Econométrie Financière II

Thierry Roncalli

Projet à rendre sous forme électronique avant le 8 Mai
(thierry.roncalli@sgam.com)

10 Avril 2006

1 Méthode généralisée des moments

1. On considère le modèle suivant $x_t \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$. Donner les deux premiers moments de la loi log-normale et en déduire l'expression des moments centrés nécessaires à la mise en place de la méthode généralisée des moments. Ecrire ensuite un programme Gauss qui simule un échantillon de 1000 observations de la distribution $\mathcal{LN}(5, 1)$ et qui estime les paramètres μ et σ par GMM.
2. On considère le modèle linéaire :
$$y_t = x_t^\top \beta + u_t$$
avec $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ et x_t un vecteur de dimension K. Donner l'expression des moments centrés de la méthode GMM. On suppose maintenant que les résidus sont hétéroscédastiques. On a $\text{var}[u_t] = \sigma^2 (1 + \alpha z_t)$. Que deviennent les moments centrés de la méthode GMM ?
3. On considère un modèle tobit classique :
$$\begin{aligned} y_t^\star &= \min(0, y_t) \\ y_t &= x_t \beta + u_t \end{aligned}$$
avec $u_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ et x_t un scalaire. $y_t^\star$ est la variable observée. Simuler un échantillon de 1000 observations de $y_t^\star$ avec les paramètres suivants $\sigma = 0.5$ et $\beta = 1$. Ecrire ensuite un programme Gauss qui permet d'estimer les paramètres β et σ par la méthode des moments simulés.

2 Modèles structurels à composantes inobservables

1. On considère les deux modèles suivants :
   –
   $$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \end{cases}$$
   –
   $$\begin{cases} y_t = \mu_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \end{cases}$$

   avec ε_t, η_t et ζ_t trois bruits blancs indépendants de variance σ_ε^2, σ_η^2 et σ_ζ^2.

   (a) Mettre ces modèles sous la forme espace état.

   (b) Donner la forme stationnaire de ces processus. En déduire leur fonction génératrice spectrale.

   (c) Illustrer graphiquement la différence entre les densités spectrales de ces deux processus.

2. On considère le modèle suivant :
   $$\begin{cases} y_t = \mu_t + \beta_t + \gamma_t + \varepsilon_t \\ \mu_t = \mu_{t-1} + \eta_t \\ \beta_t = \phi\beta_{t-1} + \zeta_t \\ \sum\limits_{i=0}^{s-1} \gamma_{t-i} = \omega_t \end{cases}$$

   avec ε_t, η_t, ζ_t et ω_t quatre bruits blancs indépendants de variance σ_ε^2, σ_η^2, σ_ζ^2 et σ_ω^2.

   (a) Interpréter les différentes composantes μ_t, β_t et γ_t. Pourquoi peut-on considérer γ_t comme une composante saisonnière stochastique ?

   (b) Montrer que la forme stationnaire de y_t est :
   $$z_t = (1 - L)(1 - L^s)\, y_t$$

   (c) Montrer que la fonction génératrice spectrale de z_t est :
   $$\begin{aligned} g(\lambda) \quad = \quad & 4(1 - \cos\lambda)(1 - \cos s\lambda)\,\sigma_\varepsilon^2 + \\ & 2(1 - \cos s\lambda)\,\sigma_\eta^2 + \\ & \left(\frac{4 - 4\cos\lambda - 4\cos s\lambda + 2\cos(s-1)\lambda + 2\cos(s+1)\lambda}{1 - 2\phi\cos\lambda + \phi^2}\right)\sigma_\zeta^2 + \\ & (6 - 8\cos\lambda + 2\cos 2\lambda)\,\sigma_\omega^2 \end{aligned}$$

3 Méthode de Whittle

On considère le modèle z_t défini par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_t & = & x_t + y_t \\ x_t & = & \phi_1 x_{t-1} + u_t \\ y_t & = & v_t - \theta_1 v_{t-1} \end{array}\right.$$

avec $u_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_u^2\right)$, $v_t \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_v^2\right)$ et $u_t \perp v_t$. z_t est donc la somme d'un processus AR(1) et d'un processus MA(1). La fonction génératrice spectrale est :

$$g\left(\lambda\right) = \sigma_u^2 \frac{1}{\left(1 - 2\phi_1 \cos\lambda_j + \phi_1^2\right)} + \sigma_v^2 \left(1 - 2\theta_1 \cos\lambda_j + \theta_1^2\right)$$

1. Simuler une trajectoire de 1000 observations avec les paramètres suivants : $\phi_1 = 0.75$, $\theta_1 = 0.2$, $\sigma_u = 1$ et $\sigma_v = 0.5$.
2. Représenter graphiquement le périodogramme de z_t.
3. Estimer les paramètres ϕ_1, σ_u, θ_1 et σ_v par la méthode de Whittle (méthode du maximum de vraisemblance dans le domaine des fréquences).
4. Comparer graphiquement le périodogramme de z_t et la densité spectrale estimée.

4 Copula et dépendance

On considère le vecteur aléatoire (τ_1, τ_2) de deux temps de défaut exponentiels d'intensité λ_1 et λ_2 (la distribution de τ_i est donc une distribution exponentielle de paramètre λ_i). On suppose que la dépendance entre les deux temps de défaut est un copula Normal de paramètre ρ.

1. Simuler 1000 observations du vecteur aléatoire (τ_1, τ_2) lorsque $\lambda_1 = 10\%$, $\lambda_2 = 20\%$ et $\rho = 50\%$.
2. Ecrire la fonction de vraisemblance associée au vecteur aléatoire (τ_1, τ_2).
3. Estimer par maximum de vraisemblance les paramètres λ_1, λ_2 et ρ.
4. Estimer par la méthode IFM les paramètres λ_1, λ_2 et ρ.
5. Conclusion.