valeurs actuelles des mark-to-market des 7 contrats OTC entre les banques A et B :

	Actions			Taux		Change	
	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_7$
A	10	-5	6	17	-5	-5	1
B	-11	6	-3	-12	9	5	1

   On lit ce tableau de la façon suivante : la banque A a déclaré un mark-to-market de 10 pour le contrat $\mathcal{C}_1$ alors que la banque B pense avoir un mark-to-market de -11 pour le même contrat.
   (a) Expliquez pourquoi il y a des incohérences pour certains mark-to-market.
   (b) Calculez l'exposition au défaut de la banque A.
   (c) Même question s'il existe un contrat de compensation global.
   (d) Même question s'il existe un contrat de compensation ne portant que sur le marché des actions.
4. On note $e(t)$ l'exposition au défaut d'un contrat OTC de maturité 1 an. La date actuelle est fixée à $t_0 = 0$. La distribution de l'exposition au défaut $e(t)$ pour la date future t est notée $\mathbf{F}_{[t_0,t]}$.
   (a) On rappelle que l'exposition future potentielle (*potential future exposure*) est le quantile de la distribution $\mathbf{F}_{[t_0,t]}$ pour un seuil de confiance α donné :

$$\mathrm{PFE}_\alpha(t_0; t) = \mathbf{F}_{[t_0,t]}^{-1}(\alpha)$$

   que l'exposition maximale (*peak exposure*) est le maximum des expositions futures potentielles :

$$\mathrm{PE}_\alpha(t_0) = \sup_t \mathrm{PFE}_\alpha(t_0; t)$$

et que l'exposition attendue (*expected exposure*) est la moyenne de l'exposition au défaut pour une date t donnée :

$$\mathrm{EE}(t_0; t) = \mathbb{E}[e(t)] = \int x \,\mathrm{d}\mathbf{F}_{[t_0,t]}(x)$$

Interprétez et commentez ces trois notions d'exposition. Quelle est la mesure la plus pertinente pour mesurer $\mathrm{EAD}(\tau)$ dans le cadre d'une exigence réglementaire de fonds propres ? Pourquoi ?

(b) Calculez ces différentes quantités lorsque l'exposition au défaut est de la forme $e(t) = \sigma\sqrt{t}X$ avec X une variable aléatoire définie sur $[0,1]$ et dont la fonction de densité est $f(x) = x^a/(a+1)$ avec a une constante positive. Pourquoi cette exposition est plutôt celle d'une option que celle d'un swap amortissable ?

7 Valeur en risque d'un portefeuille long/short

On considère un portefeuille « long/short » composé d'une position acheteuse sur l'action A et d'une position vendeuse sur l'action B. Les cours actuels des deux actions sont égaux à 100 euros. Dans tous les cas, on cherche à calculer la valeur en risque du portefeuille pour une période de détention de 1 mois et un seuil de confiance de 99%.

1. En utilisant l'historique des prix des actions A et B des 250 derniers jours de trading, on estime que les volatilités annuelles $\hat{\sigma}_A$ et $\hat{\sigma}_B$ sont toutes les deux égales à 20%, et que la corrélation est égale à 50%. En négligeant l'effet moyenne, calculez la VaR gaussienne du portefeuille.
2. Comment calcule-t-on la VaR historique ? En utilisant les chocs historiques des 300 derniers jours de trading, les 5 pires scénarios des 300 PnLs simulés à un jour du portefeuille sont $-3{,}37$, $-3{,}09$, $-2{,}72$, $-2{,}67$ et $-2{,}61$. Calculez la VaR historique du portefeuille.
3. Suite à l'interdiction des ventes à découvert sur certains titres du marché, le gérant du portefeuille annule la position vendeuse sur l'action B. Pourquoi la VaR gaussienne du portefeuille n'a pas changé ?
4. Le gérant du portefeuille long/short décide de vendre une option d'achat à la monnaie sur l'action A. En utilisant une approximation delta (on suppose que le delta de l'option est égal à 50%), calculez la valeur en risque de ce nouveau portefeuille.

8 Contribution en risque

Nous notons L la perte d'un portefeuille de n créances, et x_i l'exposition au défaut de la i-ième créance. Nous avons :

$$L = \mathbf{x}^\top \mathbf{e} = \sum_{i=1}^{n} x_i \times e_i$$

avec e_i la perte unitaire de la i-ième créance. Nous notons $\mathbf{F}$ la fonction de distribution de L.

1. On suppose que $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$. Calculez la valeur en risque au seuil de confiance α.
2. En déduire la valeur en risque marginale de la i-ième créance. Définissez alors la contribution en risque de la i-ième créance.
3. Vérifiez que la valeur en risque marginale est égale à :

$$\frac{\partial \,\mathrm{VaR}}{\partial \, x_i} = \mathbb{E}\left[e_i \mid L = \mathbf{F}^{-1}(\alpha)\right]$$

Interprétez ce résultat.

4. On se place dans le modèle de risque de crédit Bâle II. On a :

$$e_i = \mathrm{LGD}_i \times D_i$$

avec $D_i = \mathbb{1}\left\{\tau_i < M_i\right\}$ l'indicatrice de défaut et M_i la maturité de la i-ième créance. Quelles sont les conditions à vérifier pour obtenir le résultat suivant :

$$\mathbb{E}\left[e_i \mid L = \mathbf{F}^{-1}(\alpha)\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{LGD}_i\right] \times \mathbb{E}\left[D_i \mid L = \mathbf{F}^{-1}(\alpha)\right]$$

5. On suppose que le défaut intervient avant la maturité M_i si une variable latente Z_i passe en dessous d'une certaine barrière B_i :
$$\tau_i \leq M_i \Leftrightarrow Z_i \leq B_i$$
On modélise $Z_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i$ avec Z_i, X et ε_i trois variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et indépendantes. X est le facteur (ou le risque systémique) et ε_i est le risque individuel. Calculez la probabilité de défaut conditionnelle.

6. Montrez que, dans le modèle Bâle II, nous avons :
$$\mathbb{E}\left[e_i \mid L = \mathbf{F}^{-1}(\alpha)\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{LGD}_i\right] \times \mathbb{E}\left[D_i \mid X = \Phi^{-1}(1-\alpha)\right]$$

7. Déduisez-en l'expression de la contribution en risque de la i-ième créance dans le modèle Bâle II.

8. On suppose que le portefeuille est homogène, c'est-à-dire que les créances ont la même exposition au défaut, la même distribution de perte en cas de défaut et la même probabilité de défaut. En utilisant le résultat suivant :
$$\int_{-\infty}^{c} \Phi(a+bx)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \Phi_2\left(c, \frac{a}{\sqrt{1+b^2}}; \frac{-b}{\sqrt{1+b^2}}\right)$$
avec $\Phi_2(x, y; \rho)$ la fonction de répartition de la distribution gaussienne bivariée de corrélation ρ sur l'espace $[-\infty, x] \times [-\infty, y]$, calculez l'expected shortfall dans le cadre du modèle Bâle II. Commentez ce résultat.

9 Valorisation d'un CDS

1. On considère un CDS 6M sur une contrepartie X de maturité 3 ans et de notionnel 1 million d'euros. Le spread actuel du CDS est égal à 200 pb. Donnez le diagramme des flux du CDS en supposant que la jambe de protection est payée à la maturité et que le taux de recouvrement est fixe et égal à 40%. Quel est le PnL du vendeur A de la protection si la contrepartie X ne fait pas défaut ? Quel est le PnL de l'acheteur B de la protection si la contrepartie X fait défaut dans 2 ans et 2 mois ?

2. Sept mois plus tard, le spread de la contrepartie X a augmenté et vaut maintenant 1 000 pb. L'acheteur B de la protection retourne sa pose dans le marché avec C. Combien l'acheteur B a-t-il gagné ou perdu d'argent dans cette opération ? Estimez la nouvelle probabilité de défaut annuelle de la contrepartie X.